EXPECTATIVAS Y GARANTÍAS. PRIMERAS TESIS DE UNA TEORÍA AXIOMATIZADA DEL DERECHO (*)

1 *Introducción. Términos primitivos y postulados*.- Desarrollaré un fragmento de una teoría del Derecho elaborada con el método axiomático[1]: o sea a través de la estipulación de un número limitado de *términos primitivos* y de *postulados,* la utilización como otros términos de la teoría sólo de los *términos definidos* por medio de los primitivos o de términos anteriormente definidos, la aceptación en fin como otras tesis de la teoría sólo de las que consisten en *definiciones* o en *teoremas* derivados de los postulados, o de las definiciones, o de otros teoremas sobre la base de reglas de formación y de transformación previamente establecidas. Postulados, definiciones y teoremas se expresarán tanto en el lenguaje común como en el lenguaje teórico artificial *LT*. Suministraré en el apéndice las reglas de formación y de trasformación de tal lenguaje, junto a la demostración de los teoremas; pero para cada uno de estos indicaré también en el texto, a la derecha de las fórmulas que lo expresan, las tesis de las cuales se deriva.

---

[*] Este texto está destinado al volumen *Logos dell'essere*, *logos della norma*, editado por Luigi Lombardi Vallauri, en prensa en la editorial Adriatica Editrice, Bari, 1998.

[1] Se trata de algunos parágrafos extraídos de los primeros tres capítulos de una teoría axiomatizada del Derecho, de próxima publicación en la editorial Laterza con el título *Principia iuris*. *Teoria giuridica della democrazia*. El fin de su publicación es el de mostrar en forma elemental y exponer a la discusión el método axiomático empleado, más allá de los límites de las tesis desarrolladas aquí, cuya relevancia puede medirse únicamente en el contexto de la teoría completa de la cual forman parte. Ésta se compone de cuatro partes, dedicadas respectivamente a la deóntica, al Derecho positivo, al Estado de Derecho y a las formas jurídicas de la democracia. He diseñado el proyecto de tal teoría y he llevado a cabo un primer desarrollo rudimentario en *Saggio di una teoria formalizzata del diritto*, en la «Rivista internazionale di Filosofia del diritto», 1965, p. 55-105 y en *Teoria assiomatizzata del diritto. Parte generale*, Giuffrè, Milano 1970. He ilustrado sumariamente el método de la misma en *La semantica della teoria del diritto*, en U. Scarpelli (editor), *La teoria generale del diritto. Problemi e tendenze attuali. Studi dedicati a Norberto Bobbio*, Edizioni di Comunità, Milano 1983, pp. 81-130 y en *La formazione e l'uso del concetti nella scienza giuridica e nell'applicazione della legge*, en «Materiali per una storia della cultura giuridica», 1985, 2, pp. 401-422. Llamo en particular la atención sobre la distinción entre lenguaje teórico y lenguaje dogmático formulada en *Teoria* cit., pp. 11-17, en *La semantica* cit., pp. 105-114 y en *La formazione* cit., pp. 404 ss.

Estas páginas están dedicadas sobre todo al análisis de las «expectativas»: concepto extraño al léxico jurídico corriente, pero a mi parecer central para el análisis lógico de las diversas figuras de derecho subjetivo, así como de las relaciones jurídicas y de las correspondientes garantías. Al tratarse de un fragmento de una teoría general, los términos primitivos y los postulados aquí propuestos son únicamente los indispensables para su desarrollo[2].

Asumo pues como primitivos los siguientes cuatro términos: *permiso, modalidad*, *expectativa y sujeto*. El primero será empleado como predicado monádico, o sea para designar una propiedad, esto es un modo deóntico en contextos del tipo *PERx* (*x* está permitido, esto es su comisión está permitida) y $PER^{z}x$ (no -*x* está permitido, esto es está permitida la omisión de *x*). El segundo y el tercero serán empleados bien en contextos monádicos del tipo *MODy* y *ASPy* (y es una modalidad, por ejemplo una facultad, o una obligación o una prohibición, e y es una expectativa) bien en contextos diádicos, o sea para designar la relación entre una figura de cualificación deóntica y aquello que está deónticamente cualificado por ella en contextos del tipo *MODyx·PERx* (y es modalidad de *x* y *x* está permitido), *MODyx·PER x* (y es modalidad de *x* y no -*x* está permitido), *ASPyzx·¬PERx* (y es expectativa de no -*x* y *x* no está permitido). El cuarto término, en fin, será usado en contextos diádicos del tipo *SOGzx*, para designar la relación entre un sujeto y aquello (comportamiento, o modalidad o expectativa) que le es imputado.

Asumo seguidamente como postulados las tres siguientes tesis:

P1 *De cualquier argumento o está permitida la comisión*, *o está permitida la omisión*.

(x) (PERx v PERzx)

P2 *De cualquier argumento vale que existe la expectativa de su comisión si y sólo si existe también una modalidad correspondiente en virtud de la cual no está permitida la omisión*.

$$(x)((\sum y')ASPy') \equiv (\sum y'')(MODy''x \cdot \neg PERzx))$$

P3 *Para toda modalidad y para toda expectativa existe alguien que es su sujeto*.

$$(y)((MODy \ v \ ASPy) -> \ (\sum z)SOGzy)$$

El primer postulado enuncia una verdad autoevidente y casi analítica: de un acto o está permitida su comisión, o está permitida su omisión, o está

[2]Los términos primitivos y los postulados de la teoría completa son respectivamente catorce y quince; las definiciones alrededor de doscientas cincuenta; los teoremas alrededor de dos mil. En el estado actual de su elaboración, los otros términos primitivos de la teoría son: *«Comportamiento»*, *«interés»*, *«status»*, *«objeto»*, *«significado (prescriptivo)»*, *«regla»*, *«conjunto»*, *«causa»*, *«constituyente»* y *«democracia»*. No he asumido sin embargo como primitivo el término «derecho», que en el sentido de «Derecho objetivo» o «positivo» no es otra cosa más que el nombre del universo de la teoría: «Derecho» será por ello utilizable para designar, sin ulteriores especificaciones, el llamado «derecho subjetivo».

permitida una y otra cosa, mientras que es imposible que no esté permitida ni la comisión ni la omisión. En otras palabras, dado un universo cualquiera, si de un acto no está permitida la comisión entonces está siempre permitida la omisión del mismo, mientras que si no está permitida la omisión del mismo entonces está siempre permitida su comisión.

El segundo postulado vale para caracterizar las expectativas sobre la base de su correlación con las modalidades consistentes en la no permisión (negativa o positiva según, como veremos, se trate de expectativas positivas o negativas), o sea en la obligación o en la prohibición de la misma acción. Esto permitirá representar en términos de expectativas y de no expectativas positivas y negativas toda la fenomenología deóntica.

El tercer postulado enuncia el principio de que toda modalidad y toda expectativa supone siempre un sujeto, o sea un centro de imputación al que sean imputables. También ésta es una verdad evidente para cualquier universo, no siendo concebibles modalidades o expectativas que no sean propias de algún sujeto. Sobre esta tesis fundaré las diversas correlaciones entre las modalidades, las expectativas y sus titulares que proporcionarán la base de una teoría general del las garantías y de las relaciones jurídicas.

2. Los *modos deónticos y las modalidades deónticas*.- De cualquier acción por tanto -excluido por el postulado P1 que pueda ser no permitida tanto la comisión como la omisión- o está permitida tanto la comisión como la omisión, o está permitida la omisión pero no la comisión, o está permitida la comisión pero no la omisión. Estas tres hipótesis configuran otros tantos modos deónticos que convengo en denominar, respectivamente, *facultativo*, *prohibido y obligatorio*.

D1 *«Facultativo» es aquello de lo que está permitido tanto la comisión como la omisión.*

$$(x)(FCOx \equiv (PERx \cdot PERzx))$$

D2 *«Prohibido» es aquello de lo que está permitida la omisión y no está permitida la comisión.*

$$(x)(VIEx \equiv (PERzx \cdot \neg PERx))$$

D3 *«Obligatorio» es aquello de lo que está permitida la comisión y no está permitida la omisión.*

$$(x)(OBBx \equiv (PERx \cdot \neg PERzx))$$

Se deriva de ello la interdefinibilidad de «permitido», de «prohibido» y de «obligatorio»: «permitido» equivaldrá simplemente a «no prohibido» (T1) y a «no obligatorio que no» (T2); «permitido que no» a «no obligatorio» (T3) y a «no prohibido que no» (T4); «prohibido» a «no permitido que» (T5) y a «obligatorio que no» (T6); «obligatorio» a «no permitido que no» (T7) y a «prohibido que no» (T8). «Facultativo», en fin, resultará equivalente a «facultativo que no» (T9).

T1 $(x)(PERx \equiv \neg VIEx)$	P1, D2
T2 $(x)(PERx \cdot \neg OBBzx)$	P1, D3
T3 $(x)(PERzx \equiv OBBx)$	T2
T4 $(x)(PERzx \equiv \neg VIEzx)$	T1
T5 $(x)(VIEx \equiv \neg PERx)$	T1
T6 $(x)(VIEx \equiv OBBzx)$	T5, T2
T7 $(x)(OBBx \equiv \neg PERzx)$	T2
T8 $(x)(OBBx \equiv VIEzx)$	T6
T9 $(x)(FCOx \equiv FCOzx)$	D1

Pero las figuras deónticas pueden ser tratadas no sólo como *modos* (o propiedades, o predicados monádicos), sino también como *modalidades* (o relaciones, o predicados diádicos): no para denotar lo «facultativo» sino la «facultad», no lo «prohibido» sino la «prohibición», no lo «obligatorio» sino la «obligación»: no, en suma, aquello que está deónticamente cualificado sino la figura de cualificación deóntica. Se dirá, en este caso, que existe (o que Tizio tiene) el permiso o el no permiso *de (o de no)* realizar una determinada acción; o que existe (o que Tizio tiene) la facultad o la prohibición o la obligación *de* un comportamiento dado; o bien -en caso que se trate de aquellas figuras no genéricamente deónticas sino específicamente jurídicas que son las «situaciones»- que existe (o que Tizio tiene) el poder, o el deber o el derecho *de* realizar un determinado «acto jurídico». Defino pues los cinco tipos de modalidades correspondientes a los modos deónticos hasta ahora identificados: la *«permisión positiva»* (o de la comisión), la *«permisión negativa»* (o de la omisión), la *«facultad»*, la *«obligación»* y la *«prohibición»*:

D4 *«Permisión positiva» es la modalidad de lo permitido que.*

$$(y)(x)(PEMyx \equiv (MODyx \cdot PER))$$

D5 *«Permisión negativa» es la modalidad de lo permitido que no.*

$$(y)(x)(PEMyzx \equiv (MODyx \cdot PERzx))$$

D6 *«Facultad» es la modalidad de lo facultativo*

$$(y)(x)(FACyx \equiv (MODyx \cdot FCOx))$$

D7 *«Obligación» es la modalidad de lo obligatorio.*

$$(y)(x)(OBLyx \equiv (MODyx \cdot OBBx))$$

D8 *«Prohibición» es la modalidad de lo prohibido.*

$$(y)(x)(DIVyx \equiv (MODyx \cdot VIEx))$$

Estas cinco definiciones enuncian otras tantas correspondencias biunívocas entre tipos de modalidades y tipos de modos deónticos. De ello derivan como teoremas: *a)* las tres equivalencias entre «facultad», «obligación»y «prohibición» y las conjunciones, respectivamente, de «permisión positiva» y «permisión negativa» (T10), de «permisión positiva» y «no permisión negativa» (T11), de «permisión negativa» y de «no permisión positiva» (T12); *b)* las dos equivalencias entre «permisión positiva» y «permisión negativa» y las disyunciones, respectivamente, de «facultad» y «obligación» (T13) y de «facultad» y «prohibición» (T14); *c)* las relaciones de incompatibilidad entre «facultad», «obligación» y «prohibición» en virtud de la implicación por parte de cada una de estas figuras de las negaciones de las otras dos (T15, T16, T17), así como entre permisión positiva y prohibición y entre permisión negativa y obligación (T18, T19); *d)* la distinción de las modalidades, correspondiente al postulado P1, entre «permisión positiva» y «permisión negativa» (T20) y la distinción todavía más importante entre «facultades», «prohibiciones» y «obligaciones» (T21); *e)* la tesis de que la modalidad de la comisión de un comportamiento lo es también de su omisión y viceversa (T22) así como que las equivalencias, correlativas a las expresadas en los teoremas T8, T6 e T9, entre obligación de la comisión y prohibición de la omisión (T23), entre prohibición de la comisión y obligación de la omisión (T24) y entre facultad de la comisión y facultad de la omisión (T25).

$\text{T10 } (y)(x)(\text{FAC}yx \equiv (\text{PEM}yx \cdot \text{PEM}yzx))$	D4, D5, D6, Dl
$\text{Tll } (y)(x)(\text{OBL}yx \equiv (\text{PEM}yx \cdot \neg \text{EM}yzx))$	D4, D5, D7, D3
$\text{T12 } (y)(x)(\text{DIV}yx \equiv (\text{PEM}yzx \cdot \neg \text{PEM}yx))$	D4, D5, D8, D2
$\text{T13 } (y)(x)(\text{PEM}yx \equiv (\text{FAC}yx \text{ v } \text{OBL}yx))$	$\text{D4, D6, D7, D1, D3}$
$\text{T14 } (y)(x)(\text{PEM}yzx \equiv (\text{FAC}yx \text{ v } \text{DIV}yx))$	$\text{D5, D6, D8, D1, D2}$
$\text{T15 } (y)(x)(\text{FAC}yx -> (\neg \text{OBL}yx \cdot \neg \text{DIV}yx))$	T10, T1 1, T12
$\text{T16 } (y)(x)(\text{OBL}yx -> (\neg \text{FAC}yx \cdot \neg \text{DIV}yx))$	T15, T1 l, T12
$\text{T17 } (y)(x)(\text{DIV}yx -> (\neg \text{FAC}yx \cdot \neg \text{OBL}yx))$	T15, T16
$\text{T18 } (y)(x)(\text{PEM}yx -> \neg \text{DIV}yx)$	T13, T17
$\text{T19 } (y)(x)(\text{PEM}yzx -> \neg \text{OBL}yx)$	T14, T16
$\text{T20 } (y)(x)(\text{MOD}yx \equiv (\text{PEM}yx \text{ v } \text{PEM}yzx))$	D4, D5, Pl
$\text{T21 } (y)(x)(\text{MOD}yx \equiv (\text{FAC}yx \text{ v } \text{OBL}yx \text{ v } \text{DIV}yx))$	T20, T13, T14
$\text{T22 } (y)(x)(\text{MOD}yx \equiv \text{MOD}yzx)$	T20
$\text{T23 } (y)(x)(\text{OBL}yx \equiv \text{DIV}yzx)$	T12, Tl 1
$\text{T24 } (y)(x)(\text{DIV}yx \equiv \text{OBL}yzx)$	T11, T12
$\text{T25 } (y)(x)(\text{FAC}yx \equiv \text{FAC}yzx)$	T10

3. *El cuadrado lógico de las expectativas*.- Es posible, sobre esta base, afrontar el análisis de un nuevo concepto, tradicionalmente extraño tanto a la teoría del Derecho como a la lógica deóntica y considerado, comúnmente, una noción sociológica o en todo caso extra-jurídica[3]. En esta teoría tal

---

[3]El carácter prejurídico de la noción de «expectativa» es sostenido abiertamente, por ejemplo por R. Scognamiglio, *Aspettativa di diritto*, en *Enciclopediti del diritto*, Giuffrè, Milano 1958, III, pp. 226-232. Por lo demás, los estudios más relevantes sobre las expectativas son de carácter sociológico: véase, sobre todo, N.Luhmann, *Poltische Planung*, (197l), tr.it. de A.Febbrajo, *Stato di diritto e sistema sociale*, Guida, Napoli 1978, pp. 65-83; *Rechtssoziologie*, (1972), tr.it. de A.Febbrajo, *Sociologia del diritto*, Roma-Bari, Laterza 1977, pp. 40-157; Id., *Rechtssystem und Rechtsdogmatik*, (1974), tr.it. de A.Febbrajo. *Sislema giuridico e dogmatica giuridica*, II Mulino, Bolgna 1978, pp. 59 ss.

concepto será sin embargo formalizado como noción basilar para el análisis de la fenomenología del Derecho: la cual podrá ser vista enteramente en términos de expectativas, o sea de figuras deónticas pasivas, al igual que en términos de facultades, de obligaciones y de prohibiciones, o sea de figuras deónticas activas. En particular, este concepto se revelará esencial para obtener una definición satisfactoria de «derecho subjetivo» y para salir del atolladero de los muchos equívocos y de las muchas aporías que rodean esta noción[4].

Todos los derechos subjetivos consisten, en efecto, en expectativas: no sólo aquellos que podemos llamar «derechos a» o «positivos», como los derechos de crédito y los derechos sociales, los cuales consisten en la expectativa (positiva) de prestaciones, sino también los derechos que podemos llamar «derechos de» o «negativos», como la propiedad y las libertades, que por consistir en facultades y/o en inmunidades incluyen siempre expectativas (negativas) de no impedir y de no turbar su ejercicio o disfrute. Las expectativas, por otro lado, no tienen necesariamente por argumento prestaciones (comisivas u omisivas) ventajosas para sus titulares: son, en efecto, expectativas también la exposición a sanciones o a anulaciones, esto es la responsabilidad por actos ilegales y la anulabilidad de los actos inválidos. En fin, las mismas situaciones que no son en ningún sentido expectativas sino modalidades, como las obligaciones y prohibiciones, son siempre correlatos de expectativas positivas o negativas de su propio argumento -la realización de la obligación o la no realización de la prohibición- por parte de otros sujetos.

Es precisamente esta diversidad de sujetos a quienes se imputan las modalidades y las expectativas de un mismo argumento -considerado por las primeras como comportamiento propio y por las segundas como comportamiento ajeno- lo que proporciona la clave para identificar rigurosamente

[4]«Derecho subjetivo» será definido, en la tercera parte de la teoría, como «expectativa de prestaciones o de no lesiones», o sea como la suma lógica de la expectativa positiva de actos jurídicos conformes y de la expectativa negativa de actos jurídicos contrarios al interés de su titular. El elemento de expectativa, en el sentido indicado por el postulado P2 y de las tesis T26-T39 que como veremos derivan de él, me parece que es el que vincula a todas las distintas y heterogéneas figuras de los derechos subjetivos: de los derechos-pretensión a los derechos de libertad y de inmunidad, de los derechos patrimoniales a los derechos fundamentales. Diremos por ello, en base a nuestra definición, que «derecho subjetivo» aparece todas las veces en que expectativa e interés, sean a la comisión o a la omisión de un acto jurídico ajeno, coinciden en relación con un mismo sujeto. Es así como nuestra definición conjuga las dos concepciones tradicionales del derecho subjetivo, la del derecho como *facultas agendi* y la del derecho como interés protegido. Todos los derechos son intereses protegidos por imperativos a cargo de terceros, incluidos los consistentes en facultades o potestades, que, de manera semejante son intereses a la libertad y a la autodeterminación caracterizados como «permisos fuertes» en vez de como meros «permisos débiles» en cuanto se encuentran sancionados como expectativas negativas o inmunidades gracias a la prohibición de interferencia ajena.

el concepto de expectativa, tanto positiva como negativa. Una caracterización adecuada de tal concepto viene dada, en efecto, por las cuatro relaciones que podemos establecer entre las cuatro figuras del *permiso* identificadas por el clásico cuadrado deóntico de las oposiciones y los correspondientes argumentos de *expectativa: a)* decir que de un comportamiento está permitida la comisión equivale a decir que no hay expectativa de su omisión; *b)* decir que está permitida su omisión equivale a decir que no hay expectativa de su comisión; *c)* decir que no está permitida la comisión equivale a decir que hay expectativa de su omisión; *d)* decir que no está permitida su omisión equivale a decir que hay expectativa de su comisión.

Asumiendo por un momento «expectativa» como predicado monádico o de propiedad de los comportamientos, tendremos pues cuatro equivalencias que reproducen -en términos de «esperado» (o si se quiere de «pretendido»)- las cuatro figuras del cuadrado de los modos deónticos:

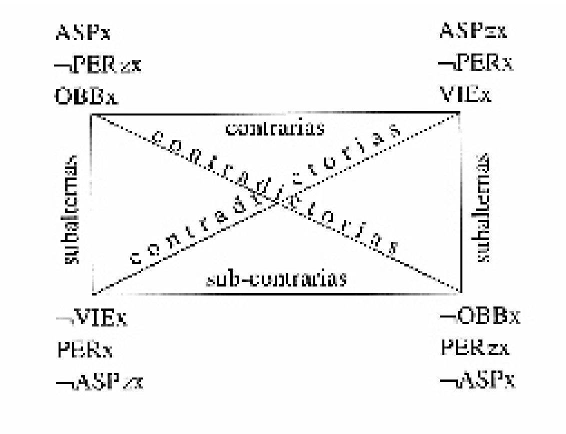
(a) PERx ≡ ¬ ASPzx

(b) PERzx ≡ ¬ ASPx

(c) ¬ PERx ≡ ASPzx

(d) ¬ PERzx ≡ ASN

Correlativamente a las relaciones entre los permisos y no permisos (positivos [u obligaciones] y negativos [o prohibiciones]), también las relaciones entre las expectativas y las no expectativas (positivas y negativas) pueden, pues, ser representadas mediante un cuadrado de seis oposiciones: dos de *contradictoriedad* (o de *alternatividad*) entre expectativas y no expectativas (positivas o negativas); una de *contrariedad* (o de *incompatibilidad*) entre expectativa negativa y expectativa positiva; una de *subcontrariedad* (o de *disyunción*) entre no expectativa positiva y no expectativa negativa; dos de *subalternación* (o de *implicación*) entre expectativa positiva y no expectativa negativa y entre expectativa negativa y no expectativa positiva.



Sintácticamente, sin embargo, el término «expectativa» es comúnmente (y será también aquí) usado no ya como predicado monádico de comportamiento, sino como predicado diádico de relación entre una figura deóntica y un comportamiento: esto es, en contextos del tipo «Tizio tiene derecho (o no tiene derecho) a obtener», o «está sujeto (o no está sujeto) a sufrir» la comisión u omisión de un comportamiento ajeno, que es el mismo comportamiento, por ejemplo una prestación o una sanción, cualificado por la modalidad correspondiente[5]. Son precisamente estos contextos los que evidencian la estructura de las expectativas -sean positivas (o de la comisión) o negativas (o de la omisión)- como *posiciones pasivas* correspondientes a sujetos distintos de aquellos a los cuales corresponden las *posiciones activas* expresadas por las modalidades del mismo argumento. Y es en base a estos sujetos como será posible, cuando disponga de los términos «sujeto» y «persona», elaborar las nociones, en primer lugar, de «relación deóntica» y, después, de «relación jurídica». Nuestras cuatro equivalencias podrán por tanto reformularse en las siguientes formas diádicas:

$$(a')\ PEMy''x \equiv \neg ASPy'zx$$

$$(b')\ PEMy''zx \equiv \neg ASPy'x$$

$$(e')\ \neg PEMy''x \equiv ASPy'zx$$

$$(d')\ \neg PEMy''zx \equiv ASPy'x$$

He expresado estas relaciones, equivalentes entre sí, con el postulado P2, que enuncia la correlación biunívoca[6] que se da siempre entre expectativas positivas y modalidades correspondientes a otros sujetos del no permiso del mismo comportamiento omisivo o bien, sustituyendo en P2 *x* con *zx*, entre expectativas negativas y modalidades correspondientes a otros sujetos del no permiso del mismo comportamiento comisivo (T26)

$$P2\ (x)((\sum y')ASPy'x \equiv (\sum y'')(MODy''\cdot \neg PERzx))$$

$$T26\ (x)((\sum y')ASPy'zx \equiv (\sum y'')(MODy''x \cdot \neg PERx)) \qquad P2, T22$$

Deriva de ello, uniendo este postulado con el postulado P1, el isomorfismo ya ilustrado entre el cuadrado de las expectativas y el de las modalidades: dada la correlación entre expectativas y no permisos (P2), si es verdadero que de toda acción está permitida o su comisión o su omisión (P1), es también verdad que de la misma acción o no existe la expectativa de la comisión

[5]Por eso no he juzgado necesario introducir, en correspondencia con la figura diádica «expectativa», una figura deóntica monádica como «esperado» o «pretendido (que o que no)» correlativa al modo monádico del «no permitido (que no o que)»

[6]A pesar de esta correlación biunívoca, expresada por el signo de equivalencia entre «expectativa de que» y «modalidad de lo que no es permitido que no», «expectativa» no es un término definido y el postulado P3 no es una definición. Esto depende del hecho de que la variable de la que «expectativa» es predicado está cuantificada existencialmente y no aparece en aquello que debería ser el *definiens*, el cual por tanto no puede reemplazar a «expectativa» en todas las ocasiones en que aparece.

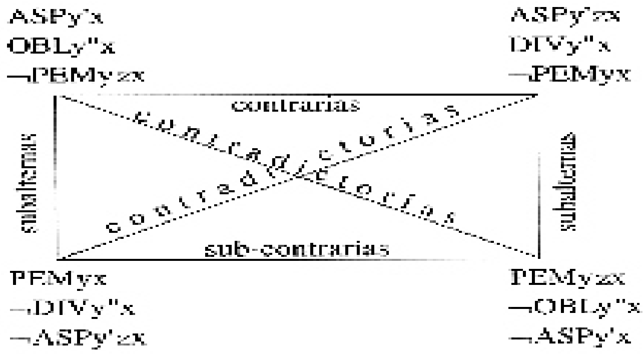
o no existe la expectativa de la omisión (T27); de forma que, si de algo existe la expectativa positiva no existe la expectativa negativa (T28), y viceversa (T29), siendo los dos tipos de expectativas incompatibles entre sí (T30) exactamente como las correspondiente obligaciones y prohibiciones (T16, T17)[7].

T27 $(x)(\neg(\sum y)ASPyx \vee \neg(\sum y)ASPyzx)$	Pl, P2, T22
T28 $(y)(x)(ASPyx -> \neg ASPyzx)$	T27
T29 $(y)(x)(ASPyzx -> \neg ASPyx)$	T28
T30 $(y)(x)(\neg ASPyx \vee \neg ASPyzx)$	T28

Ahora bien, sabemos que las modalidades del no permiso de la omisión y del no permiso de la comisión -correspondientes respectivamente a la expectativa positiva y a la expectativa negativa- no son nada distinto que la obligación (D7) y que la prohibición (D8), dado que el no permiso de la omisión es lo obligatorio (T7), mientras que el no permiso de la comisión es lo prohibido (T5). Diremos por ello que la existencia de la expectativa de una comisión o de una omisión está siempre correlacionada con la existencia de una obligación o de una prohibición correspondiente; de forma que la obligación vale para definir la correspondiente expectativa positiva (y viceversa) y la prohibición vale para definir la correspondiente expectativa negativa (y viceversa). Precisamente, puesto que, según las tesis T23 e T24, la obligación de la comisión equivale a la prohibición de la omisión y la prohibición de la comisión equivale a la obligación de la omisión, según que se den o no se den expectativas positivas (o de la comisión) o expectativas negativas (o de la omisión), tendremos cuatro equivalencias o implicaciones recíprocas, ordenables de nuevo sobre la base de nuestro cuadrado: entre la existencia de expectativas positivas y la de obligaciones (T31), entre la existencia de expectativas negativas y la de prohibiciones (T32), entre la inexistencia de expectativas positivas y la inexistencia de obligaciones (T33) y entre la inexistencia de expectativas negativas y la inexistencia de prohibiciones (T34).

T31 $(x)((\sum y')ASPy'x \equiv (\sum y'')OBLy''x)$	P2, T7, D7
T32 $(x)((\sum y')ASPy'zx \equiv (\sum y'')DIVy''x)$	P2, T5, D8
T33 $(x)(\neg\sum y')ASPy'x \equiv \neg(\sum y'')OBLy''x)$	T31
T34 $(x)\ (\sum y')ASPy'zx \equiv \neg(\sum y'')DIVy''x)$	T32

[7]Adviértase que el contexto monádico de «expectativa» (ASPy) equivale a la suma lógica de la posibilidad de la comisión y de la posibilidad de la omisión de su argumento, o sea de dos figuras (la expectativa positiva y la expectativa negativa) que como se ha mostrado (T27-T30) son incompatibles entre sí. El lenguaje de la teoría de las expectativas es en efecto más pobre que el de la teoría de las modalidades: mientras que «modalidad» es un término de género respecto a las figuras de la permisión positiva o negativa, de la facultad, de la obligación y de la prohibición, «expectativa» es el único término en el cual se declinan todas las figuras del cuadrado correspondiente. En el lenguaje común esto podría provocar equívocos, que quedan excluidos sin embargo en nuestro lenguaje formalizado.



Además, según que no existan expectativas positivas, o que no existan expectativas negativas, o que no exista ningún tipo de expectativa, las modalidades correspondientes consistirán respectivamente en permisiones negativas (T35), en permisiones positivas (T36) y en facultades (T37). Diremos, así, que las facultades comportarán siempre la inexistencia de las expectativas correspondientes, sean ellas positivas o negativas (T38, T39).

$$\text{T35 } (x)(\neg(\textstyle\sum y')ASPy'x \equiv (y'')(MODy''x -> PEMy''z)) \qquad \text{T33, T19, T21, T14}$$

$$\text{T36 } (x)(\neg(\textstyle\sum y')ASPy'zx \equiv (y'')(MODy''x -> PEMy''x)) \qquad \text{T34, T18, T21, T14}$$

T35, T36, T10

$$\text{T38 } (x)((y'')FACy''x -> (\textstyle\sum y')(ASPy'x \ v \ ASPy'zx)) \qquad \text{T37}$$

$$\text{T39 } (x)((y''FACy''x -> (\neg(\textstyle\sum y')ASPy'x \cdot \neg(\textstyle\sum y')ASPy'zx)) \qquad \text{T38}$$

Obviamente, el hecho de que las expectativas sean figuras pasivas que no consisten en, sino que corresponden a modalidades referidas a otros sujetos (y viceversa) no excluye que puedan ser asociadas a modalidades deónticas referidas al mismo sujeto y viceversa. Por ejemplo, el derecho del propietario de hacer uso de la cosa de su propiedad (modalidad) está asociado con el derecho a no ser molestado en tal uso por parte de otros (expectativa); la obligación de pagar el resarcimiento de un daño o de no cometer delitos (modalidad) está asociado a la sujeción a sanciones en caso de desobediencia (expectativa); el derecho de crédito (expectativa) está asociado al derecho de acción (modalidad) que permite su justiciabilidad, etc. Modalidades (activas) y expectativas (pasivas) son efectivamente figuras deónticas por así decirlo *simples* o *atómicas*, las cuales conviven de diversas formas -a veces una de ellas como *garantía* de la otra- en las figuras *complejas* y *moleculares* constituidas por las situaciones jurídicas y en particular por los derechos fundamentales. La modalidad representada por el derecho de acción, por ejemplo, es una garantía (como veremos «secundaria») de la expectativa constituida por el derecho de crédito y de la obligación correspondiente; de la misma manera que, inversamente, la expectativa de la sanción es una garantía (secundaria) de las modalidades consistentes en obligaciones o prohibiciones y de las correspondientes expectativas.

«Expectativa» es en todos los casos, al igual que «modalidad», una noción deóntica. En particular, las expectativas jurídicas son expectativas de efectividad de las normas jurídicas y de las obligaciones y prohibiciones dispuestas o predispuestas por ellas. En el lenguaje común, naturalmente, «expectativa» puede entenderse también en un sentido distinto: en el sentido, sociológico o cognitivo, de previsión de lo que de hecho sucederá (o no sucederá), o mejor de lo que es verosímil (o inverosímil) que pueda suceder. En una sociedad caracterizada por una alta tasa de criminalidad no dejaré abierta la puerta de casa, dado que, aun teniendo la expectativa jurídica de que nadie violará mi domicilio, tengo una realista expectativa de que el domicilio sea de hecho violado por los ladrones. El sentimiento de seguridad jurídica viene dado precisamente por la (máxima) correspondencia entre expectativas normativas y expectativas cognitivas, generada por la existencia de las garantías idóneas.

4. *Los sujetos y las relaciones jurídicas*.- De acuerdo con la caracterización sugerida por el postulado P4, *«sujeto»* es un individuo al que son adscribibles modalidades o expectativas (además de -pero de ello no hablaré en este fragmento de la teoría- comportamientos e intereses). Defino ahora como *«titular»* al sujeto al que son imputadas una «modalidad» o una «expectativa».

D9 *«Titular» es cualquier sujeto de una modalidad o de una expectativa.*

$(z)(y)(TITzy \equiv (SOGzy \cdot (MODy \vee ASPy)))$

Estamos en este punto en condiciones de definir, sobre la base de las tesis de las que disponemos, el concepto de «relación deóntica» entre sujetos. Se ha visto en el parágrafo anterior que a las obligaciones corresponden expectativas positivas (T31) y a las prohibiciones expectativas negativas (T32), mientras que a las facultades no corresponde ninguna expectativa (T39). Estos nexos entre imperativos y expectativas positivas o negativas pueden ahora configurarse como relaciones entre (posiciones de) sujetos distintos, vinculados por la identidad del comportamiento que es realización de unos y otras. De las tesis T31 y T32 se pueden deducir los dos teoremas:

T40 *Decir que un individuo es titular de una expectativa positiva equivale a decir que otro individuo es titular de la obligación correspondiente.*

$$(x)((\sum z')(\sum y')(TITz'y' \cdot ASPy'x) \equiv (\sum z'')(\sum y'')(TITz''y'' \cdot OBLy''x))$$

T31, P3, D9, T21

T41 *Decir que un individuo es titular de una expectativa negativa equivale a decir que otro individuo es titular de la prohibición correspondiente*

$$(x)((\sum z')(\sum y')(TITz'y' \cdot ASPy'zx) \equiv (\sum z'')(\sum y'')(TITz''y'' \cdot DIVy''x)) \quad T40, T24$$

Llamo *«relación deóntica»* a la relación expresada por estos teoremas entre dos sujetos titulares respectivamente de una expectativa positiva y de la obligación correspondiente, o de una expectativa negativa y de la prohibición correspondiente.

D10 *Dos individuos están en relación deóntica entre sí si y sólo si uno de ellos es titular de una expectativa positiva y el otro de la obligación del mismo comportamiento*:

de lo cual deriva, por sustitución, que es una relación deóntica también la que existe entre dos sujetos de los cuales uno es titular de una expectativa negativa y el otro de la prohibición correspondiente:

$$\text{T42 } (z')(z'')(RADz'z'' \equiv (\sum y')(\sum y'')(TITz'y' \cdot TITz''y'' \cdot M(\sum x)(ASPy'zx \cdot DIVy''x)) \qquad \text{D10, T24}$$

De «relación deóntica» se puede por tanto hablar si y sólo si uno de los términos de la relación es una obligación o una prohibición; no, por el contrario, cuando es una facultad, dado que a ésta, como afirma el teorema T39, no le corresponde ninguna expectativa. Enunciaré por tanto, a través de los cuatro siguientes teoremas, dos parejas de relaciones biunívocas: la primera es que, si un sujeto es titular de una expectativa positiva, entonces ese sujeto está en relación deóntica con otro titular de la obligación correspondiente (T43), y viceversa (T44); la segunda es que, si un sujeto es titular de una expectativa negativa, entonces ese sujeto está en relación deóntica con otro titular de la prohibición correspondiente (T45), y viceversa (T46).

$$\text{T43 } (z')(x)((SOGz' \cdot (\sum y')(TITz'y' \cdot ASPy'x)) -> (\sum z'')(\sum y'')(RADz'z'' \cdot TITz''y'' \cdot OBLy''x)) \qquad \text{D10, T40}$$

$$\text{T44 } (z'')(x)((SOGz'' \cdot (\sum y'')(TITz''y'' \cdot OBLy''x)) -> (\sum z')(\sum y')(RADz'z' \cdot TITz'y' \cdot ASPy'x)) \qquad \text{D1O, T40}$$

$$\text{T45 } (z')(x)((SOGz' \cdot (\sum y')(TITz'y' \cdot ASPy'x)) -> (\sum z'')(\sum y'')(RADz'z' \cdot TITz''y'' \cdot DIVy''x)) \qquad \text{T43, T24}$$

$$\text{T46 } (z'')(x)((SOGz'' \cdot (\sum y'')(TITz''y'' \cdot DIVy''x)) -> (\sum z')(\sum y')(RADz'z'' \cdot TITz'y' \cdot ASPy'zx)) \qquad \text{T44, T24}$$

Sobre esta base se podrá construir la categoría de *«relaciones jurídicas»*, identificables con las relaciones deónticas que se dan entre las modalidades y las expectativas consistentes en *«situaciones jurídicas»* -o sea entre las que llamaré *«situaciones activas»*, como los poderes y deberes, y las que llamaré *«situaciones pasivas»*, como los derechos subjetivos y las responsabilidades- en cuanto sus argumentos son no meros comportamientos jurídicamente irrelevantes, sino *«actos jurídicos»* productivos de *«efectos»*. Modalidades y situaciones activas, al afectar a los comportamientos propios de los sujetos que son sus titulares, forman el lado activo de la relación; expectativas y situaciones pasivas, al afectar a comportamientos ajenos, forman, por el contrario, su lado pasivo.

Toda la vida de relación, desde sus formas más simples a las más complejas, es por lo demás interpretable en términos de relaciones deónticas entre expectativas positivas o negativas y obligaciones o prohibiciones correspondientes. Si ordeno a alguien «cierra la puerta» tengo la expectativa de que la cierre. La prohibición «no fumar» genera la expectativa de que nadie fume. La prohibición de matar, sea moral o jurídica, corresponde a la expectativa de no ser matado. La estipulación constitucional de la libertad de manifestación del pensamiento genera la prohibición de la censura o de otras formas de limitación o de impedimento de su ejercicio; de la misma forma como la estipulación del derecho a la asistencia sanitaria o a la educación genera la obligación de proporcionar las correspondientes prestaciones. En todos los casos, las expectativas y los deberes correspondientes, sobre todo si tienen carácter universal *(omnium)* y/o absoluto *(erga omnes)*,valen para fundamentar -tanto en el Derecho como en la moral y en los demás sistemas normativos- la *reciprocidad* de las relaciones deónticas. Al mismo tiempo las relaciones deónticas forman la base de todas las formas -jurídicas y extrajurídicas- de *solidaridad*. El sentimiento de solidaridad, en efecto, no es otra cosa más que el sentimiento de obligatoriedad con el que cada uno advierte las obligaciones y las prohibiciones correspondientes a las expectativas de otros, y que se encuentra con el sentimiento recíproco de confianza en la satisfacción por parte de los demás de las propias expectativas. Es principalmente este sentimiento intersubjetivo de la reciprocidad de las relaciones deónticas lo que sirve para fundamentar la efectividad de cualquier modalidad o expectativa. El mismo equivale, como ahora veremos, al sistema de *garantías* a las que estas modalidades y expectativas están conectadas.

5. *Las garantías*- Como confirmación de lo que se ha dicho en el T43, los teoremas T43-T46 muestran que no hay ninguna prioridad lógica de las modalidades respecto de las expectativas. Se puede desarrollar una teoría del Derecho, y más en general de los sistemas normativos, partiendo de las modalidades (o sea de las figuras deónticas activas) y definiendo a través de estas las expectativas (o sea las figuras deónticas pasivas); pero se puede también desarrollarla partiendo de las expectativas y definiendo, a través de estas, las obligaciones, las prohibiciones y, aunque indirectamente, las facultades. En el primer caso tendremos una teoría del Derecho formulada, como por ejemplo la kelseniana, principalmente en términos de imperativos (o de deberes); en el segundo una teoría del Derecho formulada, como la que trato de desarrollar, prevalentemente en términos de expectativas (o de derechos). Lo mismo se puede decir del ordenamiento objeto de la teoría:

las normas pueden formularse en términos de obligaciones y prohibiciones, esto es como normas imperativas, o bien en términos de expectativas, esto es como normas atributivas. Entre las dos cosas no hay ninguna diferencia. Lo que es argumento de expectativa, en efecto, es debido a alguien o a todos por parte de alguno o de todos; de la misma forma que lo que es argumento de deber corresponde a una expectativa de todos o de alguno frente a todos o frente a alguno.

De hecho el lenguaje legal hace uso de ambas formulaciones. Las normas en términos de expectativas están más difundidas en los textos constitucionales, y esto justifica la opción por formular en términos de expectativas la teoría del Estado de Derecho y de la democracia. Son por ejemplo expectativas positivas o negativas los derechos de libertad, el *habeas corpus*, los derechos de las minorías lingüísticas, el derecho de huelga, el derecho al trabajo, los derechos a la salud, a la educación, a la retribución equitativa y similares, establecidos en la primera parte de la constitución italiana. Por el contrario, las normas imperativas están más difundidas en la legislación ordinaria, y en particular en la penal, formada por prohibiciones de comportamiento sancionados como delitos. En cuanto al Derecho civil, éste se expresa tanto en términos de expectativas (o sea de derechos), como en términos de obligaciones.

Las razones de estos diversos estilos legislativos son evidentemente tanto de carácter técnico como de carácter político. Las constituciones privilegian las formulaciones en términos de «derechos», o sea de expectativas, dejando de ordinario sobreentendidas las prohibiciones y las obligaciones correspondientes, en cuanto que nacen como solemnes convenciones dirigidas a proclamar inmunidades, libertades y pretensiones de tutela o satisfacción de necesidades fundamentales a cargo de los poderes públicos y para fundamentar sobre estas promesas la legitimación política de los ordenamientos. Las leyes penales privilegian por el contrario las formulaciones en términos de prohibiciones y dejan sobreentendidas las correlativas expectativas negativas de inmunidades, en cuanto se vinculan al respeto del principio de taxatividad en la configuración de los comportamientos que son violaciones de estas expectativas. Las normas civiles, en fin, bien pueden formularse tanto en términos de derechos como de obligaciones, a causa del carácter de ordinario simétrico de las posiciones de sus titulares y de la forma horizontal y paritética de sus relaciones deónticas.

Sea cual sea la técnica de formulación adoptada, expectativas y modalidades imperativas, como muestran las tesis T43-T46, se implican recíprocamente como posiciones de sujetos distintos en relación deóntica entre sí. Al ser las expectativas positivas y negativas de un sujeto respectivamente la otra cara de la obligación o de la prohibición imputadas a otro sujeto y viceversa, no se dan pues, en el plano técnico, expectativas sin obligaciones o prohibiciones correspondientes, y ni siquiera obligaciones y prohibiciones sin las correspondientes expectativas. En el plano práctico esto quiere decir que la estipulación de un derecho, al consistir siempre como veremos en su momento en la atribución de una expectativa, exige que sea identificable el sujeto titular del deber correspondiente; y que por tanto, aunque las constituciones sean charlatanas en las promesas de derechos, estas promesas son serias, es decir lógicamente consistentes, únicamente si van acompañadas por la identificación de los correlativos deberes y de los sujetos, públicos o privados, a los que se imputan estos deberes. Lo mismo debe decirse de las responsabilidades y de las anulabilidades, que son, también ellas expectativas (de sanción y de anulación) cuya consistencia depende de la predeterminación de los sujetos obligados a declararlas. Podemos en efecto demostrar -sobre la base de una definición semántica de «efectividad» como la comisión de comportamientos que obedecen a una obligación o satisfacen una expectativa positiva y como la omisión de los comportamientos que violan una prohibición o una expectativa negativa- que una expectativa es efectiva si y sólo si es obedecida la obligación o no desobedecida la correspondiente prohibición, siendo su satisfacción o su violación respectivamente equivalente a la obediencia del uno y a la desobediencia del otro[8].

Analizaré ampliamente, en el curso de la teoría, la estructura de las diversas situaciones jurídicas y, en relación con las relaciones deónticas que se dan entre sus titulares, las diversas técnicas y condiciones que aseguran su efectividad. Estas condiciones, podemos sin embargo afirmar desde ahora, no son otra cosa más que las *«garantías»*, que por ello representan las figuras centrales de la teoría que trato de desarrollar. Esas garantías serán divididas, con relación al Derecho, en dos clases: por un lado las *«garantías primarias»*, las cuales consisten, en relación con las expectativas positivas y las negativas que como veremos forman los contenidos de los derechos subjetivos, en las obligaciones y en las prohibiciones implicadas por ellos, como afirman las tesis T43 e T45, por lo que hace a los sujetos en relación deóntica con sus titulares; por otro lado las *«garantías secundarias»*, que consisten en las obligaciones (de aplicar la sanción o de declarar la anulación)

---

[8] Definida «realización» como el comportamiento que forma el argumento de una modalidad o de una expectativa, será posible definir como «efectivas» las facultades, las obligaciones y las expectativas positivas de las cuales se da la realización, así como las prohibiciones y las expectativas de las cuales no se da la realización; e, inversamente, será posible definir como «inefectivas» las prohibiciones y las expectativas negativas de las que se da la realización así como las facultades, las obligaciones y las expectativas positivas de las que no se da la realización. Allí donde las modalidades y las expectativas sean reglas, será preciso además hablar de «grado de efectividad (o de inefectividad) en el tiempo *t*» de acuerdo con el número de sus realizaciones o de sus no realizaciones en el tiempo *t*.

correspondientes a las expectativas positivas que forman el contenido de la sancionabilidad y de la anulabilidad generadas, como efectos específicos, respectivamente por los actos ilícitos y por los actos inválidos. También las garantías secundarias, como veremos en su momento, reenvían a relaciones jurídicas: precisamente a las relaciones entre las obligaciones (por lo que hace a órganos judiciales) y las correlativas expectativas positivas (de aplicación de la sanción o de declaración de la anulación) producidas por la desobediencia de las obligaciones o de las prohibiciones en las que consisten las garantías primarias. La diferencia entre las dos clases de garantía -que justifica la calificación de la primeras como «primarias» y de las segundas como «secundarias», así como la calificación como «primarias» y como «secundarias» de las normas que respectivamente las prevén- se encuentra sin embargo en el hecho de que mientras que la obediencia de las primeras equivale siempre a la satisfacción en vía primaria de los derechos garantizados, la de las segundas entra en acción eventualmente, como remedio prestado por el ordenamiento para prevenir o reparar la desobediencia de las primeras por obra de actos ilícitos o de actos inválidos.

Defino pues las *garantías* sobre la base de las relaciones deónticas identificables entre expectativas y modalidades en el interior de cualquier sistema normativo. Entenderé en efecto con esta expresión las modalidades imperativas de cuya obediencia depende la satisfacción o la no violación de las expectativas que son su argumento.

D11 *«Garantía» es la obligación correspondiente a la expectativa positiva que es su argumento*.

$$(y'')(y')(\mathrm{GAR}y''y' \equiv \mathrm{M}(\sum x)(\mathrm{OBL}y''x \cdot \mathrm{ASP}y'x))$$

Deriva de ello que también es una garantía la prohibición correspondiente a la expectativa negativa que es su argumento (T47); de forma que, en su conjunto, las garantías equivalen a la suma de las obligaciones y de las prohibiciones correspondientes a las expectativas de que se trate (T48).

$$\mathrm{T47}\ (y'')(y')(\mathrm{GAR}y''y' \equiv \mathrm{M}(\sum x)(\mathrm{DIV}y''x \cdot \mathrm{ASP}y'zx)) \qquad \mathrm{D11, T24}$$

$$\mathrm{T48}\ (y'')(y')(\mathrm{GAR}y''y' \equiv \mathrm{M}(\sum x)((\mathrm{OBL}y''x \cdot \mathrm{ASP}y'x)\ \mathrm{v}\ (\mathrm{DIV}y''x \cdot \mathrm{ASP}y'zx))) \qquad \mathrm{D11, T47}$$

Podemos llamar *«garantías positivas»* a las garantías que consisten en obligaciones y *«garantías negativas»* a las que consisten en prohibiciones. Precisamente, las obligaciones *son* las garantías positivas de las correspondientes expectativas positivas (T49) y las prohibiciones *son* las garantías negativas de las correspondientes expectativas negativas (T50). Inversamente, las expectativas positivas *tienen* siempre su garantía en la obligación correspondiente (T5l), y las negativas la *tienen* siempre en la prohibición correspondiente (T52). Y puesto que la relación entre expectativas y las correspondientes modalidades imperativas es la relación deóntica entre los sujetos que son titulares de las unas y de las otras, las garantías no son otra cosa más que el lado activo, o sea las modalidades, de las relaciones deónticas de las que las expectativas garantizadas son el lado pasivo (T54), y viceversa (T55).

$$\text{T49 } (y'')(M(\sum x)OBLy''x -> (\sum y')(GARy''y' \cdot M(\sum x)ASPy'x)) \quad \text{D11, T31}$$

$$\text{T50 } (y'')(M(\sum x)DIVy''x -> (\sum y')(GARy''y' \cdot M(\sum x)ASPy'zx)) \quad \text{T47, T32}$$

$$\text{T51 } (y'')(M(\sum x)ASPy'x -> (\sum y'')(GARy''y' \cdot M(\sum x)OBLy''x)) \quad \text{D11, T31}$$

$$\text{T52 } (y')(M(\sum x)ASPy'zx -> (\sum y'')(GARy''y' \cdot M(\sum x)DIVy''x)) \quad \text{T47, T32}$$

$$\text{T53 } (y')(y'')(GARy''y' \equiv M(\sum z'')(OBLy''x \text{ v } DIVy''x)) \quad \text{T48, T49, T50}$$

$$\text{T54 } (y'')(y')(GARy''y' -> (\sum z'')(\sum z'')(MODy'' \cdot TITz''y'' \cdot RADz'z \cdot TITz'y' \cdot ASPy')) \quad \text{P3, D9, T21, D10, D11}$$

¿Pero qué quiere decir que una expectativa implica siempre como garantía la obligación por parte de otro sujeto de satisfacerla o la prohibición de no violarla? Quiere decir, simplemente, que las garantías realizan, a nivel teórico, la *completitud deóntica* del sistema. De hecho, sin embargo, en un sistema nomodinámico como el derecho positivo esta completitud puede faltar. Es muy posible, al no ser el nuestro un mundo deónticamente perfecto, que una norma jurídica atribuya una expectativa bajo la forma de derecho subjetivo sin indicar los sujetos obligados a satisfacerla: es el caso, por ejemplo, de los derechos «al trabajo» y a «la salud» enunciados por los artículos 4 y 32 de la constitución italiana. En este caso tenemos un contraste entre la teoría y el sistema deóntico que constituye su objeto. La ausencia de garantías se resuelve, en efecto, en una *laguna deóntica* que en el plano teórico parecería no permitir, hasta que no sea colmada, hablar de expectativa, ni por tanto de «derecho subjetivo». Pero donde esté previsto por una norma jurídica positiva, como en los ejemplos que acabamos de poner, un derecho subjetivo, y por tanto una expectativa, jurídicamente existe, y no puede ciertamente ser ignorado por la teoría. Se sigue de ello que la laguna *debe ser* resuelta por alguien -intérprete o legislador. Y es precisamente en este deber ser de su solución donde reside la obligación implicada por el derecho proclamado: que es una relación por así decir de segundo grado, dado que opera sobre el intérprete y/o el legislador como «obligación de obligar», o sea de introducir la modalidad imperativa que forma la garantía que falta.

Se pone de manifiesto de tal forma, a través de esta aporía, el carácter (no meramente descriptivo sino) normativo que tiene la teoría en relación con los sistemas nomodinámicos y en particular con el Derecho positivo: las lagunas deónticas, de forma no distinta de las antinomias, señalan la existencia de contradicciones que exigen, si queremos tomarnos el Derecho en serio, ser removidas por vía de interpretación o de legislación. Pero se pone de manifiesto también el papel garantista del Derecho positivo en relación con aquellas expectativas universales *(omnium)* que en su momento llamaré «derechos fundamentales». La estipulación normativa de tales derechos equivale en efecto a la imposición de la formalización de las prohibiciones y de las obligaciones correspondientes a ellos en el interior de ese sistema de sujetos, de aparatos y de funciones que forma, como veremos en su momento, la *esfera pública* del Estado de Derecho. Sin el Derecho penal, o sea sin la prohibición y el castigo como delitos del homicidio, de las lesiones personales y del hurto, no existiría garantía de los derechos a la vida o a la integridad personal o del derecho de propiedad. Sin leyes en materia sanitaria o de educación obligatoria no existiría garantía de los derechos a la salud y a la educación. A causa del carácter nomodinámico del Derecho positivo, prohibiciones y obligaciones correspondientes a los derechos, aun siendo deducibles en el plano teórico de la enunciación de estos últimos, no lo son sin embargo en el plano jurídico, en el que su existencia depende de su positiva estipulación normativa.

Volveré más veces, en el curso de la teoría, sobre esta cuestión, decisiva para comprender la estructura y la dinámica del Derecho moderno. Aquí importa subrayar que la identificación normativa de ambos sujetos de las relaciones deónticas -tanto de los titulares de las expectativas como de los titulares de las modalidades correspondientes- viene impuesta como condición de consistencia, incluso antes que de efectividad, de cualquier figura deóntica. Estos sujetos, como veremos analíticamente a propósito de las diversas situaciones jurídicas, pueden ser bien «todos», bien «algunos». Dividiré por tanto, en la tercera parte de la teoría, las modalidades y la expectativas jurídicas en *«universales»* (u *omnium*), en cuanto corresponden de la misma forma a todos, como por ejemplo los derechos fundamentales y las prohibiciones penales; *«existenciales»* (o *singuli*), en cuanto corresponden a individuos. como por ejemplo los derechos y las obligaciones patrimoniales; *«absolutas»* (o *erga omnes*), en cuanto corresponden frente a todos, como por ejemplo el derecho a la vida y el derecho de propiedad; *«relativas»* (o *erga singulum*), en cuanto atañen frente a individuos, como los derechos de crédito y las deudas correspondientes. La estructura de todo sistema normativo, y de forma particularmente articulada la de los ordenamientos jurídicos, resultará caracterizada como una red compleja de relaciones deónticas, horizontales y verticales, cuyos desgarros están representados por las lagunas deónticas por obra de las cuales las relaciones deónticas están interrumpidas por defecto de identificación de alguno de sus términos.

He llamado por lo demás *lagunas deónticas* a las lagunas generadas por la carencia de *garantías* en general para distinguirlas de otro tipo de lagunas:

las que llamaré lagunas jurídicas y que consisten, por el contrario, en la carencia de los presupuestos normativos u organizativos de las que he llamado antes garantías secundarias: como la previsión normativa de sanciones para los actos ilícitos y de anulación para los actos inválidos, la existencia de órganos encargados de su aplicación, el poder o el deber de actuar a tal fin en juicio; en una palabra, la justiciabilidad de las violaciones jurídicas de las expectativas y de los correlativos imperativos que forman sus garantías deónticas. Se trata, como veremos en su momento, de un tipo de garantías (y en su ausencia, de lagunas) común a todas las situaciones y, en particular, a todos los derechos subjetivos, tanto patrimoniales como fundamentales: a los que consisten en expectativas positivas (como los derechos de crédito y los derechos sociales), pero también a los que consisten en facultades y/o en expectativas negativas (como los derechos de propiedad y de libertad), garantizados de la misma forma por un lado por el derecho de acción y por el otro por la expectativa de sanciones o de anulación en caso de desobediencia de las correspondientes prohibiciones de lesiones.

Obviamente las lagunas deónticas son más radicales, y por ello más intolerables, que las lagunas jurídicas. Si en efecto son «imperfectos» los imperativos sin sanciones y los derechos sin acción, son sin más inconsistentes las expectativas sin los correspondientes imperativos. Esto depende del hecho de que las lagunas deónticas tienen carácter lógico, de forma que la existencia de los imperativos correspondientes a las expectativas establecidas por el Derecho, así como de los sujetos que son titulares de las mismas, ha de ser en la medida de lo posible reconocida e integrada también por vía de interpretación, so pena de afirmar, en una vía de principio contraria al carácter vinculante del Derecho mismo, su inconsistencia. Las lagunas jurídicas, por el contrario, son lagunas de Derecho positivo, en el sentido de que los presupuestos de las garantías jurídicas que faltan -desde el derecho de acción a la misma existencia de una jurisdicción que tenga a su cargo la imposición de la sanción o de la anulación- no son implicadas lógicamente por las expectativas garantizadas, sino producidas por actos normativos de Derecho positivo. En ambos casos, el carácter en todo caso normativo de las expectativas carentes de garantías, a la vez que tiene el riesgo de condenarlas a la inefectividad, genera antinomias que, al manifestarse en incumplimientos ilegítimos, imponen a los operadores por una parte y a la doctrina jurídica por otra, intervenciones reparadoras, de tipo legislativo o sólo interpretativo, dirigidas a colmar o por lo menos a reducir las lagunas. Ésta es precisamente, en el Estado constitucional de Derecho, la tarea principal tanto de la práctica jurídica como de la ciencia del Derecho.

(Trad. de Ángeles Ródenas y Juan Ruiz Manero)

APÉNDICE

El cálculo

El lenguaje de la teoría axiomatizada del Derecho *(LT)* es un lenguaje formalizado, que tiene todas las propiedades formales establecidas por las reglas que aquí se enumeran seguidamente y sólo estas propiedades. Tales reglas no pertenecen a la teoría y no son formuladas en el lenguaje teórico. Son más bien expresiones meta-teóricas, formuladas en un meta-lenguaje no formalizado, que determinan la estructura sintáctica de la teoría, esto es la *sintaxis* (o *lógica*) del lenguaje teórico. Se dividen en dos clases: las *reglas de formación* y las *reglas de transformación*.

En base a estas reglas serán formuladas en este apéndice, en el orden en el que han sido introducidas y con la enumeración progresiva adoptada en el texto, todas las tesis aquí propuestas: las tesis primitivas o indemostrables (postulados y definiciones), formadas sobre la base de las reglas de formación, y las tesis no primitivas o demostradas (teoremas), obtenidas en base a las reglas de transformación. La *«demostración»* de cada una de esta segunda clase de tesis consistirá en una sucesión finita de expresiones, dispuestas en líneas distintas y numeradas, a cuya derecha se escribirá la motivación, esto es si se trata de una premisa (postulado o definición o teorema) o del resultado de la aplicación de una o más reglas a expresiones de las líneas precedentes: en este último caso se escribirán primero los números de la línea o de las líneas en las que se encuentran las expresiones a las que son aplicadas las reglas, y después el nombre de la regla o de las reglas utilizadas para llevar a cabo su trasformación; la última línea de la demostración es la expresión demostrada. En los casos en los que la demostración sea particularmente simple, me limitaré a enunciar la tesis demostrada, escribiendo junto a ella sus premisas y las reglas de transformación aplicadas a ellas. Es evidente que la relevancia teórica de toda tesis se manifestará en el número y en la relevancia de las tesis que directa o indirectamente la suponen como premisa.

Las reglas del lenguaje de la teoría

1. *Reglas de formación*- Las reglas de formación establecen los *signos* admitidos en el lenguaje teórico y el modo en que los mismos pueden combinarse para dar lugar a *expresiones* bien formadas. Se distinguen entre ellas dos grupos: las que enumeran los *signos* pertenecientes al lenguaje teórico y las que prescriben la forma correcta de las *expresiones* que pueden construirse con los diversos tipos de signos.

1.1. *Signos*.- Los signos son los elementos básicos del lenguaje de la teoría. A fin de facilitar el cálculo determinado por las reglas de transformación, los signos se representan por *símbolos*. Se dividen en *signos descriptivos* y en *signos lógicos*.

1.1.1. *Signos descriptivos*.- Los signos descriptivos son signos cargados de significado. Se dividen en *signos subjetivos* y en *signos predicativos*.

1.1.1.1. *Signos subjetivos*.- Los signos subjetivos, o *sujetos*, designan «individuos». Adopto como signos subjetivos las *variables subjetivas*, representadas simbólicamente por letras minúsculas (x, y, z, x, x''...; y', y'',...; z', z'',...) eventualmente marcados, donde se han interpretado en un dominio de acciones, por el functor z, de forma que se puede decir que una variable de forma *x* denota la «comisión de la acción *x*», mientras que una variable de forma *zx* denota la «omisión de la acción *x*».

1.1.1.2. *Signos predicativos*.- Los signos predicativos, o *predicados*, o *constantes predicativas*, designan «propiedades» de individuos o «relaciones» entre individuos. Son los *términos* en sentido propio del vocabulario de la teoría. Algunos se introducen como *primitivos*; todos los demás son introducidos mediante *definiciones*. Su número total está destinado a aumentar con el desarrollo de la teoría, a medida que van siendo estipuladas nuevas definiciones. Adopto aquí, como signos predicativos, catorce términos, representados por las tres letras mayúsculas por las que empieza su nombre:

PER = permiso	primitivo
MOD = modalidad	primitivo
ASP = expectativa	primitivo
SOG = sujeto	primitivo
FCO = facultativo	D1
VIE = prohibido	D2
OBB = obligatorio	D3
PEM = permisión	D4,D5
FAC = facultad	D6
OBL = obligación	D7
DIV = prohibición	D8
TIT = titular	D9
RAD = relación deóntica	D10
GAR = garantía	D11

1. 1.2. *Signos lógicos*.- Los signos lógicos son signos carentes de significado que operan, en base a las reglas de transformación más adelante indicadas, sobre los signos descriptivos combinados en enunciados simples

(1.2.1), dando lugar a enunciados compuestos (1.2.2) o a proposiciones (1.2.3). Se dividen en *signos conectivos* y en *signos operadores*.

1.1.2.1. *Signos conectivos*.- Los signos conectivos son los signos mediante los cuales las expresiones del tipo indicado en 1.2.1 se combinan entre sí para la formación de los enunciados compuestos indicados en 1.2.2. Adopto como conectivas estos cinco símbolos:

«¬ » = «no»	(negación)
«A» = «y»	(conjunción)
«v» = «o»	(disyunción)
«− >» «si... entonces»	(implicación)
«≡ » = «...si y sólo si»	(equivalencia)

1.1.2.2. *Signos operadores*.- Los signos operadores se distinguen en *operadores de cuantificación* y en *operadores modales*.

1.1.2.2.1. Los operadores de cuantificación, o *cuantificadores* son signos que operan sobre expresiones del tipo indicado en 1.2.1 y en 1.2.2 trasformándolas en las proposiciones indicadas en 1.2.3. Se expresan por medio de dos símbolos: «(x)» = «para todo x vale que...» (cuantificador universal) y «(Ǝx)» = «existe al menos un x tal que» (cuantificador existencial).

1.1.2.2.2. Los *operadores modales* son signos que operan sobre expresiones del tipo indicado en 1.2.3. Se expresan por medio de los símbolos: M = «es posible que» y L = «es necesario que»

1.2. *Expresiones*.- Las expresiones son combinaciones de signos. Se distinguen tres tipos de expresiones «bien formadas», que subyacen a otras tantas reglas de formación: los *enunciados simples*, los *enunciados compuestos* y las *proposiciones*.

1.2.1. *Enunciados simples*.- Los enunciados simples, o *contextos*, son expresiones formadas por una constante predicativa (functor) seguida por un cierto número de variables subjetivas (argumentos). Si el predicado es functor de un solo argumento él mismo designa una «propiedad» de él y se llama *monádico*; si por el contrario es functor de dos o tres o cuatro o más argumentos, designa la«relación» binaria, o ternaria o cuaternaria que se da entre ellos, y se llama *diádico*, o *triádico* o *tetrádico* o, más genéricamente, *poliádico*. Son enunciados simples bien formados, por ejemplo, contextos como *OBBx*, que se lee «*x* es obligatorio»; *OBLyx*, que se lee «*y* es obligación de *x*»; *SOGzy*, que se lee «*z* es sujeto de *y*».Por simplicidad, convengo sin embargo en emplear, en la presente teoría, únicamente predicados monádicos o diádicos.

1.2.2. *Enunciados compuestos*.- Los enunciados compuestos son enunciados que resultan de una *conexión* de enunciados simples mediante los signos conectivos. Son también llamados *funciones enunciativas*, dado que *su valor de verdad*, esto es su verdad o falsedad, depende del valor de verdad de las expresiones que los componen. Para indicar los enunciados parciales y a su vez compuestos que los componen, usaré el paréntesis redondo «(» y «)»: como, por ejemplo, en expresiones del tipo «$VIEx->(PERzx \cdot \neg PERx)$», que se lee «si x es prohibido, entonces está permitida su omisión y no está permitida su comisión».

1.2.3. *Proposiciones*.- Las proposiciones o *tesis* son expresiones resultantes de la aplicación a un enunciado de un *operador de cuantificación y* eventualmente de un *operador modal*. Son las únicas expresiones de las cuales es posible la *verificación empírica*, esto es de las cuales tiene sentido decir que son verdaderas o falsas. Tienen formas del tipo: $(x)(PERx \vee PERzx)$, $(x)(3y')ASPy'x$ / $(3y'')OBLy''x)$ o $(y')(M(\sum x)ASPy'x->(\sum y'')(GARy''y' \cdot M(\sum x)OBLy''x))$, que respectivamente se leen: «para todas las x vale que: o x es permitida o no-x es permitida», «para todas las x vale que: decir que existe una y' que es su expectativa equivale a decir que existe una y'' que es su obligación correspondiente», y «para todas las y', si y' es expectativa de x, entonces tiene como garantía una y'' que es la obligación a ella correspondiente».

2. *Reglas de transformación*.- Las reglas de transformación, o reglas lógicas, establecen el conjunto de las *operaciones* -o *cálculo*- que pueden ser llevadas a cabo sobre las expresiones formadas en base a las reglas de formación. A diferencia de las expresiones teóricas, las fórmulas con las que se expresan carecen de sentido, siendo meras tautologías, lógicamente verdaderas cualquiera que sea el valor de verdad asociado a las expresiones que las componen.

La función de tales reglas es la de determinar las relaciones formales que por medio de los signos lógicos, cuyo uso caracterizan, pueden ser válidamente instituidas entre las expresiones; y por ello permitir la derivación de proposiciones verdaderas de otras proposiciones precedentemente aceptadas como verdaderas. Estas últimas proposiciones se llaman, una y otra vez, *premisas*; la proposición derivada se llama *conclusión* o *teorema*; la serie de las operaciones que conducen de las premisas a la conclusión se llama *demostración*. Puesto que todas las proposiciones de la teoría no introducidas axiomáticamente como postulados o como definiciones son teoremas demostrados en base a premisas, esto es a postulados o a definiciones o a teoremas ya demostrados de forma análoga, la aceptación de los postulados y de las definiciones comporta la aceptación de la verdad de todas las demás tesis de la teoría.

Distinguiré las reglas de transformación en tres clases: las del *cálculo de enunciados*, las del *cálculo de predicados*, y las del *cálculo modal*. Proporcionaré para cada una de las mismas los *axiomas* y las *reglas de inferencia*, escogidos de forma que satisfagan tres requisitos: la *independencia*, es decir su no demostrabilidad en base a otros axiomas o reglas; la *coherencia*, es decir la no demostrabilidad en base a ellas de una expresión y de su negación; la *completitud*, es decir la demostrabilidad en base a ellas de todas las expresiones lógicamente válidas. Para facilitar y simplificar el cálculo, emplearé después, además de los axiomas y de las reglas en principio suficientes para los fines de las demostraciones, también una serie de leyes lógicas derivadas de ellas.

2.1. *Reglas del cálculo de enunciados*.- Adopto como axiomas y como reglas de inferencia del cálculo de enunciados los quince axiomas del sistema de Hilbert y Bernays, idóneos para caracterizar el comportamiento de las cinco conectivas, así como las reglas llamadas de la sustitución y del reemplazo. Añado cinco grupos de leyes, derivadas de los axiomas y de las reglas ya dichas y relativas ellas también al uso de las cinco conectivas.

2.1.1. *Axiomas de la lógica de los enunciados.*

A1.1. $p -> (q -> p)$

A1.2 $(p-> (p-> q))-> (p-> q)$

A1.3 $(p-> q)-> ((q-> m)-> (p-> m))$

A2.1 $(p \cdot q)-> p$

A2.2 $(p \cdot q)-> q$

A2.3 $(p-> q)-> ((p-> m)-> (p-> (q \cdot m))$

A3.1 $p-> (p \vee q)$

A3.2 $q-> (p \vee q)$

A3.3 $(p-> m)-> ((q-> m)-> ((p \vee q)-> m))$

A4.1 $(p \equiv q)-> (p-> q)$

A4.2 $(p \equiv q)-> (q-> p)$

A4.3 $(p-> q)-> ((q-> p)-> (p \equiv q))$

A5.1 $(p-> q)-> (\neg q-> \neg p)$

A5.2 $p-> \neg\neg p$

A5.3 $\neg\neg p-> p$

2.1.2. *Reglas de inferencia*

SOS (Regla de sustitución): Sustituyendo simultáneamente en una expresión válida H todas las menciones de una misma variable subjetiva con la misma variable subjetiva, se obtiene una nueva expresión válida *H'*, equivalente a *H*.

RIM (Regla del reemplazo): Reemplazando en el interior de una misma expresión *H* una cierta expresión *Z* con una nueva expresión *E* de la que ya sea conocida su equivalencia con *Z*, se obtiene una expresión *H'* equivalente a la expresión dada *H*.

2.1.3. *Leyes lógicas.*

L1.1 $(p \cdot p) \equiv p$
L1.2 $(p \cdot q) \equiv (q \cdot p)$
L1.3 $(p \cdot (q \cdot m)) \equiv ((p \cdot q) \cdot m)$
L1.4 $(p \cdot (q \lor m)) \equiv ((p \cdot q) \lor (p \cdot m))$
L1.5 $(p \lor p) \equiv p$
L1.6 $(p \lor q) \equiv (q \lor p)$
L1.7 $p \lor \neg p$
L1.8 $(p \cdot q) \equiv \neg(\neg p \lor \neg q)$
L1.9 $\neg(p \lor q) \equiv (\neg p \cdot \neg q)$

L2.1 $(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \lor q)$
L2.2 $(p \rightarrow q) \equiv \neg(p \cdot \neg q)$
L2.3 $(\neg p \rightarrow q) \equiv (p \lor q)$
L2.4 $(p \rightarrow \neg q) \equiv (\neg p \lor \neg q)$
L2.5 $(p \rightarrow \neg q) \equiv \neg(p \cdot q)$
L2.6 $(p \rightarrow \neg q) \equiv (q \rightarrow \neg p)$
L2.7 $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (p \cdot q))$
L2.8 $((p \rightarrow q) \cdot p) \rightarrow q$
L2.9 $((p \rightarrow q) \cdot \neg q) \rightarrow \neg p$

L3.1 $((p \rightarrow q) \cdot (q \rightarrow m)) \rightarrow (p \rightarrow m)$
L3.2 $((p \cdot m) \rightarrow q) \rightarrow ((p \cdot m) \rightarrow (q \cdot m))$
L3.3 $(p \rightarrow ((q \cdot m) \lor (n \cdot r))) \rightarrow (p \rightarrow (q \lor n))$
L3.4 $(p \rightarrow (q \cdot m)) \equiv ((p \rightarrow q) \cdot (p \rightarrow m))$
L3.5 $(p \rightarrow (q \cdot m)) \rightarrow (p \rightarrow q)$
L3.6 $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \cdot m) \rightarrow q)$
L3.7 $((p \lor q) \rightarrow m) \equiv ((p \rightarrow m) \cdot (q \rightarrow m))$
L3.8 $((p \lor q) \rightarrow m) \rightarrow (p \rightarrow m)$
L3.9 $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (q \lor m))$

L4.1 $(p \rightarrow (q \lor m)) \equiv ((p \cdot \neg q) \rightarrow m)$
L4.2 $((p \cdot q) \rightarrow m) \equiv (p \rightarrow (q \rightarrow m))$
L4.3 $((p \cdot q) \rightarrow m) \equiv (q \rightarrow (p \rightarrow m))$
L4.4 $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \cdot m) \rightarrow (q \cdot m))$
L4.5 $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \lor m) \rightarrow (q \lor m))$
L4.6 $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (m \rightarrow q))$
L4.7 $(p \rightarrow (q \rightarrow m)) \equiv (q \rightarrow (p \rightarrow m))$
L4.8 $((p \rightarrow q) \cdot (m \rightarrow n)) \rightarrow ((p \cdot m) \rightarrow (q \cdot n))$
L4.9 $((p \rightarrow q) \cdot (m \rightarrow n)) \rightarrow ((p \lor m) \rightarrow (q \lor n))$

L5.1 $(p \equiv q) \equiv (\neg p \equiv \neg q)$

L5.2 $(p \equiv \neg q) \equiv (q \equiv \neg p)$
L5.3 $(p \equiv q) \equiv ((p \text{->} q) \cdot (q \text{->} p))$
L5.4 $((p \equiv q) \cdot (q \equiv m)) \text{->} (p \equiv m)$
L5.5 $(p \equiv q) \text{->} ((p \cdot m) \equiv (q \cdot m))$
L5.6 $(p \equiv q) \text{->} ((p \vee m) \equiv (q \vee m))$
L5.7 $(p \equiv q) \text{->} ((p \equiv m) \equiv (q \equiv m))$
L5.8 $((p \equiv q) \cdot (m \equiv n)) \text{->} ((p \cdot m) \equiv (q \cdot n))$
L5.9 $((p \equiv q) \cdot (m \equiv n)) \text{->} ((p \vee m) \equiv (q \vee n))$

2.2. *Reglas de la lógica de predicados*

2.2.1. *Axiomas de la lógica de predicados*.- Adopto como axiomas del cálculo de predicados dos axiomas y dos reglas, que caracterizan el uso de los dos cuantificadores; y como leyes lógicas cuatro grupos de tesis relativas respectivamente a su negación, distribución, limitación e implicación:

A6 (EU) $(x)Px -> Px$ (ejemplificación universal)

A7 (GE) $Px -> (\sum x)Px$ (generalización existencial)

A8 (EE) $(\sum x)Px -> Px$ (ejemplificación existencial)

A9 (GU) $Px -> (x)Px$ (generalización universal)

Las reglas A8 y A9 son aplicables con dos órdenes de restricciones: la EE sólo si la variable liberada en base a ella viene después sucesivamente cuantificada con la aplicación de la GE; la GU sólo si la variable cuantificada en base a ella había sido anteriormente liberada con la aplicación de la EU.

2.2.3. *Leyes lógicas*

L6.1 $(x)Px \equiv \neg(\Sigma x)\neg Px$
L6.2 $(x)\neg Px \equiv \neg(\Sigma x)Px$
L6.3 $\neg(x)Px \equiv (\Sigma x)\neg Px$
L6.4 $\neg(x)\neg Px \equiv (\Sigma x)Px$

L7.1 $(x)(Px \cdot Qx) \equiv ((x)Px \cdot (x)Qx)$
L7.2 $(\Sigma x)(Px \cdot Qx) \text{->} ((\Sigma x)Px \cdot (\Sigma x)Qx)$
L7.3 $(\Sigma x)(Px \vee Qx) \equiv ((\Sigma x)Px \vee (\Sigma x)Qx)$
L7.4 $((x)Px \vee (x)Qx) \text{->} (x)(Px \vee Qx)$
L7.5 $((\Sigma x)Px \text{->} (x)Qx) \text{->} (x)(Px \text{->} Qx)$
L7.6 $(x)(Px \text{->} Qx) \text{->} ((x)Px \text{->} (x)Qx)$
L7.7 $(x)(Px \text{->} Qx) \text{->} ((\Sigma x)Px \text{->} (\Sigma x)Qx)$
L7.8 $((\Sigma x)Px \text{->} (\Sigma x)Qx) \text{->} (\Sigma x)(Px \text{->} Qx)$
L7.9 $(x)(Px \equiv Qx) \text{->} ((\Sigma x)Px \equiv (\Sigma x)Qx)$

L8.1 $(x)(P \cdot Qx) \equiv (P \cdot (x)Qx)$
L8.2 $(\Sigma x)(P \cdot Qx) \equiv (P \cdot (\Sigma x)Qx)$
L8.3 $(x)(P \vee Qx) \equiv (P \vee (x)Qx)$
L8.4 $(\Sigma x)(P \vee Qx) \equiv (P \vee (\Sigma x)Qx)$

L8.5 (x)(P -> Qx) ≡ (P -> (x)Qx)
L8.6 (Σx)(P -> Qx) ≡ (P -> (Σx)Qx)
L8.7 (x)(Qx -> P) ≡ ((Σx)Qx -> P)
L8.8 (Σx)(Qx -> P) ≡ ((x)Qx -> P)
L8.9 (Σx)(Px·Qx) -> (Σx)Px

2.3. *Reglas de la lógica modal*.- Adopto como axiomas del cálculo modal, idóneos para caracterizar el comportamiento de los dos operadores modales, seis axiomas -de los que los cinco primeros corresponden al sistema *S5* de G. E. Hughes y M. J. Cresswell, y el sexto a la fórmula de R. C. Barcan. Añado un séptimo axioma (A/6), que es un axioma específico de la presente teoría y que equivale en realidad a un esquema de postulado de nivel, respecto a los otros, metateórico: en base a él, para los términos de la teoría usados bien como monádicos bien como diádicos vale que, allí donde sean predicados como propiedad de un argumento, lo son también como relaciones con otro posible argumento, y viceversa:

2.3.1 *Axiomas del cálculo modal.*

A10 p -> Mp
A11 M(p·q) -> Mp
A12 (p -> q) -> (Mp -> Mq)
A13 MMp -> Mp
A14 Mp -> LMp
A15 (x)LPx -> L(x)Px
A16 (y)(Py ≡ M(Σx)Pyx)

2.3.2. *Leyes lógicas del cálculo modal.*

L9.1 M(p·q) -> (Mp·Mq)
L9.2 (p -> q) -> (Mp -> Mq)
L9.3 (Mp -> q) -> (p -> q)
L9.4 (Σx)MPx ≡ M(Σx)Px
L9.5 M(Σx)(Px·Qx) -> (M(Σx)Px·M(Σx)Qx)
L9.6 M(Σx)(Px·Qx) -> M(Σx)Px
L9.7 (x)(Px -> Qx) -> (M(Σx)Px -> M(Σx)Qx)
L9.8 M(Σx)(Px v Qx) ≡ (M(Σx)Px v M(Σx)Qx)
L9.9 Pxy -> Px

Las tesis de la teoría

1. Postulados

P1 (x)(PERx v PERzx)
P2 (x)((Σy')ASPy'x ≡ (Σy")(MODy"x·¬PERzx))
P3 (y)((MODy v ASPy) -> (Σz)SOGzy)

2. *Definiciones*

D1 (x)(FCOx ≡ (PERx·PERzx))

D2 $(x)(VIEx \equiv (PERzx \cdot \neg PERx))$
D3 $(x)(OBBx \equiv (PERx \cdot \neg PERzx))$
D4 $(y)(x)(PEMyx \equiv (MODyx \cdot PERx))$
D5 $(y)(x)(PEMyzx \equiv (MODyx \cdot PERzx))$
D6 $(y)(x)(FACyx \equiv (MODyx \cdot FCOx))$
D7 $(y)(x)(OBLyx \equiv (MODyx \cdot OBBx))$
D8 $(y)(x)(DIVyx \equiv (MODyx \cdot VIEx))$
D9 $(z)(y)(TITzy \equiv (SOGzy \cdot (MODy \vee ASPy)))$
D10 $(z')(z'')(RADz'z'' \equiv (\Sigma y')(\Sigma y'')(TITz'y' \cdot TITz''y'' \cdot M(\Sigma x)(ASPy'x \cdot OBLy''x)))$
D11 $(y'')(y')(GARy''y' \equiv M(\Sigma x)(OBLy''x \cdot ASPy'x))$

3. *Teoremas*

T1	$(x)(PERx \equiv \neg VIEx)$	P1,D2
	Demostración:	
1.	$(x)(PERx \vee PERzx)$	P1
2.	$(x)(VIEx \equiv (PERzx \cdot \neg PERx))$	D2
3.	$PERx \vee PERzx$	1/EU(x)
4.	$VIEx \equiv (PERzx \cdot \neg PERx)$	2/EU(x)
5.	$VIEx \rightarrow (PERzx \cdot \neg PERx)$	4/A4.1
6.	$VIEx \rightarrow \neg PERx$	5/L3.5
7.	$(PERzx \cdot \neg PERx) \rightarrow VIEx$	3/A4.2
8.	$PERzx \rightarrow (\neg PERx \rightarrow VIEx)$	7/L4.2
9.	$\neg PERx \rightarrow PERzx$	3/L2.3
10.	$\neg PERx \rightarrow (\neg PERx \rightarrow VIEx)$	9,8/L3.1
11.	$\neg PERx \rightarrow VIEx$	10/A1.2
12.	$VIEx \equiv \neg PERx$	6,11/L5.3
13.	$PERx \equiv \neg VIEx$	12/L5.2
14.	$(x)(PERx \equiv \neg VIEx)$	13/GU(x)

T2	$(x)(PERx \equiv \neg OBBzx)$	P1,D3
	Demostración:	
1.	$(x)(PERx \vee PERzx)$	P1
2.	$(x)(OBBx \equiv (PERx \cdot \neg PERzx))$	D3
3.	$(x)(OBBzx \equiv (PERzx \cdot \neg PERx))$	2/SOS(x/zx)
4.	$PERx \vee PERzx$	1/EU(x)
5.	$OBBzx \equiv (PERzx \cdot \neg PERx)$	3/EU(x)
6.	$OBBzx \rightarrow (PERzx \cdot \neg PERx)$	5/A4.1
7.	$OBBzx \rightarrow \neg PERx$	6/L3.5
8.	$(PERzx \cdot \neg PERx) \rightarrow OBBzx$	5/A4.2
9.	$PERzx \rightarrow (\neg PERx \rightarrow OBBzx)$	8/L4.2
10.	$\neg PERx \rightarrow PERzx$	4/L2.3

11. ¬PERx -> (¬PERx -> OBBzx)	9,10/L3.1
12. ¬PERx ->OBBzx	11/A1.2
13. OBBzx ≡ ¬PERx	7,12/L5.3
14. PERx ≡ ¬OBBzx	13/L5.2
15. (x)(PERx ≡ ¬OBBzx)	14/GU(x)
T3 (x)(PERzx ≡ ¬OBBx)	T2/SOS(x/zx)
T4 (x)(PERzx ≡ ¬VIEzx)	T1/SOS(x/zx
T5 (x)(VIEx ≡ ¬PERx)	T1/L5.2
T6 (x)(VIEx ≡ OBBzx)	T5,T2
Demostración:	
1. (x)(VIEx ≡ ¬PERx)	T5
2. (x)(PERx ≡ ¬OBBzx)	T2
3. VIEx ≡ ¬PERx	1/EU(x)
4. PERx ≡ ¬OBBzx	2/EU(x)
5. OBBzx ≡ ¬PERx	4/L5.2
6. VIEx ≡ OBBzx	3,5/L5.4
7. (x)(VIEx ≡ OBBzx)	3,5/L5.4
T7 (x)(OBBx ≡ ¬PERzx)	T2/L5.2
T8 (x)(OBBx ≡ VIEzx)	T6/SOS(x/zx)
T9 (x)(FCOx ≡ FCOzx)	D1
Demostración:	
1. (x)(FCOx ≡ (PERx·PERzx))	D1
2. (x)(FCOzx ≡ (PERzx·PERx))	1/SOS(x/zx)
3. (x)(FCOzx ≡ (PERx·PERzx))	2/L1.2
4. (x)(FCOx ≡ FCOzx)	1,3/L5.4
T10 (y)(x)(FACyx ≡ (PEMyx·PEMyzx))	D4,D5,D6,D1
Demostración:	
1. (y)(x)(PEMyx ≡ (MODyx·PERx))	D4
2. (y)(x)(PEMyzx ≡ (MODyx·PERzx))	D5
3. (y)(x)(FACyx ≡ (MODyx·FCOx))	D6
4. (x)(FCOx ≡ (PERx·PERzx))	D1
5. FACyx ≡ (MODyx·PERx·PERzx)	3,4/EU(y,x), RIM
6. FACyx ≡ ((MODyx·PERx)·(MODyx·PERzx)	5/L1.1, L1.3
7. (y)(x)(FACyx ≡ (PEMyx·PEMyzx))	6,2,3/RIM, GU(y,x)
T11 (y)(x)(OBLyx ≡ (PEMyx·¬PEMyzx))	D4,D5,D7,D3
Demostración:	
1. (y)(x)(PEMyx ≡ (MODyx·PERx))	D4
2. (y)(x)(PEMyzx ≡ (MODyx·PERzx))	D5

3.	(y)(x)(OBLyx ≡ (MODyx·OBBx))	D7
4.	(y)(x)(OBBx ≡ (PERx·¬PERzx))	D3
5.	PEMyx ≡ (MODyx·PERx)	1/EU(y,x)
6.	PEMyzx ≡ (MODyx·PERzx)	2/EU(y,x)
7.	OBLyx ≡ (MODyx·OBBx)	3/EU(y,x)
8.	OBBx ≡ (PERx·¬PERzx)	4/EU(y,x)
9.	OBLyx ≡ (MODyx·PERx·¬PERzx)	7,8/RIM
10.	OBLyx -> (MODyx·PERx)	9/A4.1,L3.5
11.	OBLyx -> PEMyx	10,5/RIM
12.	OBLyx -> ¬PERzx	9/A4.1,L3.5
13.	(OBLyx·MODyx) -> ¬PERzx	12/L3.6
14.	OBLyx -> (MODyx -> ¬PERzx)	13/L4.2
15.	PEMyzx -> (MODyx·PERzx)	6/A4.1
16.	¬(MODyx·PERzx) -> ¬PEMyzx	15/A5.1
17.	(MODyx -> ¬PERzx) -> ¬PEMyzx	16/L2.5
18.	OBLyx -> ¬PEMyzx	14,17/L3.1
19.	OBLyx -> (PEMyx·¬PEMyzx)	11,18/L3.4
20.	(MODyx·PERx·¬PERzx) -> OBLyx	9/A4.2
21.	(PEMyx·¬PERzx) -> OBLyx	20,5/RIM
22.	¬PERzx -> (PEMyx -> OBLyx)	21/L4.3
23.	(MODyx·PERzx) -> PEMyzx	6 A4.2
24.	¬PEMyzx -> ¬(MODyx·PERzx)	23/A5.1
25.	¬PEMyzx -> (MODyx -> ¬PERzx)	24/L2.5
26.	(MODyx·¬PEMyzx) -> ¬PERzx	25/L4.2
27.	(MODyx·¬PEMyzx) -> (PEMyx -> OBLyx)	26,22/L3.1
28.	(PEMyx·MODyx·¬PEMyzx) -> OBLyx	27/L4.2
29.	MODyx -> ((PEMyx·¬PEMyzx) -> OBLyx)	28/L4.2
30.	PEMyx -> MODyx	5/A4.1,L3.5
31.	PEMyx -> ((PEMyx·¬PEMyzx) -> OBLyx)	30,29/L3.1
32.	(PEMyx·PEMyx·¬PEMyzx) -> OBLyx	31/L4.2
33.	(PEMyx·¬PEMyzx) -> OBLyx	32/L1.1
34.	(x)(OBLyx ≡ (PEMyx·¬PEMyzx)	19,33/L5.3,GU(x)

T12 (y)(x)(DIVyx ≡ (PEMyzx·¬PEMyx)) D4,D5,D8,D2

(La demostración es análoga a la de la T11)

T13 (y)(x)(PEMyx ≡ (FACyx v OBLyx)) D4,D6,D7,D1,D3

Demostración:

1.	(y)(x)(PEMyx ≡ (MODyx·PERx))	D4
2.	(y)(x)(FACyx ≡ (MODyx·FCOx))	D6
3.	(y)(x)(OBLyx ≡ (MODyx·OBBx))	D7
4.	(x)(FCOx ≡ (PERx·PERzx))	D1

5.	(x)(OBBx ≡ (PERx·¬PERzx))	D3
6.	PEMyx ≡ (MODyx·PERx)	1/EU(y,x)
7.	FACyx ≡ (MODyx·FCOx)	2/EU(y,x)
8.	OBLyx ≡ (MODyx·OBBx)	3/EU(y,x)
9.	FCOx ≡ (PERx·PERzx)	4/EU(x)
10.	OBBx ≡ (PERx·¬PERzx)	5/EU(x)
11.	FACyx ≡ (MODyx·PERx·PERzx)	7,9/RIM
12.	OBLyx ≡ (MODyx·PERx·¬PERzx)	8,10/RIM
13.	FACyx -> (MODyx·PERx)	11/A4.1,L3.5
14.	OBLyx -> (MODyx·PERx)	12/A4.1,L3.5
15.	(FACyx v OBLyx) -> (MODyx·PERx)	13,14/L3.7
16.	(FACyx v OBLyx) -> PEMyx	15,6/RIM
17.	(MODyx·PERx·PERzx) -> FACyx	11/A4.2
18.	(MODyx·PERx·¬PERzx) -> OBLyx	12/A4.2
19.	((MODyx·PERx·PERzx) v (MODyx·PERx·¬PERzx)) -> (FACyx v OBLyx)	17,18/L4.9
20.	(MODyx·PERx·(PERzx v ¬PERzx)) -> (FACyx v OBLyx)	19/L1.4
21.	(PEMyx·(PERzx v ¬PERzx)) -> (FACyx v OBLyx)	20,6/RIM
22.	(PERzx v ¬PERzx) -> (PEMyx -> (FACyx v OBLyx))	21/L4.2
23.	(PERzx v ¬PERzx)	L1.7
24.	PEMyx -> (FACyx v OBLyx)	22,23/L2.8
25.	PEMyx ≡ (FACyx v OBLyx)	24,16/L5.3
26.	(y)(x)(PEMyx ≡ (FACyx v OBLyx))	25/GU(y,x)

T14	(y)(x)(PEMyzx ≡ (FACyx v DIVyx))	D5,D6,D8,D1,D2
	(La demostración es análoga a la de T13)	

T15	(y)(x)(FACyx -> (¬OBLyx.¬DIVyx))	T10,T11,T12
	Demostración:	
1.	(y)(x)(FACyx ≡ (PEMyx·PEMyzx))	T10
2.	(y)(x)(OBLyx ≡ (PEMyx·¬PEMyzx))	T11
3.	(y)(x)(DIVyx ≡ (PEMyzx·¬PEMyx))	T12
4.	FACyx -> PEMyzx	1/EU(y,x), A4.1, L3.5
5.	OBLyx -> ¬PEMyzx	2/EU(y,x), A4.1, L3.5
6.	PEMyzx -> ¬OBLyx	5/L2.6
7.	FACyx -> ¬OBLyx	4,6/L3.1
8.	FACyx -> PEMyx	1/EU(y,x), A4.1, L3.5
9.	DIVyx -> ¬PEMyx	3/EU(y,x), A4.1, L3.5
10.	PEMyx -> ¬DIVyx	9/L2.6
11.	FACyx -> ¬DIVyx	8,10/L3.1
12.	(y)(x)(FACyx -> (¬OBLyx·¬DIVyx))	7,11/L3.4, GU(y,x)

T16 (y)(x)(OBLyx -> (¬FACyx·¬DIVyx)) T15,T11,T12

Demostración:

1. (y)(x)(FACyx -> (¬OBLyx·¬DIVyx)) T15
2. (y)(x)(OBLyx ≡ (PEMyx·¬PEMyzx)) T11
3. (y)(x)(DIVyx ≡ (PEMyzx·¬PEMyx)) T12
4. FACyx -> ¬OBLyx 1/EU(y,x), L3.5
5. OBLyx -> ¬FACyx 4/L2.6
6. OBLyx -> PEMyx 2/EU(y,x), A4.1, L3.5
7. DIVyx -> ¬PEMyx 3/EU(y,x), A4.1, L3.5
8. PEMyx -> ¬DIVyx 7/L2.6
9. OBLyx -> ¬DIVyx 6,8/L3.1
10. (y)(x)(OBLyx -> (¬FACyx·¬DIVyx)) 5,8/L3.4, GU(y,x)

T17 (y)(x)(DIVyx -> (¬FACyx·¬OBLyx)) T15,T16/L3.4,L2.6,L3.5

T18 (y)(x)(PEMyx -> ¬DIVyx) T13,T17

Demostración:

1. (y)(x)(PEMyx ≡ (FACyx v OBLyx)) T13
2. (y)(x)(DIVyx -> (¬FACyx·¬OBLyx)) T17
3. PEMyx ≡ (FACyx v OBLyx) 1/EU(y,x)
4. DIVyx -> (¬FACyx·¬OBLyx) 2/EU(y,x)
5. PEMyx -> (FACyx v OBLyx) 3/A4.1
6. DIVyx -> ¬(FACyx v OBLyx) 4/L1.9
7. (FACyx v OBLyx) -> ¬DIVyx 6/L2.6
8. PEMyx -> ¬DIVyx 5,7/L3.1
9. (y)(x)(PEMyx -> ¬DIVyx) 8/GU(y,x)

T19 (y)(x)(PEMyzx -> ¬OBLyx) T14,T16

(La demostración es análoga a la de T18)

T20 (y)(x)(MODyx ≡ (PEMyx v PEMyzx)) D4,D5,P1

Demostración:

1. (y)(x)(PEMyx ≡ (MODyx·PERx)) D4
2. (y)(x)(PEMyzx ≡ (MODyx·PERzx)) D5
3. (x)(PERx v PERzx) P1
4. PEMyx ≡ (MODyx·PERx) 1/EU(y,x)
5. PEMyzx ≡ (MODyx·PERzx) 2/EU(y,x)
6. PERx v PER¬ 3/EU(x)
7. (PEMyx v PEMyzx) ≡ ((MODyx·PERx) v PEMyzx) 4/L5.6
8. (PEMyx v PEMyzx) ≡ ((MODyx·PERx) v (MODyx·PERzx)) 7,5/RIM
9. (PEMyx v PEMyzx) ≡ (MODyx·(PERx v PERzx)) 8/L1.4
10. (PEMyx v PEMyzx)->MODyx 9/A4.1,L3.5
11. (MODyx·(PERx v PERzx)) -> (PEMyx v PEMyzx) 9/A4.2
12. (PERx v PERzx) -> (MODyx -> (PEMyx v PEMyzx)) 10/L4.3

13. MODyx -> (PEMyx v PEMyzx)	6,12/L2.8
14. (y)(x)(MODyx ≡ (PEMyx v PEMyzx))	13,10/L5.3,GU(y,x)
T21 (y)(x)(MODyx ≡ (FACyx v OBLyx v DIVyx))	T20,T13,T14/RIM,L1.5
T22 (y)(x)(MODyx ≡ MODyzx)	T20
Demostración:	
1. (y)(x)(MODyx ≡ (PEMyx v PEMyzx))	T20
2. MODyx ≡ (PEMyx v PEMyzx)	1/EU(y,x)
3. MODyzx ≡ (PEMyzx v PEMyx)	2/SOS(x/zx)
4. (PEMyx v PEMyzx) ≡ (PEMyzx v PEMyx)	L1.6
5. MODyx ≡ MODyzx	2,4,3/L5.4
6. (y)(x)(MODyx ≡ MODyzx)	5/GU(y,x)
T23 (y)(x)(OBLyx ≡ DIVyzx)	T12,T11
Demostración:	
1. (y)(x)(DIVyx ≡ (PEMyzx·¬PEMyx))	T12
2. (y)(x)(OBLyx ≡ (PEMyx·¬PEMyzx))	T11
3. DIVyx ≡ (PEMyzx·¬PEMyx)	1/EU(y,x)
4. OBLyx ≡ (PEMyx·¬PEMyzx)	2/EU(y,x)
5. DIVyzx ≡ (PEMyx·¬PEMyzx)	3/SOS(x/zx)
6. OBLyx ≡ DIVyzx	4,5/L5.4
7. (y)(x)(OBLyx ≡ DIVyzx)	6/GU(y,x)
T24 (y)(x)(DIVyx ≡ OBLyzx)	T11,T12
Demostración:	
1. (y)(x)(OBLyx ≡ (PEMyx·¬PEMyzx))	T11
2. (y)(x)(DIVyx ≡ (PEMyzx·¬PEMyx))	T12
3. OBLyx ≡ (PEMyx·¬PEMyzx)	1/EU(y,x)
4. DIVyx ≡ (PEMyzx·¬PEMyx)	2/EU(y,x)
5. OBLyzx ≡ (PEMyzx·¬PEMyx)	3/SOS(x/zx)
6. DIVyx ≡ OBLyzx	4,5/L5.4
7. (y)(x)(DIVyx ≡ OBLyzx)	6/GU(y,x)
T25 (y)(x)(FACyx ≡ FACyzx)	T10
Demostración:	
1. (y)(x)(FACyx ≡ (PEMyx·PEMyzx))	T10
2. FACyx ≡ (PEMyx·PEMyzx)	1/EU(y,x)
3. FACyzx ≡ (PEMyzx·PEMyx)	2/SOS(x/zx)
4. (PEMyx·PEMyzx) ≡ (PEMyzx·PEMyx)	L1.2
5. FACyx ≡ FACyzx	2,4,3/L5.4
6. (y)(x)(FACyx ≡ FACyzx)	5/GU(y,x)

T26 (x)((Σy')ASPy'zx ≡ (Σy")(MODy"x·¬PERx))	P2,T22
Demostración:	
1. (x)((Σy')ASPy'x ≡ (Σy")(MODy"x·¬PERzx))	P2
2. (y)(x)(MODyx ≡ MODyzx)	T22
3. (x)((Σy')ASPy'zx ≡ (Σy")(MODy"zx·¬PERx))	1/SOS(x/zx)
4. MODyx ≡ MODyzx	2/EU(y,x)
5. (x)((Σy')ASPy'zx ≡ (Σy")(MODy"x·¬PERx))	3,4/RIM

T27 (x)(¬(Σy)ASPyx v ¬(Σy)ASPyzx)	P1,P2,T22
Demostración:	
1. (x)(PERx v PERzx)	P1
2. (x)((Σy')ASPy'x ≡ (Σy")(MODy"x·¬PERzx))	P2
3. (y)(x)(MODyx ≡ MODyzx)	T22
4. (x)((Σy')ASPy'zx ≡ (Σy")(MODy"zx·¬PERx))	2/SOS(x/zx)
5. PERx v PERzx	1/EU(x)
6. (Σy')ASPy'x ≡ (Σy")(MODy"x·¬PERzx)	2/EU(x)
7. MODyx ≡ MODyzx	3/EU(y,x)
8. (Σy')ASPy'zx ≡ (Σy")(MODy"zx·¬PERx)	4/EU(x)
9. ¬PERx -> PERzx	5/L2.3
10. (MODy"x·¬PERx) -> (MODy"x·PERzx)	9/L4.4
11. (y")((MODy"x·¬PERx) -> (MODy"x·PERzx))	10/GU(y")
12. (Σy")(MODy"x·¬PERx) -> (Σy")(MODy"x·PERzx)	11/L7.7
13. (Σy')ASPy'zx ≡ (Σy")(MODy"x·¬PERx)	8,7/RIM
14. (Σy')ASPy'zx -> (Σy")(MODy"x·PERzx)	12,13/RIM
15. (Σy')ASPy'zx -> ((Σy")MODy"x·PERzx)	14/L8.2
16. (Σy')ASPy'zx -> PERzx	15/L3.5
17. ¬PERzx -> ¬(Σy')ASPy'zx	16/A5.1
18. (MODy"x·¬PERzx) -> ¬(Σy')ASPy'zx	17/L3.6
19. (y")((MODy"x·¬PERzx) -> ¬(Σy')ASPy'zx)	18/GU(y")
20. (Σy")(MODy"x·¬PERzx) -> ¬(Σy')ASPy'zx	19/L8.7
21. (Σy')ASPy'x -> ¬(Σy')ASPy'zx	20,6/RIM
22. ¬(Σy')ASPy'x v ¬(Σy')ASPy'zx	21/L2.4
23. (x)(¬(Σy)ASPyx v ¬(Σy)ASPyzx)	22/GU(x),SOS(y'/y)

T28 (y)(x)(ASPyx -> ¬ASPyzx)	T27
Demostración:	
1. (x)(¬(Σy)ASPyx v ¬(Σy)ASPyzx)	T27
2. ¬(Σy)ASPyx v ¬(Σy)ASPyzx	1/EU(x)
3. (Σy)ASPyx -> ¬(Σy)ASPyzx	2/L2.4
4. (Σy)ASPyx -> (y)¬ASPyzx	3/L6.2
5. (y)(ASPyx -> ¬ASPyzx)	4/L7.5
6. (y)(x)(ASPyx -> ¬ASPyzx)	5/GU(x)

20. ¬(Σy')ASPy'x ≡ (y")¬(MODy"x·¬PEMy"zx) 19/L6.2
21. ¬(Σy')ASPy'x ≡ (y")(MODy"x -> PEMy"zx) 20/L2.2
22. (x)(¬(Σy')ASPy'x ≡ (y")(MODy"x -> PEMy"zx)) 21/GU(x)

T36 (x)(¬(Σy')ASPy'zx ≡ (y")(MODy"x -> PEMy"x)) T34,T18,T21,T14
(La demostración es análoga a la de T35)

T37 (x)(¬(Σy')(ASPy'x v ASPy'zx) ≡ (y")(MODy"x -> FACy"x)) T35,T36,T10

Demostración:

1. (x)(¬(Σy')ASPy'x ≡ (y")(MODy"x -> PEMy"zx)) T35
2. (x)(¬(Σy')ASPy'zx ≡ (y")(MODy"x -> PEMy"x)) T36
3. (y")(x)(FACy"x ≡ (PEMy"x·PEMy"zx)) T10
4. ¬(Σy')ASPy'x ≡ (y")(MODy"x -> PEMy"¬) 1/EU(x)
5. ¬(Σy')ASPy'zx ≡ (y")(MODy"x -> PEMy"x) 2/EU(x)
6. xFACy"x ≡ (PEMy"x·PEMy"zx) 3/EU(y"x)
7. (¬(Σy')ASPy'x·¬(Σy')ASPy'zx) ≡ ((y")(MODy"x -> PEMy"zx)·(y")(MODy"x -> PEMy"x)) 4,5/L5.8
8. (¬(Σy')ASPy'x·¬(Σy')ASPy'zx) ≡ (y")(MODy"x -> (PEMy"zx·PEMy"x)) 7/L7.1,L3.4
9. (¬(Σy')ASPy'x·¬(Σy')ASPy'zx) ≡ (y")(MODy"x -> FACy"x) 8,6/RIM
10. ¬((Σy')ASPy'x v (Σy')ASPy'zx) ≡ (y")(MODy"x -> FACy"x) 9/L1.9
11. ¬(Σy')(ASPy'x v ASPy'zx) ≡ (y")(MODy"x -> FACy"x) 10/L7.3
12. (x)(¬(Σy')(ASPy'x v ASPy'zx) ≡ (y")(MODy"x -> FACy"x)) 11/GU(x)

T38 (x)((y")FACy"x -> ¬(Σy')(ASPy'x v ASPy'zx)) T37

Demostración:

1. (x)(¬(Σy')(ASPy'x v ASPy'zx) ≡ (y")(MODy"x -> FACy"x)) T37
2. ¬(Σy')(ASPy'x v ASPy'zx) ≡ (y")(MODy"x -> FACy"x)) 1/EU(x)
3. (y")(MODy"x -> FACy"x)) -> ¬(Σy')(ASPy'x v ASPy'zx) 2/A4.2
4. (y")(¬MODy"x v FACy"x) -> ¬(Σy')(ASPy'x v ASPy'zx) 3/L2.1
5. ((y")¬MODy"x v (y")FACy"x) -> (y")(¬MODy"x v FACy"x) L7.4
6. ((y")¬MODy"x v (y")FACy"x) -> ¬(Σy')(ASPy'x v ASPy'zx) 5,4/L3.1
7. (y")FACy"x -> ¬(Σy')(ASPy'x v ASPy'zx) 6/L3.8
8. (x)((y")FACy"x -> ¬(Σy')(ASPy'x v ASPy'zx)) 7/GU(x)

T39 (x)((y")FACy"x -> (¬(Σy')ASPy'x·¬(Σy')ASPy'zx)) T38

Demostración:

1. (x)((y")FACy"x -> (¬(Σy')ASPy'x v ASPy'zx)) T38
2. (x)((y")FACy"x -> (y')¬(ASPy'x v ASPy'zx)) 1/L6.2
3. (x)((y")FACy"x -> (y')(¬ASPy'x¬ASPy'zx)) 2/L1.9
4. (x)((y")FACy"x -> ((y')¬ASPy'x·(y')¬ASPy'zx)) 3/L7.1
5. (x)((y")FACy"x -> (¬(Σy')ASPy'x·¬(Σy')ASPy'zx)) 4/L6.2

20. ¬(Σy')ASPy'x ≡ (y")¬(MODy"x·¬PEMy"zx) 19/L6.2
21. ¬(Σy')ASPy'x ≡ (y")(MODy"x -> PEMy"zx) 20/L2.2
22. (x)(¬(Σy')ASPy'x ≡ (y")(MODy"x -> PEMy"zx)) 21/GU(x)

T36 (x)(¬(Σy')ASPy'zx ≡ (y")(MODy"x -> PEMy"x)) T34,T18,T21,T14
(La demostración es análoga a la de T35)

T37 (x)(¬(Σy')(ASPy'x v ASPy'zx) ≡ (y")(MODy"x -> FACy"x)) T35,T36,T10

Demostración:

1. (x)(¬(Σy')ASPy'x ≡ (y")(MODy"x -> PEMy"zx)) T35
2. (x)(¬(Σy')ASPy'zx ≡ (y")(MODy"x -> PEMy"x)) T36
3. (y")(x)(FACy"x ≡ (PEMy"x·PEMy"zx)) T10
4. ¬(Σy')ASPy'x ≡ (y")(MODy"x -> PEMy"¬) 1/EU(x)
5. ¬(Σy')ASPy'zx ≡ (y")(MODy"x -> PEMy"x) 2/EU(x)
6. xFACy"x ≡ (PEMy"x·PEMy"zx) 3/EU(y"x)
7. (¬(Σy')ASPy'x·¬(Σy')ASPy'zx) ≡ ((y")(MODy"x -> PEMy"zx)·(y")(MODy"x -> PEMy"x)) 4,5/L5.8
8. (¬(Σy')ASPy'x·¬(Σy')ASPy'zx) ≡ (y")(MODy"x -> (PEMy"zx·PEMy"x)) 7/L7.1,L3.4
9. (¬(Σy')ASPy'x·¬(Σy')ASPy'zx) ≡ (y")(MODy"x -> FACy"x) 8,6/RIM
10. ¬((Σy')ASPy'x v (Σy')ASPy'zx) ≡ (y")(MODy"x -> FACy"x) 9/L1.9
11. ¬(Σy')(ASPy'x v ASPy'zx) ≡ (y")(MODy"x -> FACy"x) 10/L7.3
12. (x)(¬(Σy')(ASPy'x v ASPy'zx) ≡ (y")(MODy"x -> FACy"x)) 11/GU(x)

T38 (x)((y")FACy"x -> ¬(Σy')(ASPy'x v ASPy'zx)) T37

Demostración:

1. (x)(¬(Σy')(ASPy'x v ASPy'zx) ≡ (y")(MODy"x -> FACy"x)) T37
2. ¬(Σy')(ASPy'x v ASPy'zx) ≡ (y")(MODy"x -> FACy"x)) 1/EU(x)
3. (y")(MODy"x -> FACy"x)) -> ¬(Σy')(ASPy'x v ASPy'zx) 2/A4.2
4. (y")(¬MODy"x v FACy"x) -> ¬(Σy')(ASPy'x v ASPy'zx) 3/L2.1
5. ((y")¬MODy"x v (y")FACy"x) -> (y")(¬MODy"x v FACy"x) L7.4
6. ((y")¬MODy"x v (y")FACy"x) -> ¬(Σy')(ASPy'x v ASPy'zx) 5,4/L3.1
7. (y")FACy"x -> ¬(Σy')(ASPy'x v ASPy'zx) 6/L3.8
8. (x)((y")FACy"x -> ¬(Σy')(ASPy'x v ASPy'zx)) 7/GU(x)

T39 (x)((y")FACy"x -> (¬(Σy')ASPy'x·¬(Σy')ASPy'zx)) T38

Demostración:

1. (x)((y")FACy"x -> (¬(Σy')ASPy'x v ASPy'zx)) T38
2. (x)((y")FACy"x -> (y')¬(ASPy'x v ASPy'zx)) 1/L6.2
3. (x)((y")FACy"x -> (y')(¬ASPy'x·¬ASPy'zx)) 2/L1.9
4. (x)((y")FACy"x -> ((y')¬ASPy'x·(y')¬ASPy'zx)) 3/L7.1
5. (x)((y")FACy"x -> (¬(Σy')ASPy'x·¬(Σy')ASPy'zx)) 4/L6.2

T40 (x)((Σz')(Σy')(TITz'y'·ASPy'x) ≡ (Σz")(Σy")(TITz"y"·OBLy"x))
T31,P3,D9,T21

Demostración:

1.	(x)((Σy')ASPy'x ≡ (Σy")OBLy"x)	T31
2.	(y)((MODy v ASPy) -> (Σz)SOGzy)	P3
3.	(z)(y)(TITzy ≡ (SOGzy·(MODy v ASPy)))	D9
4.	(y)(x)(MODyx ≡ (FACyx v OBLyx v DIVyx))	T21
5.	(Σy')ASPy'x ≡ (Σy")OBLy"x	1/EU(x)
6.	(MODy v ASPy) -> (Σz)SOGzy	2/EU(y)
7.	TITzy ≡ (SOGzy·(MODy v ASPy))	3/EU(z,y)
8.	MODyx ≡ (FACyx v OBLyx v DIVyx)	4/EU(y,x)
9.	(Σy')ASPy'x -> (Σy")OBLy"x	5/A4.1
10.	MODy -> (Σz)SOGzy	6/L3.8
11.	MODy -> (Σz)(SOGzy·MODy)	10/L2.7,L8.2
12.	(SOGzy·(MODy v ASPy)) -> TITzy	7/A4.2
13.	(SOGzy·MODy) -> TITzy	12/L1.4,L3.8
14.	(z)((SOGzy·MODy) -> TITzy)	13/GU(z)
15.	(Σz)(SOGzy·MODy) -> (Σz)TITzy	14/L7.7
16.	MODy -> (Σz)TITzy	11,15/L3.1
17.	MODyx -> MODy	L9.9
18.	OBLyx -> MODyx	8/A4.2,L3.8
19.	OBLyx -> MODy	18,17/L3.1
20.	OBLyx -> (Σz)TITzy	19,16/L3.1
21.	OBLyx -> ((Σz)TITzy·OBLyx)	20/L2.7
22.	OBLyx -> (Σz)(TITzy·OBLyx)	21/L8.2
23.	(y)(OBLyx -> (Σz)(TITzy·OBLyx))	22/GU(y)
24.	(Σy)OBLyx -> (Σy)(Σz)(TITzy·OBLyx)	23/L7.7
25.	(Σy")OBLy"x -> (Σz")(Σy")(TITz"y"·OBLy"x)	24/SOS(z/z",y/y")
26.	(Σy')ASPy'x -> (Σz")(Σy")(TITz"y"·OBLy"x)	9,25/L3.1
27.	((Σz')(Σy')TITz'y'·(Σy')ASPy'x) -> (Σz")(Σy")(TITz"y"·OBLy"x)	26/L3.6
28.	(Σz')((Σy')TITz'y'·(Σy')ASPy'x) -> (Σz")(Σy")(TITz"y"·OBLy"x)	27/L8.2
29.	(Σz')(Σy')(TITz'y'·ASPy'x) -> (Σz")(Σy")(TITz"y"·OBLy"x)	28/L7.2
30.	(Σy")OBLy"x -> (Σy')ASPy'x	5/A4.2
31.	ASPy -> (Σz)SOGzy	6/L3.8
32.	ASPy -> (Σz)(SOGzy·ASPy)	31/L2.7,L8.2
33.	(SOGzy·ASPy) -> TITzy	12/L1.4,L3.8
34.	(z)((SOGzy·ASPy) -> TITzy)	33/GU(z)
35.	(Σz)(SOGzy·ASPy) -> (Σz)TITzy	34/L7.7
36.	ASPy -> (Σz)TITzy	32,35/L3.1
37.	ASPyx -> ASPy	L9.9
38.	ASPyx -> (Σz)TITzy	37,36/L3.1
39.	ASPyx -> ((Σz)TITzy·ASPyx)	38/L2.7

40. ASPyx -> (Σz)(TITzy·ASPyx) 39/L8.2

41. (y)(ASPyx -> (Σz)(TITzy·ASPyx)) 40/GU(y)

42. (Σy)ASPyx -> (Σy)(Σz)(TITzy·ASPyx) 41/L7.7

43. (Σy')ASPy'x -> (Σz')(Σy')(TITz'y'·ASPy'x) 42/SOS(z/z',y/y')

44. (Σy")OBLy"x -> (Σz')(Σy')(TITz'y'·ASPy'x) 30,43/L3.1

45. ((Σz")(Σy")TITz"y"·(Σy")OBLy"x) -> (Σz')(Σy')(TITz'y'·ASPy'x) 44/L3.6

46. (Σz")((Σy")TITz"y"·(Σy")OBLy"x) -> (Σz')(Σy')(TITz'y'·ASPy'x) 45/L8.2

47. (Σz")(Σy")(TITz"y"·OBLy"x) -> (Σz')(Σy')(TITz'y'·ASPy'x) 46/L7.2

48. (Σz')(Σy')(TITz'y'·ASPy'x) ≡ (Σz")(Σy")(TITz"y"·OBLy"x) 29,47/L5.3

49. (x)((Σz')(Σy')(TITz'y'·ASPy'x) ≡ (Σz")(Σy")(TITz"y"·OBLy"x)) 48/GU(x)

T41 (x)((Σz')(Σy')(TITz'y'·ASPy'zx) ≡ (Σz")(Σy")(TITz"y"·DIVy"x))
T40, T24/SOS(x→/x),RIM

T42 (z')(z")(RADz'z" ≡ (Σy')(Σy")(TITz'y'·TITz"y"·
M(Σx)(ASPy'zx·DIVy"x)) D10,T24/SOS(zx/x),RIM

T43 (z')(x)((SOGz'·(Σy')(TITz'y'·ASPy'x)) ->
(Σz")(Σy")(RADz'z"·TITz"y"·OBLy"x)) D10,T40

Demostración:

1. (z')(z")(RADz'z" ≡ (Σy')(Σy")(TITz'y'·TITz"y"·
M(Σx)(ASPy'x"·OBLy"x))) D10

2. (x)((Σz')(Σy')(TITz'y'·ASPy'x) ≡ (Σz")(Σy")(TITz"y"·OBLy"x)) T40

3. RADz'z" ≡ (Σy')(Σy")(TITz'y'·TITz"y"·M(Σx)(ASPy'x"·OBLy"x))
1/EU(z'z")

4. (Σz')(Σy')(TITz'y'·ASPy'x) ≡ (Σz")(Σy")(TITz"y"·OBLy"x) 2/EU(x)

5. (Σy')(Σy")(TITz'y'·TITz"y"·M(Σx)(ASPy'x"·OBLy"x)) -> RADz'z" 3/A4.2

6. (y')(y")((TITz'y'·TITz"y"·M(Σx)(ASPy'x"·OBLy"x)) -> RADz'z") 5/L8.7

7. (TITz'y'·TITz"y"·M(Σx)(ASPy'x"·OBLy"x)) -> RADz'z" 6/EU(y',y")

8. M(Σx)(ASPy'x"·OBLy"x) -> ((TITz'y'·TITz"y") -> RADz'z") 7/L4.2

9. (Σx)(ASPy'x"·OBLy"x) -> ((TITz'y'·TITz"y") -> RADz'z") 8/L9.3

10. (x)((ASPy'x"·OBLy"x) -> ((TITz'y'·TITz"y") -> RADz'z")) 9/L8.7

11. (ASPy'x"·OBLy"x) -> ((TITz'y'·TITz"y") -> RADz'z") 10/EU(x)

12. (ASPy'x"·OBLy"x·TITz'y'·TITz"y") -> RADz'z" 11/L4.2

13. (TITz'y'·ASPy'x·TITz"y"·OBLy"x) -> RADz'z" 12/L1.2

14. (TITz'y'·ASPy'x·TITz"y"·OBLy"x) -> (RADz'z"·TITz"y"·OBLy"x) 13/L3.2

15. (TITz"y"·OBLy"x) -> ((TITz'y'·ASPy'x) ->
(RADz'z"·TITz"y"·OBLy"x)) 14/L4.2

16. (z")(y")((TITz"y"·OBLy"x) -> ((TITz'y'·ASPy'x) ->
(RADz'z"·TITz"y"·OBLy"x))) 15/GU(y",y")

17. (Σz")(Σy")(TITz"y"·OBLy"x) -> (Σz")(Σy")((TITz'y'·ASPy'x) ->
(RADz'z"·TITz"y"·OBLy"x)) 16/L7.7

18. (Σz")(Σy")(TITz"y"·OBLy"x) -> ((TITz'y'·ASPy'x) -> (Σz")(Σy")(RADz'z"·TITz"y"·OBLy"x)) 17/L8.6
19. (Σz')(Σy')(TITz'y'·ASPy'x) -> (Σz")(Σy")(TITz"y"·OBLy"x) 4/A4.1
20. (z')(y')((TITz'y'·ASPy'x) -> (Σz")(Σy")(TITz"y"·OBLy"x)) 19/L8.7
21. (TITz'y'·ASPy'x) -> (Σz")(Σy")(TITz"y"·OBLy"x) 20/EU(z',y')
22. (TITz'y'·ASPy'x) -> ((TITz'y'·ASPy'x) -> (Σz")(Σy")(RADz'z"·TITz"y"·OBLy"x)) 21,18/L3.1
23. (TITz'y'·ASPy'x) -> (Σz")(Σy")(RADz'z"·TITz"y"·OBLy"x) 22/A1.2
24. (SOGz'·TITz'y'·ASPy'x) -> (Σz")(Σy")(RADz'z"·TITz"y"·OBLy"x) 23/L3.6
25. (z')(y')(x)((SOGz'·TITz'y'·ASPy'x) -> (Σz")(Σy")(RADz'z"·TITz"y"·OBLy"x)) 24/GU(z',y',x)
26. (z')(x)((SOGz'·(Σy')(TITz'y'·ASPy'x)) -> (Σz")(Σy")(RADz'z"·TITz"y"·OBLy"x)) 25/L8.7,L8.2

T44 (z")(x)((SOGz"·(Σy")(TITz"y"·OBLy"x)) -> (Σz')(Σy')(RADz'z"·TITz'y'·ASPy'x)) D10,T40
(La demostración es análoga a la de T43)

T45 (z')(x)((SOGz'·(Σy')(TITz'y'·ASPy'zx)) -> (Σz")(Σy")(RADz'z"·TITz"y"·DIVy"x)) T43,T24/SOS(zx/x)

T46 (z")(x)((SOGz"·(Σy")(TITz"y"·DIVy"x)) -> (Σz')(Σy')(RADz'z"·TITz'y'·ASPy'zx)) T44,T24/SOS(zx/x)

T47 (y")(y')(GARy"y' ≡ M(Σx)(DIVy"x·ASPy'zx)) D11,T24/SOS(x/zx),RIM

T48 (y")(y')(GARy"y' ≡ M(Σx)((OBLy"x·ASPy'x) v (DIVy"x·ASPy'zx))) D11,T47

Demostración:

1. (y")(y')(GARy"y' ≡ M(Σx)(OBLy"x·ASPy'x)) D11
2. (y")(y')(GARy"y' ≡ M(Σx)(DIVy"x·ASPy'zx)) T47
3. (y")(y')(GARy"y' -> M(Σx)(OBLy"x·ASPy'x)) 1/A4.1
4. (y")(y')(GARy"y' -> (M(Σx)(OBLy"x·ASPy'x) v M(Σx)(DIVy"x·ASPy'zx))) 3/L3.9
5. (y")(y')(M(Σx)(OBLy"x·ASPy'x) -> GARy"y') 1/A4.2
6. (y")(y')(M(Σx)(DIVy"x·ASPy'zx) -> GARy"y') 2/A4.2
7. (y")(y')((M(Σx)(OBLy"x·ASPy'x) v M(Σx)(DIVy"x·ASPy'zx)) -> GARy"y') 5,6/L3.7
8. (y")(y')(GARy"y' ≡ (M(Σx)(OBLy"x·ASPy'x) v M(Σx)(DIVy"x·ASPy'zx))) 4,7/L5.3
9. (y")(y')(GARy"y' ≡ M(Σx)((OBLy"x·ASPy'x) v (DIVy"x·ASPy'zx))) 8/L9.8

T49 (y")(M(Σx)OBLy"x -> (Σy')(GARy"y'·M(Σx)ASPy'x)) D11,T31

Demostración:

1.	(y")(y')(GARy"y' ≡ M(Σx)(OBLy"x·ASPy'x))	D11
2.	(x)((Σy')ASPy'x ≡ (Σy")OBLy"x)	T31
3.	GARy"y' ≡ M(Σx)(OBLy"x·ASPy'x)	1/EU(y",y')
4.	(Σy')ASPy'x ≡ (Σy")OBLy"x	2/EU(x)
5.	M(Σx)(OBLy"x·ASPy'x) -> GARy"y'	3/A4.2
6.	M(Σx)(OBLy"x·ASPy'x) -> (GARy"y'·M(Σx)(OBLy"x·ASPy'x))	5/L2.7
7.	M(Σx)(OBLy"x·ASPy'x) -> (GARy"y'·M(Σx)ASPy'x)	6/L9.6
8.	(Σy")OBLy"x -> (Σy')ASPy'x	4/A4.2
9.	(y")(OBLy"x -> (Σy')ASPy'x)	8/L8.7
10.	OBLy"x -> (Σy')ASPy'x	9/EU(y")
11.	OBLy"x -> (OBLy"x·(Σy')ASPy'x)	10/L2.7
12.	OBLy"x -> (Σy')(OBLy"x·ASPy'x)	11/L8.2
13.	(x)(OBLy"x -> (Σy')(OBLy"x·ASPy'x))	12/GU(x)
14.	(Σx)OBLy"x -> (Σx)(Σy')(OBLy"x·ASPy'x)	13/L7.7
15.	M(Σx)OBLy"x -> M(Σx)(Σy')(OBLy"x·ASPy'x)	14/L9.2
16.	(y')(M(Σx)(OBLy"x·ASPy'x) -> (GARy"y'·M(Σx)ASPy'x))	7/GU(y')
17.	(Σy')M(Σx)(OBLy"x·ASPy'x) -> (Σy')(GARy"y'·M(Σx)ASPy'x)	16/L7.7
18.	M(Σy')(Σx)(OBLy"x·ASPy'x) -> (Σy')(GARy"y'·M(Σx)ASPy'x)	17/L9.4
19.	M(Σx)OBLy"x -> (Σy')(GARy"y'·M(Σx)ASPy'x)	15,18/L3.1
20.	(y")(M(Σx)OBLy"x -> (Σy')(GARy"y'·M(Σx)ASPy'x))	19/GU(y")

T50 (y")(M(Σx)DIVy"x -> (Σy')(GARy"y'·M(Σx)ASPy'zx)) T47,T32

(La demostración es análoga a la de T49)

T51 (y')(M(Σx)ASPy'x -> (Σy")(GARy"y'·M(Σx)OBLy"x)) D11,T31

Demostración:

1.	(y")(y')(GARy"y' ≡ M(Σx)(OBLy"x·ASPy'x))	D11
2.	(x)((Σy')ASPy'x ≡ (Σy")OBLy"x)	T31
3.	GARy"y' ≡ M(Σx)(OBLy"x·ASPy'x)	1/EU(y",y')
4.	(Σy')ASPy'x ≡ (Σy")OBLy"x	2/EU(x)
5.	M(Σx)(OBLy"x·ASPy'x) -> GARy"y'	3/A4.2
6.	M(Σx)(OBLy"x·ASPy'x) -> (GARy"y'·M(Σx)(OBLy"x·ASPy'x))	5/L2.7
7.	M(Σx)(OBLy"x·ASPy'x) -> (GARy"y'·M(Σx)OBLy"x)	6/L9.6
8.	(M(Σx)OBLy"x·M(Σx)ASPy'x) -> (GARy"y'·M(Σx)OBLy"x)	7/L7.2
9.	M(Σx)OBLy"x -> (M(Σx)ASPy'x -> (GARy"y'·M(Σx)OBLy"x))	8/L4.2
10.	(y")(M(Σx)OBLy"x -> (M(Σx)ASPy'x -> (GARy"y'·M(Σx)OBLy"x)))	9/GU(y")
11.	(Σy")M(Σx)OBLy"x -> (Σy")(M(Σx)ASPy'x -> (GARy"y'·M(Σx)OBLy"x))	10/L7.7
12.	(Σy")M(Σx)OBLy"x -> (M(Σx)ASPy'x -> (Σy")(GARy"y'·M(Σx)OBLy"x))	11/L8.6

13. M(Σy")(Σx)OBLy"x -> (M(Σx)ASPy'x ->
 (Σy")(GARy"y'·M(Σx)OBLy"x)) 12/L9.4
14. (Σy')ASPy'x -> (Σy")OBLy"x 4/EU(x)
15. (y')(ASPy'x -> (Σy")OBLy"x) 14/L8.7
16. ASPy'x -> (Σy")OBLy"x 15/EU(y')
17. (x)(ASPy'x -> (Σy")OBLy"x) 16/GU(x)
18. (Σx)ASPy'x -> (Σx)(Σy")OBLy"x 17/L7.7
19. M(Σx)ASPy'x -> M(Σx)(Σy")OBLy"x 18/L9.2
20. M(Σx)ASPy'x -> (M(Σx)ASPy'x -> (Σy")(GARy"y'·M(Σx)OBLy"x))
 19,13/L3.1
21. M(Σx)ASPy'x -> (Σy")(GARy"y'·M(Σx)OBLy"x) 20/A1.2
22. (y')(M(Σx)ASPy'x -> (Σy")(GARy"y'·M(Σx)OBLy"x)) 21/GU(y')

T52 (y')(M(Σx)ASPy'zx -> (Σy")(GARy"y'·M(Σx)DIVy"x)) T47,T32
(La demostración es análoga a la de T51)

T53 (y')(y")(GARy"y' ≡ M(Σx)(OBLy"x v DIVy"x)) T48,T49,T50
Demostración:
1. (y")(y')(GARy"y' ≡ M(Σx)((OBLy"x·ASPy'x) v (DIVy"x·ASPy'zx))) T48
2. (y")(M(Σx)OBLy"x -> (Σy')(GARy"y'·M(Σx)ASPy'x)) T49
3. (y")(M(Σx)DIVy"x -> (Σy')(GARy"y'·M(Σx)ASPy'zx)) T50
4. (y")(y')(GARy"y' -> M(Σx)((OBLy"x·ASPy'x) v (DIVy"x·ASPy'zx)))
 1/A4.1
5. (y")(y')(GARy"y' -> (M(Σx)(OBLy"x·ASPy'x) v
 M(Σx)(DIVy"x·ASPy'zx))) 4/L9.8
6. (y")(y')(GARy"y' -> (M(Σx)OBLy"x v M(Σx)DIVy"x)) 5/L9.5,L3.3
7. (y")(M(Σx)OBLy"x -> (Σy')GARy"y') 2/L8.9
8. (y")(M(Σx)DIVy"x -> (Σy')GARy"y') 3/L8.9
9. (y")((M(Σx)OBLy"x v M(Σx)DIVy"x) -> (Σy')GARy"y') 7,8/L3.7
10. (y")(y')(GARy"y' ≡ (M(Σx)OBLy"x v M(Σx)DIVy"x)) 6,9/L5.3
11. (y")(y')(GARy"y' ≡ M(Σx)(OBLy"x v DIVy"x)) 10/L9.8

T54 (y")(y')(GARy"y' -> (Σz")(Σz')(MODy"·TITz"y"·RADz'z"·
TITz'y'·ASPy')) P3,D9,T21,D10,D11
Demostración:
1. (y)((MODy v ASPy) -> (Σz)SOGzy) P3
2. (z)(y)(TITzy ≡ (SOGzy·(MODy v ASPy))) D9
3. (y")(x)(MODy"x ≡ (FACy"x v OBLy"x v DIVy"x)) T21
4. (z')(z")(RADz'z" ≡ (Σy')(Σy")(TITz'y'·TITz"y"·
 M(Σx)(ASPy'x·OBLy"x))) D10
5. (y")(y')(GARy"y' ≡ M(Σx)(OBLy"x·ASPy'x)) D11
6. (MODy v ASPy) -> (Σz)SOGzy 1/EU(y)

7. (z)(TITzy ≡ (SOGzy·(MODy v ASPy))) 2/EU(y)
8. (x)(MODy"x ≡ (FACy"x v OBLy"x v DIVy"x)) 3/EU(y")
9. RADz'z" ≡ (Σy')(Σy")(TITz'y'·TITz"y"· M(Σx)(ASPy'x·OBLy"x))
 4/EU(z',z")
10. GARy"y' ≡ M(Σx)(OBLy"x·ASPy'x) 5/EU(y",y')
11. (z)((SOGzy·(MODy v ASPy)) -> TITzy) 7/A4.2
12. (Σz)(SOGzy·(MODy v ASPy)) -> (Σz)TITzy 11/L7.7
13. (MODy v ASPy) -> (Σz)(SOGzy·(MODy v ASPy)) 6/L2.7,L8.2
14. (MODy v ASPy) -> (Σz)TITzy 13,12/L3.1
15. (y)((MODy v ASPy) -> (Σz)TITzy) 14/GU(y)
16. (y')((MODy' v ASPy') -> (Σz)TITzy') 15/SOS(y/y')
17. (y")((MODy" v ASPy") -> (Σz)TITzy") 15/SOS(y/y")
18. (MODy' v ASPy') -> (Σz')TITz'y' 16/EU(y')
19. (MODy" v ASPy") -> (Σz")TITz"y" 17/EU(y")
20. ASPy' -> (Σz')TITz'y' 18/L3.8
21. MODy" -> (Σz")TITz"y" 19/L3.8
22. (Σx)MODy"x ≡ (Σx)(FACy"x v OBLy"x v DIVy"x) 8/L7.9
23. M(Σx)MODy"x ≡ M(Σx)(FACy"x v OBLy"x v DIVy"x) 22/A12
24. M(Σx)MODy"x ≡ (M(Σx)FACy"x v M(Σx)OBLy"x v M(Σx)DIVy"x)
 23/L9.8
25. MODy" ≡ (FACy" v OBLy" v DIVy") 24/A16
26. OBLy" -> MODy" 25/A4.2,L3.8
27. OBLy" -> (Σz")TITz"y" 26,21/L3.1
28. M(Σx)ASPy'x -> (Σz')TITz'y' 20/A16
29. M(Σx)OBLy"x -> (Σz")TITz"y" 27/A16
30. (M(Σx)ASPy'x·M(Σx)OBLy"x) -> ((Σz')TITz'y'·(Σz")TITz"y")
 28,29/L4.8
31. M(Σx)(ASPy'x·OBLy"x) -> ((Σz')TITz'y'·(Σz")TITz"y") 30/L9.5
32. M(Σx)(ASPy'x·OBLy"x) -> (Σz')(Σz")(TITz'y'·TITz"y") 31/L8.2
33. GARy"y' -> M(Σx)(OBLy"x·ASPy'x) 10/A4.1
34. GARy"y' -> (Σz')(Σz")(TITz'y'·TITz"y") 33,32/L3.1
35. GARy"y' -> ((Σz')(Σz")(TITz'y'·TITz"y")·M(Σx)(OBLy"x·ASPy'x))
 34,33/L3.4
36. (Σy')(Σy")(TITz'y'·TITz"y"·M(Σx)(ASPy'x·OBLy"x)) -> RADz'z" 9/A4.2
37. (y')(y")((TITz'y'·TITz"y"·M(Σx)(ASPy'x·OBLy"x)) -> RADz'z") 36/L8.7
38. (TITz'y'·TITz"y"·M(Σx)(ASPy'x·OBLy"x)) -> RADz'z" 37/EU(y',y")
39. (TITz'y'·TITz"y"·M(Σx)(ASPy'x·OBLy"x)) ->
 (RADz'z"·TITz'y'·TITz"y") 38/L3.2
40. (Σz')(Σz")(TITz'y'·TITz"y"·M(Σx)(ASPy'x·OBLy"x)) ->
 (Σz')(Σz")(RADz'z"·TITz'y'·TITz"y") 39/GU(z',z"),L7.7

41. GARy"y' -> (Σz')(Σz")(TITz'y'·TITz"y"·M(Σx)(OBLy"x·ASPy'x)) 35/L8.2
42. GARy"y' -> (Σz')(Σz")(RADz'z"·TITz'y'·TITz"y") 41,40/L3.1
43. GARy"y' -> (M(Σx)OBLy"x·M(Σx)ASPy'x) 33/L9.5
44. GARy"y' -> (OBLy"·ASPy') 34/A16
45. (OBLy"·ASPy') -> (MODy"·ASPy') 26/L4.4
46. GARy"y' -> (MODy"·ASPy') 44,45/L3.1
47. GARy"y' -> (MODy"·ASPy'·(Σz')(Σz")(RADz'z"·TITz'y'·TITz"y")) 46,42/L3.4
48. GARy"y' -> (Σz")(Σz')(MODy"·TITz"y"·RADz'z"·TITz'y'·ASPy') 47/L8.2,L1.2
49. (y")(y')(GARy"y' -> (Σz")(Σz')(MODy"·TITz"y"·RADz'z"·TITz'y'·ASPy')) 48/GU(y",y')

T55 (z')(z")(RADz'z" -> (Σy')(Σy")(TITz'y'·ASPy'·GARy"y'·MODy"·TITz"y")) D10,D11,T21

Demostración:

1. (z')(z")(RADz'z" ≡ (Σy')(Σy")(TITz'y'·TITz"y"·M(Σx)(ASPy'x·OBLy"x))) D10
2. (y")(y')(GARy"y' ≡ M(Σx)(OBLy"x·ASPy'x)) D11
3. (y")(x)(MODy"x ≡ (FACy"x v OBLy"x v DIVy"x)) T21
4. RADz'z" ≡ (Σy')(Σy")(TITz'y'·TITz"y"· M(Σx)(ASPy'x·OBLy"x)) 1/EU(z',z")
5. GARy"y' ≡ M(Σx)(OBLy"x·ASPy'x) 2/EU(y",y')
6. (x)(MODy"x ≡ (FACy"x v OBLy"x v DIVy"x)) 3/EU(y")
7. RADz'z" -> (Σy')(Σy")(TITz'y'·TITz"y"· M(Σx)(ASPy'x·OBLy"x)) 4/A4.1
8. M(Σx)(ASPy'x·OBLy"x) -> GARy"y' 5/A4.2,L1.2
9. M(Σx)(ASPy'x·OBLy"x) -> (M(Σx)(ASPy'x·OBLy"x)·GARy"y') 8/L2.7
10. (M(Σx)(ASPy'x·OBLy"x)·GARy"y') -> M(Σx)(ASPy'x·OBLy"x) A2.1
11. M(Σx)(ASPy'x·OBLy"x) ≡ (M(Σx)(ASPy'x·OBLy"x)·GARy"y') 9,10/L5.3
12. RADz'z" -> (Σy')(Σy")(TITz'y'·TITz"y"·M(Σx)(ASPy'x·OBLy"x)·GARy"y') 7,11/RIM
13. RADz'z" -> (Σy')(Σy")(TITz'y'·TITz"y"·M(Σx)ASPy'x·M(Σx)OBLy"x·GARy"y') 12/L9.5
14. RADz'z" -> (Σy')(Σy")(TITz'y'·TITz"y"·ASPy'·OBLy"·GARy"y') 13/A16
15. (Σx)MODy"x ≡ (Σx)(FACy"x v OBLy"x v DIVy"x) 6/L7.9
16. M(Σx)MODy"x ≡ M(Σx)(FACy"x v OBLy"x v DIVy"x) 15/A12
17. M(Σx)MODy"x ≡ (M(Σx)FACy"x v M(Σx)OBLy"x v M(Σx)DIVy"x) 16/L9.8
18. MODy" ≡ (FACy" v OBLy" v DIVy") 17/A16
19. OBLy" -> MODy" 18/A4.2,L3.8

20. (TITz'y'·TITz"y"·ASPy'·OBLy"·GARy"y') ->
(TITz'y'·TITz"y"·ASPy'·MODy"·GARy"y') 19/L4.4
21. (y')(y")((TITz'y'·TITz"y"·ASPy'·OBLy"·GARy"y') ->
(TITz'y'·TITz"y"·ASPy'·MODy"·GARy"y')) 20/GU(y',y")
22. (Σy')(Σy")(TITz'y'·TITz"y"·ASPy'·OBLy"·GARy"y') ->
(Σy')(Σy")(TITz'y'·TITz"y"·ASPy'·MODy"·GARy"y') 21/L7.7
23. RADz'z" -> (Σy')(Σy")(TITz'y'·TITz"y"·ASPy'·MODy"·GARy"y')
14,22/L3.1
24. RADz'z" -> (Σy')(Σy")(TITz'y'·ASPy'·GARy"y'·MODy"·TITz"y") 23/L1.2
25. (z')(z")(RADz'z" -> (Σy')(Σy")(TITz'y'·ASPy'·GARy"y'·
MODy"·TITz"y")) 24/GU(z',z")