el Correo de la UNESCO

ENTREVISTA A FEDERICO MAYOR

Viaje al país de las matemáticas

NOVIEMBRE 1989
15 francos franceses
(España: 400 pts. IVA incl.)

confluencias

Amigos lectores, para esta sección "Confluencias", enviennos una fotografía o una reproducción de una pintura, una escultura o un conjunto arquitectónico que representen a sus ojos un cruzamiento o mestizaje creador entre varias culturas, o bien dos obras de distinto origen cultural en las que perciban un parecido o una relación sorprendente. Remítannoslas junto con un comentario de dos o tres líneas firmado. Cada mes publicaremos en una página entera una de esas contribuciones enviadas por los lectores.

Buda Shakyamuni,
1987, pintura sobre algodón hecha con pigmentos naturales triturados, de Nathalie Gyatso.

El arte del thanka, pintura tibetana sagrada sobre tela, está sometido a reglas estrictas. "Pero, escribe Nathalie Gyatso, francesa, la imaginación y la inventiva pueden desplegarse en el marco de un arte de este tipo. Por ejemplo, aquí he querido simbolizar la aparición tranquilizadora de Buda, mostrando la desaparición de las nubes agresivas ante la luz y la invasión de las montañas masivas y amenazantes por una vegetación más suave. Un pintor tibetano habría, aplicando las mismas reglas, seguido otra opción iconográfica: a una divinidad apacible habría asociado probablemente elementos apacibles."

E S T E N Ú M E R O

Amigos lectores,

La aventura ya no tiene un horizonte geográfico.

Ya no hay continentes vírgenes, ni océanos desconocidos, ni islas misteriosas. Y, sin embargo, en muchos sentidos los pueblos son aun extraños los unos a los otros, y las costumbres, las esperanzas secretas y las convicciones íntimas de cada uno de ellos siguen siendo ignoradas en gran medida por los demás...

Ulises ya no tiene pues un espacio físico que recorrer. Pero hay una nueva odisea por iniciar con urgencia: la exploración de los mil y un paisajes culturales, de la infinita variedad de pensamientos y de sabidurías vivientes, en suma el descubrimiento de la multiplicidad del hombre.

Esta es la odisea que les propone *El Correo de la Unesco* al ofrecerles cada mes un tema de interés universal, tratado por autores de nacionalidades, competencias y sensibilidades diferentes. Una travesía de la diversidad cultural del mundo cuya brújula sea la dignidad del Hombre de todas las latitudes.

La Redacción agradece al Sr. Tony Lévy su valiosa contribución a la elaboración de este número.

Nuestra portada: *La lección de geometría* (1561), del pintor flamenco Nicolas de Neuchâtel.

Portada posterior: Imagen mediante computadora de una fórmula de geometría "fractal".

Federico Mayor

Federico Mayor fue rector de la Universidad de Granada, presidente de la Sociedad Española de Bioquímica, fundador y director del Centro de Biología Molecular de Madrid, Ministro de Educación y Ciencia de España, y diputado en el Parlamento Europeo de Estrasburgo, antes de ser elegido por seis años, en noviembre de 1987, Director General de la Unesco. Con ocasión de la 25.ª reunión de la Conferencia General de la Unesco, Federico Mayor formula algunas reflexiones sobre el papel clave del sistema de las Naciones Unidas en el mundo de hoy.*

Es indiscutible que la opinión pública de la mayoría de los países del mundo se ha habituado a la existencia del sistema de las Naciones Unidas. Pero también es cierto que abriga dudas acerca de su verdadera utilidad. ¿Piensa usted que este sistema sea realmente indispensable?

— El sistema es hoy en día más necesario aun que en el pasado. En 1945 fue la respuesta a un balance lúcido y amargo (lucidez y amargura van a menudo juntas) inmediatamente después del desastre, mientras que ahora responde a una conciencia aguda de la globalidad creciente de los problemas que sólo podemos afrontar juntos.

El sistema no ha resuelto, ni mucho menos, todos los problemas que se le han planteado. Pero se ha revelado insustituible como foro de encuentro, de conciliación y de reconciliación, y como el lugar más idóneo para la pacificación, la búsqueda de nuevas vías y la exploración perseverante de fórmulas de cooperación. Es, en el fondo, el lugar de una nueva identidad, la de la aldea planetaria. Aldea plural y multiforme que reagrupa y debe proteger todas las identidades culturales, la infinita diversidad de los pueblos y la especificidad irreemplazable de cada comunidad humana... Contrariamente a lo que se piensa a menudo, las Naciones Unidas no son una construcción *ex-nihilo* decidida en 1945 por algunos visionarios idealistas. Constituyen, por el contrario, la prolongación de una dilatada historia anterior; son el resultado de un proceso histórico que se inició a fines del siglo XIX y a través del cual un número creciente de individuos, corrientes y naciones cobraron conciencia de la necesidad de crear estructuras comunes de concertación y de cooperación, a escala internacional.

Esta toma de conciencia respondía a nuevas realidades: se empezaba entonces a descubrir la unicidad del mundo: las comunicaciones se intensificaban; los intereses comerciales, industriales y financieros desbordaban las fronteras nacionales e incluso continentales; la información empezaba a cruzar regularmente los océanos. Esta aparición del mundialismo exigía el establecimiento de una concertación a escala mundial.

¿La necesidad creó acaso el órgano?

— La especie humana es la única dotada, como sello distintivo, de la capacidad de crear. Son siempre algunos seres clarividentes los que, llegado el momento, toman las decisiones que corresponden a los nuevos desafíos.

La primera estructura internacional institucional —la Sociedad de las Naciones— nació al día siguiente de la Primera Guerra Mundial. Fue necesaria esa terrible conmoción para poner en evidencia que el mundo no era solamente un mercado que repartirse, sino un patrimonio que era necesario proteger contra sus propios extravíos. Algunos estadistas, pero también algunos filósofos, sabios y escritores, pensaron entonces que sería útil disponer de dos organismos distintos —uno para resolver las diferencias de carácter político (la Sociedad de las Naciones) y otro para aproximar los espíritus y las culturas (el Instituto de Cooperación Intelectual Internacional).

Está claro que cuando hablo de patrimonio no me refiero solamente al patrimonio físico —natural, ambiental, artístico y arquitectónico— sino también a nuestro común legado espiritual e intelectual —los frutos del conocimiento, los derechos humanos, los valores y principios universales.

Pero la Sociedad de las Naciones no fue lo suficientemente sólida como para resistir, en nombre de todo ello, el huracán del fascismo. La Segunda Guerra Mundial iba a

* Autor de numerosos trabajos científicos, de varios libros de poesía y de un ensayo titulado *Mañana siempre es tarde* (Madrid, Espasa Calpe, 1987).

constituir, para la humanidad, una advertencia mucho más seria. No sólo las matanzas y las destrucciones que provocó no podían de ningún modo compararse con las de la anterior; no sólo el ámbito del conflicto se extendió gradualmente a los cinco continentes, sino que, además, la explosión de dos bombas atómicas señaló a todos que, por primera vez en su historia, la humanidad acababa de dotarse de los medios necesarios para su propia aniquilación. Una tercera guerra mundial podría significar la extinción del género humano.

Hasta entonces todas las guerras —todos los conflictos— habían tenido vencedores y vencidos. En lo sucesivo todos los protagonistas corrían el riesgo de perder. La guerra se había vuelto sin sentido. La civilización de la guerra comenzó casi imperceptiblemente a ceder terreno ante la civilización de la paz no como resultado de un brusco despertar de la virtud sino por temor al poder que las técnicas de destrucción acababan de alcanzar. La cultura de la paz no iba a nacer de la sensatez de los hombres sino de su infinito desamparo. En ese momento crucial —a mi juicio, el más importante de nuestra historia— se creó el sistema de las Naciones Unidas.

Este sistema, mucho más ambicioso que el de la Sociedad de las Naciones, se fijó como meta ampliar la esfera de la cooperación a todas las naciones y a numerosos aspectos de la actividad intelectual, social, económica y humanitaria. Las Naciones Unidas son un órgano político. Diversas organizaciones, organismos, programas, fondos y comisiones completan el dispositivo internacional: la Unesco, para la educación, la ciencia y la cultura; la OMS, para la salud; el Unicef, para la infancia; la OIT, para los problemas del trabajo; el ACNUR, para la ayuda a los refugiados; la FAO, para la alimentación y la agricultura, etc.

Es evidente que los éxitos mayores o menores, las realizaciones más o menos espectaculares, las deficiencias y los fracasos del sistema de las Naciones Unidas dependen esencialmente del estado de ánimo de la comunidad de las naciones y en particular de la capacidad de los estados más influyentes de entenderse para hacer prevalecer una voluntad de conciliación. A condición de que se reúnan esos factores favorables, la familia de las Naciones Unidas puede poner plenamente en movimiento la dinámica de la cooperación multilateral y suscitar la elaboración en común de soluciones que es imposible encontrar individualmente.

Es ése y no otro, a mi juicio, el verdadero sentido de la acción de las Naciones Unidas. Estas existen para recordarnos que pertenecemos a una sola y misma especie que habita en un solo y mismo planeta. ¿En qué nos convertiríamos si un día, por desgracia, llegáramos a olvidarlo?

Usted habla de las organizaciones y de los organismos pertenecientes al sistema de las Naciones Unidas. Se puede entender que haya instancias de concertación y de regulación internacional en materia de política, de salud, de agricul-

tura o de finanzas, pero, tratándose de la cultura ¿no hay una antinomia entre la idea de organización —con sus reglas, sus programas, sus opciones— y la idea de cultura que es, por definición, sinónimo de creación, es decir de libertad y de espontaneidad?

— Es evidente que la misión de la Unesco no es intervenir en los procesos de creación, sino contribuir a crear las condiciones propicias para la aparición y el desarrollo de las actividades culturales. Pero hay que comenzar por distinguir varios sentidos de la palabra cultura que a veces tienden a confundirse.

Se empezó a hablar de cultura para oponerla a la naturaleza, para diferenciar al hombre, creador, del animal, que no puede sino seguir las leyes naturales. El término sirvió también para distinguir entre el trabajo de formación del espíritu y el trabajo manual de producción de bienes. En esta perspectiva, se han dado diversas definiciones, más o menos amplias, de la cultura. Para algunos, la cultura sólo comprende las obras maestras, lo que llega a lo sublime, en los diversos aspectos de la reflexión y de la creación; para otros, la cultura abarca todo lo que hace que un pueblo se distinga de los demás, desde sus producciones más complejas hasta sus creencias, sus costumbres, sus maneras de vivir y de trabajar. Es esta última acepción la que la comunidad internacional adoptó en la Conferencia Intergubernamental sobre las Políticas Culturales, celebrada en Venecia en 1970. Y en 1982, en México, la segunda Conferencia, llamada "Mondiacult", ratificó este enfoque "activo" de la cultura.

Esta definición ha sido criticada por algunos intelectuales so pretexto de que implicaría dar mayor importancia a las expresiones más triviales de la actividad del espíritu que a sus expresiones más elevadas, y hacer hincapié en los valores específicos de cada pueblo —los que los separan de los demás— y no en los valores universales de la verdad, del bien, de la belleza que, en cambio, acercan a los hombres.

—A mi juicio, esta crítica es errónea. Desconoce lo que yo llamaría el marco de pertinencia de nuestra definición, que es de orden práctico y operacional. En el sistema de las Naciones Unidas, donde coexisten filosofías diferentes, las bases de entendimiento son bases de acción, de una acción guiada evidentemente por los grandes principios en los que se inspira el sistema en su totalidad.

Las definiciones son, en consecuencia, puntos de partida. Y en el plano de la cooperación cultural el único punto de partida posible es la aceptación de la diversidad y el respeto de esa diversidad, que es la forma primordial del respeto de la dignidad de los individuos que se reconocen en las distintas culturas. Más exactamente diría que cada persona es biológica y socioculturalmente única y que el reconocimiento de esa unicidad es la condición *sine qua non* de una comprensión mutua. Pero ello no quiere decir que, en todas las culturas, todo tenga el mismo valor, y que no se pueda ir más allá de las especificidades culturales. No hay ninguna ingenuidad en el enfoque de la Unesco: las culturas no son entidades intocables; producto de una historia, cada una de ellas tiene sus luces y sus sombras, sus grandezas, sus impulsos hacia lo sublime y sus sueños de fraternidad, pero también sus tendencias menos positivas. Nuestro papel es obtener lo mejor de cada una de ellas, lo que converge hacia el sentido más genuino de lo humano, y que, naturalmente, produce un espíritu de paz.

¿Cómo se podría definir, en ese mismo sentido, la finalidad del trabajo de la Unesco?

— Su finalidad consiste en poner de relieve, a través del pluralismo cultural, aquello que acerca a todos los hombres, es decir, aquello que en cada cultura alcanza un nivel universal. Pero para lograrlo, hay que comenzar por el principio, esto es, por la idea fundamental de que cada cultura --que a su vez es a menudo el crisol de otras culturas— posee un carácter propio, una "marca registrada" en la historia de la civilización humana, un signo de identidad que le permite reconocerse a sí misma a todo lo largo de su trayectoria y gracias al cual el resto del mundo también la reconoce.

Soy catalán y amo profundamente a mi país y la lengua que siempre he empleado para dirigirme a mis padres. Esta cultura, fruto de varias civilizaciones, define nuestro perfil específico. Sé que sólo a condición de desarrollarla sin trabas puedo trabajar por la unidad de España y por el fortalecimiento de las demás culturas nacionales. A menudo en el pasado el desconocimiento de esta verdad esencial ha fomentado el desprecio por los demás. Cabe esperar que en el futuro la concertación será tanto más fácil en la medida en que los pueblos aprendan a conocerse, a comprender sus motivaciones, sus maneras de ser y sus respectivas escalas de valores, en suma, cuando descubran que a través de esas expresiones concretas, comparten grandes aspiraciones comunes e ideales que a menudo coinciden en lo esencial.

Por tal motivo, la misión prioritaria de la Unesco en el plano cultural consiste naturalmente —según los términos mismos de su Constitución-- en "desarrollar e intensificar las relaciones entre sus pueblos, a fin de que éstos se comprendan mejor entre sí y adquieran un conocimiento más preciso y verdadero de sus respectivas vidas". La acción cultural de la Unesco apunta, en el fondo, a promover los encuentros y reuniones de artistas, artesanos, intelectuales, pintores, educadores, arquitectos, escritores y poetas de todos los países y regiones, así como a difundir los debates y conclusiones de esas reuniones. Estos hombres y mujeres representan la principal riqueza de la humanidad; pueden esclarecernos el sentido del pasado, pero también y sobre todo las configuraciones posibles del porvenir. En todos los casos, la Unesco elabora y realiza sus programas culturales con la colaboración de organizaciones no gubernamentales y de asociaciones de profesionales, artistas y creadores.

No me canso de repetir que el monumento más perfecto es el ser humano; que las obras culturales más valiosas — y las más amenazadas— son las lenguas minoritarias, las tradiciones orales, los cantos, las danzas y las costumbres de numerosos países que no participan todavía en el gran concierto cultural del mundo. Insisto en ello con vehemencia: la libertad concreta de los artistas debe ser protegida al mismo tiempo que se garantiza la supervivencia efectiva de las artes, los folklores y las culturas populares. Estas dos exigencias son inseparables.

El mundo entero conoce las grandes realizaciones de la Unesco, como el salvamento de Abú Simbel y de Borobudur. Actualmente se habla mucho del acuerdo entre las diversas partes camboyanas sobre el papel de la Unesco en la conservación de Angkor Vat...

— La Unesco está lista para actuar en cuanto las condiciones lo permitan. Pero su acción en el plano cultural se extiende más allá del salvamento de sitios y monumentos. La Unesco administra tres instrumentos jurídicos internacionales de importancia primordial: la Convención para la Protección de los Bienes Culturales en Casos de Cônflicto Armado, la Convención sobre las Medidas que deben adoptarse para prohibir e impedir la Importación, la Exportación y la Transferencia de Propiedad Ilícitas de Bienes Culturales y la Convención sobre la Protección del Patrimonio Mundial Cultural y Natural.

Además, la Unesco se consagra a traducir y publicar las obras maestras de la literatura de numerosos países, así como a compilar, grabar y difundir una colección única de discos en los que se reproducen trozos musicales de todas las regiones del mundo... Ahora, en las publicaciones, los discos y los programas de radio y televisión de numerosos países se concede un lugar cada vez más importante a las obras de otras naciones y a las realidades y problemas de regiones diversas. De manera lenta pero segura lo universal irrumpe en la vida cotidiana de cada cual. He ahí uno de los aspectos importantes y notorios de la acción de la Unesco.

¿Qué papel desempeña, en este contexto, la creación cultural propiamente dicha?

— Ella es, y no podría ser de otra manera, la obra de individuos totalmente libres de seguir su inspiración, su conciencia y su talento. Nada debe coartar o censurar esa libertad. Por el contrario, hay que hacer todo lo posible para protegerla y permitir su realización. La acción de la Unesco se lleva a cabo preparando y protegiendo el ejercicio de esa libertad; por una parte, para favorecer las condiciones óptimas de su ejercicio creador y, por otra, para denunciar sus eventuales violaciones.

Está claro que la libre circulación de las ideas y las obras procedentes de todas las culturas constituye una de las condiciones más propicias para el desarrollo de la creación y el estímulo del conocimiento, así como para ampliar los horizontes y enriquecer mutuamente las fuentes de inspiración que se ofrecen a los artistas. Al mismo tiempo, favorece la profundización de las significaciones universales que el artista puede extraer de su propia cultura.

No resulta evidente para todo el mundo la relación que existe entre un mejor conocimiento recíproco, el incremento de los intercambios culturales y la consolidación de la paz. Es sorprendente el número de conflictos que oponen a pueblos vecinos que se conocen y comunican entre sí. Además, las dos guerras mundiales estallaron en Europa, entre pueblos que compartían valores culturales esenciales y que disponían, en ese entonces, de los medios de comunicación más avanzados.

— A menudo son las ciudades vecinas, los pueblos vecinos, los que tienen más dificultades para comprenderse, precisamente por hallarse frente a frente, y cada cual siente la tentación de encerrarse en sus propias tradiciones, menospreciando las de los demás.

Así, los contactos culturales, políticos o comerciales que un pueblo ha establecido con otro no engendran necesariamente una comprensión mutua. Esos contactos pueden ocasionar conflictos o conducir a un mayor acercamiento, ya sea que se desarrollen los reflejos del miedo, la desconfianza y el desprecio hacia los demás, o que, por el contrario, se estimule la capacidad, latente en todos los pueblos, de apreciar la verdad y la belleza, procedan de donde procedan, de respetar la diversidad de las ideas y los estilos, de preferir la tolerancia y de buscar la convivencia.

Piense, por ejemplo, en la ideología nazi. ¿Cómo logró penetrar en la cultura alemana? Pervirtiendo lo más noble de esa cultura y exaltando sólo las fibras del amor de sí mismo. Los responsables nazis ignoraron el humanismo de Kant, el universalismo de Goethe, la generosidad de Beethoven; de manera sistemática se sirvieron de los resortes de la superioridad racial y del culto morboso de la violencia, esforzándose por convencer a sus compatriotas de que toda la historia alemana los conducía inevitablemente hacia ese fin. Por supuesto, para conseguirlo hubo que falsear la historia reduciéndola a un enfrentamiento entre razas y reavivando el recuerdo de guerras pasadas. Hubo que acentuar los rasgos que disminuían a los demás, haciéndolos responsables de las sucesivas desgracias de Alemania y justificando de ese modo todas las venganzas futuras. Hoy parece una locura, algo inverosímil.

Vale la pena recordar a este respecto una experiencia en la que la Unesco participó de manera directa. Inmediatamente después de la guerra, nuestra Organización se consagró, entre otras tareas, a revisar los manuales de historia a fin de señalar los errores en el relato de los sucesos así como los juicios deformados. Para llevar a cabo ese trabajo la Unesco convocó a historiadores de los dos campos que acababan de enfrentarse. Lamentablemente, aunque iniciaron su labor con muy buena voluntad, no llegaron a ningún resultado. Discreparon no sólo en la interpretación de los hechos sino en cuanto a la existencia misma de ciertos acontecimientos.

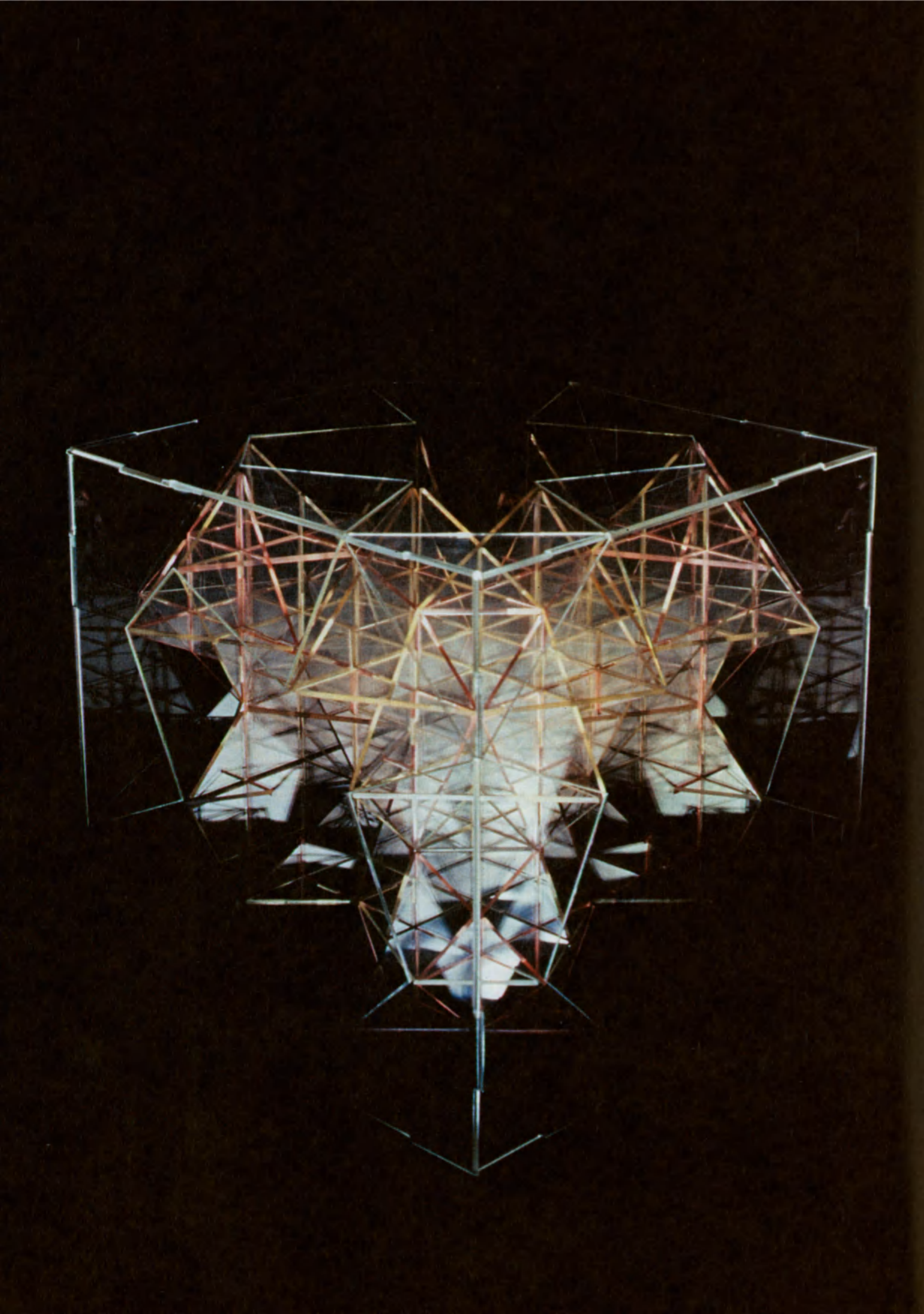
¿Cuál es su conclusión? ¿Acaso el drama de la guerra había marcado demasiado las conciencias para que fuera posible inmediatamente después tener una visión objetiva de los hechos?

— En efecto, creo que era demasiado prematuro. Pero el mal se remonta más lejos. Como acabo de señalarlo, la guerra misma había labrado un terreno ya abonado; había llegado para abrir antiguas heridas y ahondar surcos trazados por guerras anteriores, falseando la cultura y la historia. Por otra parte, la misma situación se produjo después en numerosos otros conflictos, aunque sus protagonistas no llegaran al extremo de preconizar la solución final.

La guerra tiene raíces profundas en el pasado de numerosos pueblos. Para extirparlas, es necesario un esfuerzo constante de autenticidad y de valor. Los dirigentes políticos están llamados sin duda a desempeñar un papel decisivo. Pero no son los únicos. Los filósofos, artistas, cineastas y periodistas contribuyen a ese intento, consciente o inconscientemente, en la medida en que logran suscitar el interés, el respeto y la admiración por la culturas de los demás así como por la propia.

La acción de la Unesco en este sentido puede servir de acicate y ser un instrumento de movilización y animación a escala mundial. Los científicos, los universitarios y los profesores deben también participar en este esfuerzo. La circulación sin trabas a través del mundo de la información científica y técnica constituye un medio irreemplazable de colaboración intelectual y de ayuda mutua entre investigadores de todas las regiones. Así también, el intercambio de experiencias entre educadores y formadores de todo el mundo introduce progresivamente en las mentes de los hombres la convicción de que cada uno de nosotros posee una valiosa parte de verdad... Y de que, además, nadie, absolutamente nadie, posee toda la verdad. Hay que mantener este difícil equilibrio, entre dudas y certezas, entre el respeto de sí mismo y de los demás, si se quiere servir la causa de la libertad y promover una tensión creadora permanente.

En el umbral de esta nueva fase que se abre para la historia del mundo basada en una cultura de la paz, la educación y el acceso al conocimiento deben convertirse en el patrimonio común de todos los hombres sin excepción y dejar de ser el privilegio de algunas personas en unos pocos países. Ese es nuestro sueño: escribir una página nueva en una nueva lengua, forjada, día tras día, por ciudadanos libres de decidir y de expresar sin restricciones su pensamiento y su capacidad creadora. Una lengua que traduzca un estado de ánimo auténticamente pacífico; una lengua liberada de todo exclusivismo, de toda segregación. Una lengua que sea por fin, únicamente, vehículo de cultura. ■



E D I T O R I A L

LAS matemáticas constituyen una de las formas más abstractas de la creación intelectual. Sin embargo, están íntimamente asociadas al lenguaje y a la escritura de los hombres y forman parte de sus interrogantes, prácticos o teóricos, en suma, de la historia de sus culturas.

Su aprendizaje, quién podría olvidarlo, exige tiempo y esfuerzo, y para los que hacen de ellas su oficio, requiere también pasión.

Hemos aceptado aquí un desafío: el de ofrecer a nuestros lectores, incluso a los más reacios a los misterios del cálculo, un panorama de los conocimientos y las prácticas matemáticas a través del tiempo y del espacio. Es un viaje para profanos. Se trata de Alicia en el país de las matemáticas.

Los especialistas que nos han hecho el favor de contribuir a esta empresa se han impuesto una dura tarea: la de decir lo esencial en pocas palabras y en un lenguaje accesible a todos. Cada vez que ello ha sido posible, han procurado describir el telón de fondo social, cultural e incluso lingüístico de la historia.

¿Es posible hablar, más allá de los diversos enfoques y técnicas, de una sola razón matemática común a todos ellos? La lectura de estas páginas lo sugiere en más de una oportunidad. Ello nos lleva también a meditar sobre una descripción que el pensador griego Proclo daba de la razón matemática hace ya más de quince siglos: esta razón manifestaría lo uno en la multiplicidad, lo indiviso en la división y lo infinito en la finitud.

Unión de los números 3 en el cubo numérico, escultura del artista mexicano Juan Luis Díaz.

Las fuentes del número

POR JAMES RITTER

LAS matemáticas y la escritura guardan una estrecha relación simbiótica. Recientes descubrimientos arqueológicos han revelado que los primeros sistemas de escritura surgieron para responder a la necesidad de calcular, dividir y repartir los bienes materiales de las sociedades.

Una sociedad que quiera crear unas matemáticas que se limiten al mero cálculo necesita algún tipo de soporte físico. Si no fuera por la escritura, las limitaciones de la memoria humana son tales que no es posible sobrepasar determinado grado de complejidad numérica.

Al observar la evolución que siguieron dos sistemas de escritura, uno al sur de Mesopotamia a mediados del cuarto milenio y el otro, algo más tarde, en las proximidades de Susa en Irán, los descubrimientos arqueológicos de estos últimos decenios han puesto de manifiesto que la afirmación contraria es igualmente válida: para que una sociedad pueda crear una escritura, las necesidades materiales y, sobre todo, la de llevar un registro documental, son requisitos imprescindibles.

En esas sociedades a las que hemos aludido, el soporte físico era arcilla prácticamente indestructible, y los primeros documentos eran de tipo contable. La escritura cuneiforme (en forma de cuña) mesopotámica tuvo una gran difusión en los 3000 años siguientes, ya que sirvió no sólo para el sumerio y el acadio, sino también para el hitita, el elamita, el hurrita y otras muchas lenguas del Cercano Oriente en la Antigüedad y no desapareció hasta comienzos de nuestra era.

Al mismo tiempo, hacia finales del cuarto milenio, se desarrollaba muy deprisa en Egipto una civilización independiente. En este país, las circunstancias que rodean la escritura son más confusas. En primer lugar, el soporte físico, con excepción de las inscripciones monumentales, era fundamentalmente el papiro, una planta similar al junco que crece a lo largo del curso del Nilo y en el Delta, y, en menor medida, otros materiales perecederos. Esta es la razón por la que existen muchos menos documentos de Egipto que de Mesopotamia.

En el tercer milenio empieza a aparecer gradualmente, tanto en la civilización mesopotámica como en la egipcia, un concepto abstracto del número. En principio, cada uno de ellos forma parte de un determinado sistema de unidades, razón por la que el "cuatro" de "cuatro ovejas" y el de "cuatro medidas de grano", por ejemplo, no se representan con el mismo símbolo. Los distintos sistemas de unidades tampoco guardan relación entre sí. No había correlación entre las medidas de superficie y las medidas de longitud y no se sabía calcular la superficie a partir de la longitud y de la anchura.

Pero la práctica de anotar datos, que permite llevar un registro permanente de medidas, abre la posibilidad de observar las regularidades, las pautas. Estas dos sociedades aprovecharon esa posibilidad por espacio de unos mil años. Hacia finales del tercer milenio los escribas egipcios y sumerios aprendieron a calcular el área y el volumen a partir de la longitud, a distribuir las provisiones entre los obreros, a calcular el tiempo

Arriba, parte de una regla utilizada en el Antiguo Egipto para medir el codo, unidad de longitud equivalente a 525 mm.

Vista aérea del sitio de Ur (Iraq), dominado por el zigurat (al fondo).

necesario para llevar a cabo una determinada labor en función de su magnitud, el número de hombres y el ritmo del trabajo. También hay pruebas de que, una vez establecidas estas relaciones, se llegó a un grado más alto de abstracción en el que los conceptos numéricos se fueron desprendiendo progresivamente de la unidad a la que se aplicaban.

A comienzos del segundo milenio, ambas civilizaciones habían conseguido crear unos sistemas igualmente abstractos de numeración, si bien habían escogido medios diferentes para representar las cifras. Los egipcios, al igual que la gran mayoría de las sociedades modernas, tenían un sistema numérico escrito decimal, esto es, en el que se cuenta hasta el nueve de cada unidad antes de pasar a la unidad superior siguiente (después de nueve "unos" aparece el "diez", después de nueve "dieces" aparece la centena, etc.). Pero, contrariamente a los sistemas modernos, su escritura numérica era "aditiva", esto es, había signos distintos para las unidades, las decenas y las centenas, y se trazaban tantos como fuera necesario.

En Mesopotamia se procedía de otra manera. La base de los cálculos matemáticos era sesenta; para expresar cifras superiores a 59 era necesario repetir los signos correspondientes.

La educación del escriba

Aprender a manejar estos sistemas numéricos requería una formación especializada, y la existencia de escuelas se remonta a la misma época que la invención de la escritura. Se sabe, además, que el aprendizaje de la aritmética se iniciaba en una fase temprana de la vida escolar de los niños, al mismo tiempo que la lectura y la escritura, y que las matemáticas eran consideradas, igual que ahora, una de las asignaturas más difíciles.

Abajo, dos escribas consignan los datos del botín militar de un rey asirio. Tomado de una pintura mural de la época neoasiria, desaparecida en la actualidad.

Hacia el año 2.000 a.C. se compuso en honor de Shulgi, uno de los reyes del tercer imperio de Ur en Mesopotamia, un himno literario que se convirtió en texto modelo utilizado como ejercicio escolar en la primera mitad del segundo milenio. En esa composición, el soberano se jacta de sus éxitos académicos y proclama orgullosamente: "Sé sumar y restar a la perfección, soy diestro en cálculo y en contabilidad."

Más de mil años después, el rey asirio Asurbanipal repetía prácticamente lo mismo en uno de sus himnos: "Soy capaz de hallar los números recíprocos y los productos difíciles que no figuran en las tablas."

¿Cuál sería la trayectoria de un joven escriba destinado a convertirse en "matemático" en el antiguo Egipto o en Mesopotamia? Casi con toda seguridad de sexo masculino (ya que las mujeres, aunque no les estaba prohibido recibir formación como escribas, no aparecen mencionadas en los documentos), empezaría asistiendo a la escuela, cuyo ingreso estaba abierto a dos grupos distintos. Del primer grupo integrado por los hijos de los ricos y poderosos surgirían los reyes y los altos

funcionarios, mientras que la vasta mayoría de los afortunados que habían logrado acceder a una institución educativa, uno de los medios excepcionales de ascenso social en la Antigüedad, se convertirían en meros escribas profesionales.

¿Qué aprendería el escriba durante los diez años de escolaridad como mínimo? De las dos civilizaciones han llegado hasta nosotros textos y ejercicios matemáticos, en particular los llamados "debates de escribas". Así, en un ejemplo procedente de Mesopotamia, un escriba alardea de sus capacidades ante otro:

Quiero escribir tablillas:
tablas [*de medidas*] *desde 1* gur *de cebada hasta 600* gur;
tablas [*de peso*] *desde 1 siclo hasta 20 minas de plata,*
con los contratos de matrimonio que pueden presentarme,
los contratos comerciales,...
la venta de viviendas, campos, esclavos,
prendas de plata, contratos de arriendo de campos,
contratos de cultivo de palmeras, [...],
incluso las tablas de adopción; todo esto sé escribir.

En un texto típicamente egipcio, un escriba se mofa de otro en los siguientes términos:

Vienes hasta mí y me abrumas hablándome de tu cargo. Yo desenmascararé tu presuntuosa actitud cuando te encomienden un trabajo. Pondré al descubierto tu fatuidad cuando digas: "Soy el escriba, capataz de la cuadrilla de obreros"...

Hay que construir un terraplén de 730 codos de largo por 55 codos de ancho, con 120 compartimentos rellenados con baquetas y vigas; con una altura de 60 codos en su parte más alta, 30 codos en el medio; con una inclinación de 15 codos; con una base de 5 codos. Se pregunta al jefe de la cuadrilla cuál es la cantidad de ladrillos.

Todos los escribas están reunidos pero ninguno sabe cómo hacerlo. Depositan en tí su confianza y dicen: "¡Amigo, tú eres un escriba inteligente! Decide rápidamente por nosotros, ya que tu nombre es famoso."...Que no se diga: 'Hay algo que ignora'. "Indícanos la cantidad de ladrillos. Mira, aquí tienes las medidas; cada uno de los compartimentos tiene ꞁ0 codos [*de largo*] *y 7 codos* [*de ancho*]."

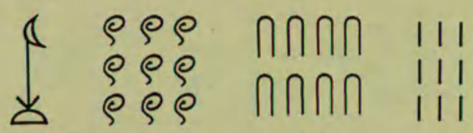
Ahora bien, los textos citados son más literarios que matemáticos. Se conocen, de hecho, algunos textos matemáticos escolares de cada una de esas civilizaciones, casi todos ellos de dos periodos

Arriba, tres escribas hacen el inventario de un patrimonio fúnebre. Mastaba de Akhethotep, dinastía V del Imperio Antiguo (2450-2290 a.C.).

Sistemas numéricos egipcios y babilonios

He aquí cómo los escribas de Egipto y de Babilonia habrían escrito 1989 utilizando sus respectivos sistemas numéricos.

Egipto



1000 900 80 9

El sistema egipcio, que aparece aquí en escritura jeroglífica, se basaba en el 10. Se observan *un* signo para los miles, *nueve* signos para las centanas, *ocho* para las decenas y *nueve* para las unidades.

Babilonia

33 9

El sistema babilonio se basaba en 60. A partir de 60, mil novecientos ochenta y nueve se habría escrito con *treinta y tres* veces sesenta y *nueve* unidades. La posición del 9, a la derecha indica que constituye las unidades, en tanto que el 33, a la izquierda, representa los múltiplos de 60.

diferentes: la primera mitad del segundo milenio y la época de la dominación griega y romana, a finales del primer milenio. Son de dos tipos, textos de tablas y textos de problemas.

Un ejemplo típico de los primeros es una tabla babilónica de raíces cuadradas que data del segundo milenio. Para componer estas tablas de cálculo sistemáticas y estructuradas se requiere haber alcanzado un alto grado de abstracción. ¿Qué hacía el escriba cuando necesitaba conocer una raíz cuadrada? Si no figuraba en la tabla, podía calcularla, mediante una simple interpolación, a partir de los valores próximos que sí aparecían en ella. Este método era el habitual, incluso en Occidente, hasta fechas bastante recientes, y así es como los egipcios y los babilonios utilizaban sus tablas de multiplicación, raíces cuadradas y sumas de fracciones.

Otra categoría de textos matemáticos propone problemas como, por ejemplo, este problema tipo hallado en un papiro egipcio de mediados del segundo milenio:

Una pirámide. El lado tiene 140 [*codos*] *y la inclinación es de 5 palmos y 1 dedo* [*por codo*]. *¿Cuál es su altura?*

Estos textos se inician con una exposición del problema matemático que se trata de resolver, y los datos se presentan como cifras concretas y no como variables abstractas. Sigue a la exposición del problema la forma de irlo solucionando paso por paso, para llegar finalmente al resultado. Cada nuevo paso se basa en el resultado de un paso anterior o bien en uno de los datos facilitados al principio.

No se recurre a ningún argumento para justificar el procedimiento ni se da la menor explicación de la fórmula, pero incluso con los valores numéricos citados, lo esencial de ella resulta perfectamente comprensible. El alumno quedaba así capacitado para resolver cualquier otro problema del mismo tipo que pudiera presentársele. Además estos problemas solían reagruparse de modo que las técnicas aprendidas pudieran aplicarse inmediatamente en otros casos. El problema mencionado más arriba, por ejemplo, aparecía después de otro en el que se trataba de determinar la inclinación de una pirámide en función de su longitud y de su altura, y tras él venía uno nuevo relativo al cálculo de la inclinación de un cono.

Ahora bien, no todos los problemas matemáticos tenían una orientación tan práctica como éste. La finalidad principal de los ejercicios matemáticos escolares era familiarizar al futuro escriba con las técnicas matemáticas empleadas para resolver problemas. El objetivo que se trataba de alcanzar era la instrucción técnica y no la aplicación directa, motivo por el que muchos de los problemas aparentemente "prácticos" que figuran en estos textos tenían muy poco que ver con la vida real. Como ejemplo de la prioridad que se daba a la preparación técnica sobre la aplicación realista, cabe citar una tablilla babilónica que plantea un problema en el que se utiliza para medir un terreno una vara de medición rota, o bien el problema egipcio de un escriba al que se pide que calcule las primitivas dimensiones de un rebaño en función del número de reses con las que el propietario ha pagado sus impuestos.

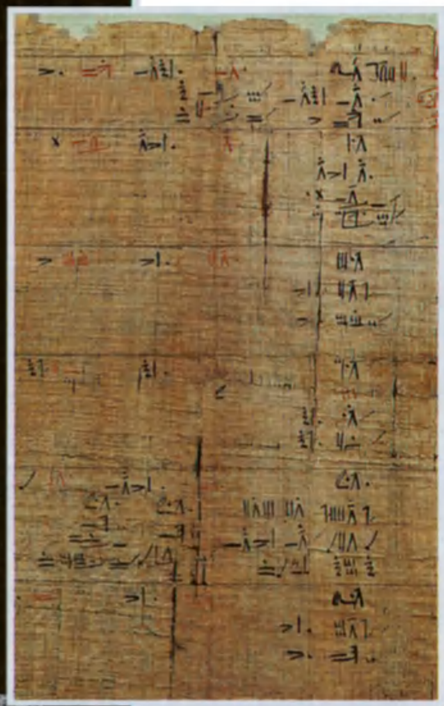
La finalidad pedagógica de estos ejercicios salta a la vista. Además, la estructura de los textos de los problemas y las tablas permite abordar de otro modo la cuestión de la abstracción y la generalización en las matemáticas. En vez de optar por elevar la simbolización, caracterizada por una jerarquía de "grados de generalidad", el planteamiento de los egipcios y babilonios consiste en crear una cadena de ejemplos típicos gracias a la cual es posible, por interpolación, establecer una relación entre un problema nuevo y los ya conocidos.

Exactamente este mismo planteamiento fue el que se adoptó en otras ramas del saber antiguo como la medicina, la adivinación y la astronomía, consideradas en Egipto y en Mesopotamia, al igual que las matemáticas, como una práctica conceptual particular.

"Matemático", una palabra que no existe

Es posible seguir la trayectoria de un joven aspirante a escriba una vez concluida su formación gracias a un número considerable de fuentes — textos contables, listas de profesiones y referencias en textos literarios o históricos.

JAMES RITTER, estadounidense, es profesor de matemáticas y de historia de las ciencias de la Universidad de París VIII. Sus trabajos versan sobre la teoría de la relatividad y su historia, así como sobre las prácticas de la razón en el Antiguo Egipto y en la Mesopotamia. Ha participado, bajo la dirección de Michel Serres, en una obra colectiva sobre la historia de las ciencias (París, Bordas, 1989).



Arriba, un extracto de la gran tabla de duplicación de las fracciones impares del papiro Rhind. Este papiro, que data del Imperio Medio (2040-1785) y fue recopiado en la época de los hicsos (1650-1551), es una de las escasas fuentes disponibles para el conocimiento de las matemáticas del Antiguo Egipto.

A la izquierda, tablilla mesopotámica de comienzos del segundo milenio a.C.

Sin embargo, es infructuosa la búsqueda de ıa sola mención de un "matemático" en el senlo moderno del término, esto es, un individuo e trabaja en una comunidad reconocida de instigadores con objeto de ampliar nuestros cocimientos de las propiedades de los números las cifras. En las antiguas lenguas de Egipto y esopotamia no existía una palabra para desigr a un "matemático".

Así pues, el joven escriba podía seguir dos mbos distintos. Unos cuantos se dedicarían a enseñanza de las matemáticas y tal vez inven-ían nuevos problemas para presentarlos a la óxima generación de alumnos, lo que, con el so del tiempo, iría ampliando y perfeccionando acervo de técnicas matemáticas de su tiempo.

Pero lo más probable es que el joven graduado ejerciera como contable, calculando el trabajo, las raciones, los terrenos y los cereales. Estos escribas estaban omnipresentes, y su diligente actividad al servicio de su señor está minuciosamente representada en los frescos murales egipcios y en los relieves asirios. Su posición aparece como subalterna pero privilegiada. Al igual que sus colegas que habían elegido la docencia, no eran ellos los depositarios del poder en aquellas antiguas sociedades, pero estaban al servicio de quienes regían sus destinos y gozaban de suficientes privilegios como para haber sido inmortalizados en los muros de sus amos como signo visible de ese poder que tanto se esforzaban por contabilizar. ■

INDIA

Lilavati, la graciosa aritmética

POR FRANCIS ZIMMERMANN

Texto sánscrito del año 750 con dibujos de figuras geométricas. Manuscrito de fecha desconocida.

Página de la derecha, reloj de sol del Observatorio al aire libre de Jaipur (India), construido en 1728.

LOS sabios árabes, presentes en la India desde el siglo VIII de nuestra era, hicieron en los textos sánscritos dos descubrimientos capitales que desarrollaron posteriormente por su cuenta y transmitieron a Occidente: la escritura de los números en el sistema decimal, con la noción de cero por una parte y, por otra, la trigonometría de los senos. Estas incursiones de los matemáticos de la India antigua en el ámbito de la escritura, del cálculo y de la triangulación no eran producto de la casualidad sino que respondían a las preocupaciones tradicionales de la India, cuyos sabios han mostrado siempre un gusto y un talento particular en relación con la gramática.

Problema de aritmética tomado del *Lilavati* (Aritmética) de Bhaskara, matemático indio del siglo XII.

अथ विश्लेषजात्युदाहरणम्—
पञ्चांशोऽलिकुलात्कदम्बमगमत्त्र्यंशः शिलीन्ध्रं तयो-
र्विश्लेषस्त्रिगुणो मृगाक्षि कुटजं दोलायमानोऽपरः ।
कान्ते केतकमालतीपरिमलप्राप्तैककालप्रिया-
दूताहूत इतस्ततो भ्रमति खे भृङ्गोऽलिसंख्यां वद ॥

Ejemplo de reducción de fracciones al mismo denominador

De un enjambre de abejas, 1/5 de las abejas vinieron hacia una flor de loto, 1/3 hacia un banano. (Un número igual a) tres veces la diferencia entre las dos (cifras precedentes) —¡Oh bella con ojos de gacela!— (voló) hacia un árbol Codaga (con corteza amarga, sucedáneo de la quina). Otra, por último, balanceándose, deambula por aquí y por allá en los aires, atraída al mismo tiempo por el delicioso perfume del jazmín y del pandano. Dime, querida mía, ¿cuántas son esas abejas?

Llamemos x el número de abejas:

$$x = \frac{x}{5} + \frac{x}{3} + 3\,x\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + 1$$

Reduciendo las fracciones a un común denominador, se obtiene:

$$x = \frac{3\,x}{15} + \frac{5\,x}{15} + 3\,x\left(\frac{5}{15} - \frac{3}{15}\right) + 1$$

$$x = 15$$

Matemáticas y escritura

Las matemáticas comparten, en efecto, con todas las demás disciplinas científicas de la India antigua ciertas limitaciones y un estilo ligados a la lengua sánscrita y a la versificación.

Los grandes textos matemáticos están en sánscrito; en principio, son la obra de un brahmán. Un texto básico a menudo elíptico —aforismos (es el significado de la palabra *sutra*) o bien estrofas que se aprenden de memoria— es objeto de una sucesión ininterrumpida de comentarios en prosa. Estos esclarecen el sentido junto con confirmar el carácter aforístico de los textos antiguos, concebidos manifiestamente como resúmenes de la enseñanza de un maestro deseoso de dejar su impronta en la memoria de sus discípulos.

Cifras y simbolismos numéricos

Existen testimonios antiguos del empleo de cifras, en el sentido de símbolos gráficos, en las inscripciones en piedra o en cobre que estudian los arqueólogos. Así, las cifras 4 y 6 se han encontrado en las inscripciones de Asoka que datan del siglo III a.C.; pero están poco presentes en los textos matemáticos propiamente dichos. Los denominados números "arábigos", porque fueron transmitidos por autores árabes, dieron origen a los números indios; pero por lo general se emplean poco en los textos sánscritos, en los que los números se indican en letras o se simbolizan mediante ordenaciones alfabéticas.

Los números se disponían verticalmente en varias líneas; por lo menos es lo que se desprende del comentario del *Aryabhatiya* compuesto por Bhaskara el Antiguo en 629 d.C. Ahora bien, que estén hechos en papel o en hojas de palmera, los manuscritos indios por lo general no duran más de tres siglos; transcurrido este lapso, son

destruidos por los insectos o por el moho. Los manuscritos de ese comentario que han llegado hasta nosotros son copias modernas y no pueden constituir un testimonio de la forma de escribir en una época anterior. El manuscrito de Bakhsali (siglo XII) es sin duda en ese sentido el documento más antiguo: ilustra operaciones en números arábigos dispuestas en varias líneas, en unas especies de cartuchos o recuadros.

En cuanto a los textos matemáticos clásicos, la ausencia de símbolos gráficos, de cifras, en los aforismos o las estrofas no impide que se recurra a un simbolismo. Simplemente, ese simbolismo es de carácter gramatical o retórico. Las cifras se representan mediante clichés literarios y metáforas, gracias al juego ilimitado de sinonimias que caracteriza la lengua sánscrita. Así, *nayana* (ojo) o *bahu* (brazo) son nombres del número dos. *Agni* (el fuego) designa el 3 (hay tres fuegos rituales védicos) y *adri* (montaña) designa el 7 (las siete montañas de la India en la geografía religiosa). Los vocablos sánscritos para "cielo" o "espacio" designan el cero. El orden del enunciado de las cifras en el interior del número es el inverso del nuestro: 23 se dice *agni-nayana*.

Este simbolismo es útil para escribir en verso series de números que hoy día se presentarían en forma tabulada. En los almanaques, en la India como en otras partes desde hace siglos, los datos astronómicos se disponen en columnas de cifras, pero esta forma de presentación, inventada por los árabes, es relativamente reciente. Las series de cifras en los textos sánscritos antiguos aparecían en forma de versos o de estrofas.

Otro tipo de simbolismo numérico utilizado frecuentemente en los textos astronómicos y matemáticos se basa en el alfabeto sánscrito. Varios son los sistemas empleados, y en particular el sistema *katapayadi*, muy difundido en el sur de la India, que permite expresar los grandes números y las tablas trigonométricas en forma de juegos de palabras, aforismos o estrofas mnemónicos. El sistema es suficientemente flexible como para permitir escribir números recurriendo a expresiones que admiten una doble interpretación. Por ejemplo, *acaryavag abhedya*, exhortación brahmánica que significa literalmente "no debe traicionarse la palabra del Amo", es la escritura en clave del número 1434160, cronograma que designa el día 1434160 de la era Kali, día en que el filósofo Sankaracarya introdujo ciertas reformas.

¿Tuvo en este caso la escritura poética una influencia sobre el razonamiento? ¿Existía acaso un carácter específico, algo especial en el pensamiento y en la posición social de los matemáticos indios que los movía a volcar su enseñanza en el molde de un discurso literario?

***B**ronce del siglo XI que representa a Shiva Vinadhara. La palabra sánscrita **Rudrasya** (los cinco rostros de Shiva) simboliza el 5.*

La relación entre la circunferencia y su diámetro

चतुरधिकं शतमष्टगुणं द्वाषष्टिस्तथा सहस्राणां।

अयुतद्वयविष्कम्भस्यासन्नो वृत्तपरिणाहः ॥

caturadhikam satam astagunam dvāsastis tathā sahasrānām
ayutadvayaviskambhasyasānno vrttaparināhah

"Sumar cuatro a cien, multiplicar por ocho, sumar todavía sesenta y dos mil. Se obtiene así un valor aproximado (*asanna*) de la circunferencia de un círculo cuyo diámetro es de dos miríadas."

Este verso de Aryabhata, matemático indio del siglo IV, nos da la más antigua formulación sobre el valor aproximado de la relación que más adelante se denominará *pi*:

$$\frac{\text{circunferencia}}{\text{diámetro}} = \frac{62832}{20000} = 3{,}1416$$

"Especialistas en astros"

Nunca hubo en la India una casta de matemáticos, ni verdaderamente una escuela. Los matemáticos, si denominamos así a los autores y a los usuarios de los textos sánscritos que tratan de geometría, de aritmética y de álgebra, trabajaban en relación más o menos estrecha con los especialistas en el ritual védico o brahmánico. Brahmanes o miembros de castas elevadas, de cultura sánscrita, eran, en la clasificación de los hombres de ciencia, *jyotirvid*, "especialistas en astros." La mayoría de los textos matemáticos figuran en tratados de astronomía; la trigonometría, por lo demás, no adquiere todo su sentido sino en el estudio de las distancias angulares entre los astros.

FRANCIS ZIMMERMANN,
filósofo y etnólogo francés, es director de investigaciones del Centro Nacional de Investigaciones Científicas (CNRS) de Francia. Ha publicado recientemente *Le discours des remèdes au pays des épices* (El discurso de los remedios en el país de las especias, 1989).

Como todas las ciencias (las *sastra*) brahmánicas, las matemáticas se cultivaron en principio con fines religiosos: contribuían a la ejecución adecuada de los ritos. Nada sabemos de la vida de los grandes matemáticos, pero podemos imaginar sin temor a equivocarnos el marco ritualista y escolástico en el que trabajaban pues impregna el estilo de los textos sánscritos. Apoyándose en un texto que los alumnos aprendían repitiéndolo palabra por palabra hasta que "se les pegara en la garganta" (lo supieran de memoria), la enseñanza oral del maestro proporciona las ilustraciones, las demostraciones y las operaciones que implica el texto. Este es una llave que abre el campo del saber, un instrumento de realización espiritual.

El *Lilavati* de Bhaskara (siglo XII) desempeña tradicionalmente este papel para la aritmética y por ello concluye con una estrofa con doble significado en la que Bhaskara compara su *Lilavati*, su "graciosa" (palabra que también designa la aritmética), con una mujer adornada de todas las bellezas de la *jati* (término que significa a la vez un noble "linaje" y, en sentido técnico, la reducción de las fracciones al "común denominador"): "Júbilo y felicidad no cesarán de aumentar en este mundo para los que la tienen *kanthasakta*, estrechamente enlazada o pegada en la garganta (repitiéndola hasta saberla de memoria)."

De la geometría ritual al tratado de Bhaskara

Los textos más antiguos que han llegado hasta nosotros son los *sulbasutra*, "aforismos sobre los cordeles", que fueron compuestos probablemente entre los siglos V y I a.C. Consisten en textos que establecen las reglas de construcción de los altares, hechos de ladrillos amontonados en formas simbólicas, para el ritual de los sacrificios védicos. Las construcciones geométricas que en ellos se enseñan se basan en el conocimiento de numerosos casos particulares de triángulos rectángulos (lados 3-4-5, por ejemplo, o 5-12-13, 7-24-25, etc.) y en la regla general de que "la cuerda diagonal de un rectángulo produce (al construirse sobre ella un cuadrado) a la vez lo que producen separadamente el largo y el ancho, y la cuerda diagonal de un cuadrado produce (al construirse sobre ella otro cuadrado) el doble de su área". Es la fórmula india del teorema de Pitágoras. Aquí esta regla no se formula como un teorema sino como un aforismo, una disposición para la buena marcha del ritual, una regla de construcción. La propia palabra *sutra*, que en un principio designaba un estilo, el aforismo, llegó a significar una "regla", y en sentido técnico, en los tratados ulteriores, una regla de construcción.

No hay teoremas en las matemáticas indias sino reglas que son objeto de una intuición en el punto de partida del razonamiento. Las reglas, los aforismos y las estrofas mnemónicos de los textos básicos no son el resultado de una demostración, sino, por el contrario, disposiciones con miras a un trabajo de construcción geométrica que efectuará el lector o el comentarista. Incluso en álgebra, la forma de razonamiento más típica asocia áreas a los productos de factores e implica la construcción de una figura.

Nanda, padre adoptivo de Krishna, consultando a un astrólogo. Miniatura de la escuela de Kangra (fines del siglo XVIII).

Se sostiene a menudo que los indios no fueron geómetras sino algebristas. En realidad, a cada instante en los comentarios sobre los textos de Aryabhata (siglo VI), Brahmagupta (siglo VII) y Bhaskara (siglo XII), la geometría permite la aplicación de reglas de aritmética y de álgebra. Se tratan al mismo tiempo, como dos aspectos de una misma realidad, una magnitud geométrica y un conjunto numérico. La solución algebraica viene a incorporarse en la construcción geométrica. Demostrar es exhibir la solución, hacerla intuitivamente manifiesta y, como dice el comentarista: "La demostración por las cantidades debe exhibirse a los que no comprenden la que se obtiene por las áreas." Así, en matemáticas indias, razonar es aclarar una intuición. ■

CHINA

Las llaves del cálculo

POR JEAN-CLAUDE MARTZLOFF

LOS antiguos chinos definían sus matemáticas como "el arte del cálculo" (*suanshu*), que consiste en realidad en un vasto conjunto de prácticas y de corrientes que se desarrollaron en el mundo chino entre el primer milenio antes de nuestra era y la caída de la dinastía manchú, en 1911. Ulteriormente, las matemáticas chinas se occidentalizaron y el saber matemático tradicional se tornó casi impenetrable sin una formación clásica.

Adivinación, astronomía y matemáticas

Aunque la escritura china cumplía una importante función ya en la época remota en la que se constituyeron los grandes textos canónicos chinos (los "clásicos", elemento esencial de la formación de las elites intelectuales de todas las épocas), las matemáticas no se consideraban un saber que valiera la pena preservar en textos autónomos.

No obstante, las matemáticas aparecen ya al surgir lo que el sinólogo L. Vandermeersch califica de "racionalidad divinatoria", organizada en sus comienzos en torno a la adivinación mediante el carey de tortuga, los huesos de diversos cuadrúpedos o la aquilea.[1] Esta adivinación fundaba sus pronósticos en la interpretación de los signos naturales más variados, especialmente meteorológicos y astronómicos (arco iris, halos, vientos, meteoros, conjunciones astrales, eclipses, manchas solares, posición de los astros, etc.). Sin embargo, esta estructuración mágica del mundo no excluía los medios de investigación puramente racionales; los adivinos intentaron, con cierto éxito, incorporar todo lo que observaban en esquemas numéricos y aritméticos, destinados al registro de los signos memorables del pasado y a la predicción de ciertos acontecimientos recurrentes. Algunas predicciones relativas a fenómenos celestes periódicos y regulares comenzaron a verificarse

Las 1420 estrellas de este mapa polícromo del cielo, que data de 1453, decoran el techo artesonado de una sala del templo de Longfu, Beijing.

1. Aquilea o milenrama: planta de hojas recortadas, de la familia de las compuestas.

claramente, lo que dio origen al calendario y a la astronomía-matemática.

Ahora bien, cada dinastía solía afirmar su legitimidad mediante el establecimiento de un nuevo sistema de cálculo cuyas técnicas debían servir tanto para apreciar los acontecimientos del pasado, consignados por los redactores de anales, como para predecir los acontecimientos futuros. Por lo tanto, la clase dirigente necesitaba personas competentes en la práctica de los cálculos astronómicos y de calendarios. Así nació, poco a poco, un cuerpo especializado de cronólogos imperiales que cumplían simultáneamente funciones de historiadores-analistas y de astrólogos-calendaristas.

La persistencia de las exigencias de quienes estaban en el poder explica que en China la escena matemática haya estado dominada por la búsqueda de procedimientos adecuados para predecir los grandes acontecimientos celestes (conjunciones, ocultaciones, eclipses).

Sin embargo, como los astrónomos-calendaristas de la China imperial tenían generalmente una situación social modesta y sus conocimientos se transmitían de generación en generación, a menudo se denigraba su actividad y no se veía en ella más que estancamiento y respeto obtuso de la tradición.

En realidad, se advierte más bien una extraordinaria permanencia de los conflictos que oponían a las escuelas rivales. Desde el comienzo de nuestra era hasta el siglo XVI el calendario fue reformado por lo menos cincuenta veces. Esos conflictos, empero, resultaron más constructivos que destructivos, pues llevaron a una adecuación progresiva entre la realidad observada y los cálculos previos.

Lamentablemente sólo han llegado hasta nosotros unas pocas obras dedicadas exclusivamente a la astronomía-matemática; a menudo sólo existen monografías redactadas por letrados no especialistas e insertadas en forma abreviada en los sucesivos anales dinásticos.

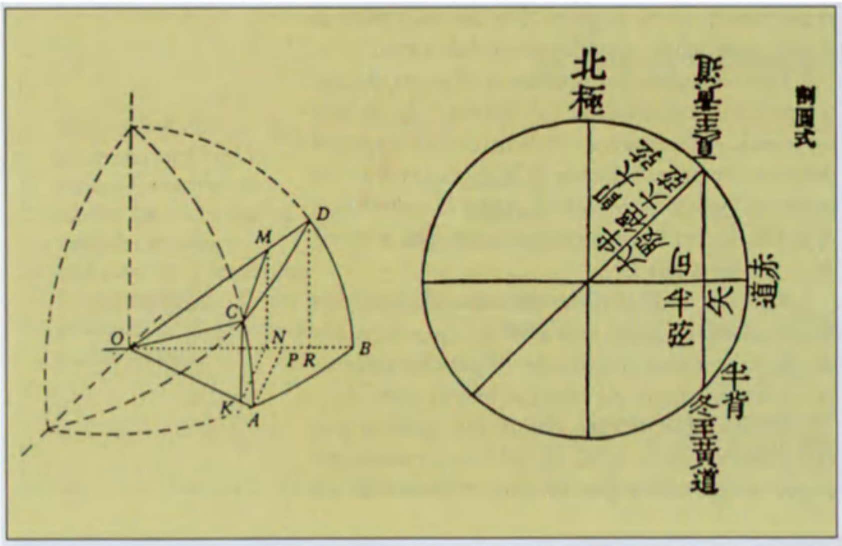
Yao, emperador legendario, encarga a los astrónomos Hsi y Ho que establezcan el calendario y rindan homenaje a los astros. Grabado de fines de la época manchú (1905).

Los funcionarios matemáticos del Celeste Imperio

Bajo la dinastía Han (206 a.C.-220 d.C.) aparece otra clase de matemáticas, consignadas ahora en manuales autónomos e independientes compuestos por colecciones de problemas acompañados de recetas para resolverlos y agrupados en capítulos en función de centros de interés determinados. Con frecuencia, los datos son tan precisos y los enunciados tan realistas que casi permiten reconstituir cabalmente la vida socioeconómica de la China en determinadas épocas. No se deja de lado ningún detalle concreto, trátese ya de la recaudación de los impuestos, de las prestaciones personales, de los pesos y medidas, de la moneda, de la construcción de diques o de canales, ya de gestión de la mano de obra o de los transportes terrestres o fluviales, de asuntos policiales o de logística militar. Con estos manuales se formaron las generaciones de "funcionarios-matemáticos" que requería la burocracia imperial.

La dinastía Tang (618-907) había establecido un sistema de exámenes que sancionaba ciclos de estudios relativos tanto a las letras como a las matemáticas. Aunque en los programas de estudios las matemáticas figuraban en último lugar, los estudios de esta disciplina en el *Guozijian*, el "Colegio de los hijos del Estado", duraban siete años y comprendían las "Diez obras canónicas de matemáticas" (*Suanjing shi shu*). Bajo los Song del Sur, en 1084, las autoridades centrales consideraron conveniente hacer imprimir todos los manuales de matemáticas, pero después de 1230 se excluyeron definitivamente las matemáticas de estos programas de exámenes que pasaron a abarcar solamente las materias literarias.

Paradójicamente, los breves periodos de institucionalización de la enseñanza de las matemáticas no fueron aquellos en los que éstas alcanzaron su apogeo. Por el contrario, los progresos más sobresalientes coincidieron con fases de división del Imperio, de guerras y de descomposición



Problemas de trigonometría esférica de los astrónomos-calendaristas Kuo Shou Ching (1276, a la izquierda) y Hsing Yun Lu (1600, a la derecha).

de la burocracia. En la época de los Reinos Combatientes (453-222 a.C.) una secta de monjes predicadores, los Mohistas (discípulos de Mozi), elaboró los rudimentos de una lógica que cayó rápidamente en el olvido. En la etapa de la división de la China en tres reinos (220-265) apareció el matemático más importante de la China antigua, Liu Hui, autor de verdaderas demostraciones matemáticas, y de cuya vida lamentablemente nada se sabe. En tiempos de las conquistas de los mongoles se ven surgir repentinamente soluciones inéditas que se olvidan con la misma rapidez.

En la misma época aparece Zhu Shijie, original profesor itinerante que, hacia el año 1300, recorría China enseñando los resultados de sus investigaciones. También en esos años turbulentos el ermitaño Li Zhi (1192-1279) organizó un círculo privado dedicado al estudio de los misterios del mundo y del número, que dio origen al álgebra china. Finalmente, en el siglo XIX, poco después de la güerra del opio, cuando el Imperio chino se encontraba en una situación desastrosa,

Tapa de un cofre de la época de los Reinos Combatientes (hacia 433 a.C.): la Osa Mayor, en el centro, rodeada de los nombres y símbolos de las 28 casas lunares.

Li Shanlan (1811-1882), habiendo fracasado en los exámenes literarios, se entregó a las delicias del arte y descubrió asombrosas fórmulas sumatorias acabadas, perfectamente correctas, que un siglo más tarde iban a sumir en la mayor perplejidad a matemáticos de tanta envergadura como el húngaro Paul Turan.

Las razones por las cuales las matemáticas florecían de esta manera tan súbita como efímera son obscuras. Es posible que la anarquía política liberara a la elite intelectual de la obligación de preparar los esterilizantes concursos que daban acceso a los cargos de mandarín. Como el confucianismo, ideología dominante, atribuía a las matemáticas un lugar subalterno, quienes se sentían

Atraídos por esa disciplina podían dar libre curso a sus inclinaciones sin correr ningún peligro.

A partir del siglo XVIII, algunos amantes de la filología y especializados en crítica de textos concibieron la idea de recurrir a las matemáticas como ciencia auxiliar de la historia. Hubo quienes procuraron utilizar la astronomía matemática para verificar la autenticidad de los clásicos, tratando, por ejemplo, de determinar mediante el cálculo la realidad histórica de ciertos acontecimientos naturales mencionados en documentos antiguos (sobre todo eclipses lunares o solares). Otros se apasionaron por el estudio de las "ciencias concretas": economía monetaria, hidráulica, ingeniería civil, arquitectura, etc. Estas incursiones por senderos solitarios y escarpados engendraron a veces el gusto por las matemáticas puras, independientes de sus aplicaciones.

También podríamos destacar el papel que desempeñaron los contactos con los extranjeros: con los indios en la época de la difusión del budismo durante el primer milenio de nuestra era, con los pueblos árabes y persas durante la expansión mongol, o con los misioneros europeos a partir de fines del siglo I.

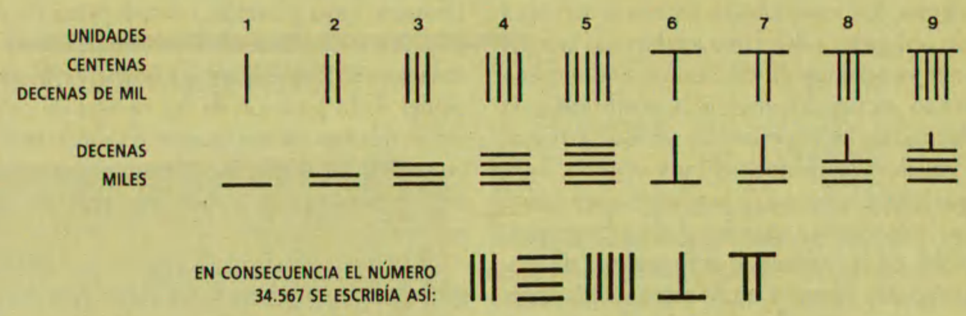
Antes de 1600 se observan coincidencias con matemáticas de otras culturas, sin que se pueda decidir si son una muestra de influencias recíprocas o simplemente de una evolución paralela.

Por ejemplo, el cero chino, que aparece por vez primera hacia 1200 en tablas astronómicas y que se representa por escrito en forma de un

Cuadrante lunar ecuatorial en bronce dorado de la época de la dinastía Qing (1744).

El sistema numérico chino

Hacia el siglo III a.C. se desarrolla en China el empleo de varillas para escribir los números. Las unidades se anotan verticalmente y las decenas horizontalmente. El valor de los signos se determina por su posición:



pequeño círculo, como se hace actualmente, podría ser de origen indio. Numerosas representaciones matemáticas, antiguas o medievales, helénicas, indias, árabes, europeas o chinas, presentan semejanzas sorprendentes. En China y en Grecia existían técnicas matemáticas muy similares: la determinación del volumen de la pirámide, primero por Euclides y más tarde por Liu Hui (siglo III de nuestra era); el cálculo del volumen de un sólido mediante la intersección de dos cilindros ortogonales, efectuado por Arquímedes y por el mismo Liu Hui; y podrían citarse muchos otros ejemplos.

Aunque estas coincidencias expresen esencialmente verdaderas influencias, las matemáticas chinas poseen una coherencia interna y su propio modo de desarrollo.

La originalidad de las matemáticas chinas

No se hallarán en las matemáticas chinas los razonamientos geométricos insertados en tramas lógicas y discursivas a base de axiomas, de postulados, de definiciones o de teoremas, ni las verdades absolutas al estilo euclidiano, sino solamente verdades relativas y provisionales. En geometría no hay ángulos ni paralelas, sino únicamente longitudes, áreas y volúmenes. Tampoco existe un álgebra semejante a la árabe, ni la búsqueda de raíces de ecuaciones mediante radicales o por intersección de curvas algebraicas, ni el álgebra "retórica", es decir, expuesta por escrito en frases largas y verbosas.

No obstante, las matemáticas chinas no se fundan en procedimientos puramente empíricos. En realidad, se basan en razonamientos o en procedimientos operatorios construidos en torno a principios heurísticos; se trata de poner de relieve el proceso de descubrimiento antes que presentar los detalles del razonamiento de lo ya adquirido. Por ejemplo, uno de los principios cardinales de la geometría china estipula que el área o el volumen de una figura no experimentan variación alguna después de fragmentarla y de volver a ensamblar los trozos, incluso si el número de éstos se torna potencialmente infinito. Este tipo de principios no excluyen de ningún modo el empleo de un sistema axiomático pero, en realidad, las figuras chinas no son generalmente objetos ideales abstractos, sino más bien piezas de un rompecabezas, perfectamente tangibles, que es posible distinguir gracias a su color y manipular a voluntad. La geometría china se basa esencialmente en ingeniosas disecciones que permiten mostrar ciertos resultados. Un procedimiento de esta naturaleza desempeña un importante papel, pues sirve no sólo para calcular áreas y volúmenes, sino también para poner de manifiesto algunas propiedades relativas al triángulo rectángulo, para el cálculo de la suma de series, la resolución de ecuaciones o de sistemas de ecuaciones, y para demostrar en forma visual el equivalente de las "identidades extraordinarias".

Es más, la geometría china no considera escandaloso (como lo habría hecho Euclides) recurrir al cálculo o a cualquier arbitrió que pueda ser útil en una situación determinada. En una palabra, no repara en medios. Este rasgo proviene sin duda del taoísmo; en efecto, se sabe que los matemáticos chinos de los siglos III a V de nuestra era admiraban incondicionalmente a Zhuangzi, padre del taoísmo filosófico, que negaba que el el lenguaje fuera un medio fundamental de acceso a la realidad.

Sosteniendo que sus límites quedaban demostrados por los razonamientos falaces de los sofistas, había llegado a la conclusión de que el razonamiento discursivo, capaz de engendrar conclusiones a todas luces falsas, no era un medio seguro de aprehender la realidad. De ahí que los matemáticos chinos, bajo la influencia del taoísmo, confiaran muy poco en el lenguaje. En cambio, se observa en ellos una tendencia a emplear todos los medios a su alcance, sin menospreciar jamás el testimonio concreto de los sentidos. Esto explica que fueran propensos a los cálculos y a toda clase de manipulaciones que les permitieran evitar la verbalización, y que sólo recurrieran en última instancia al razonamiento discursivo.

Cabe preguntarse cómo es posible que una matemática tan invadida por lo concreto haya producido resultados tan complejos. En realidad, el carácter concreto de las manipulaciones chinas

JEAN-CLAUDE MARTZLOFF, sinólogo francés, es encargado de investigaciones del Centro Nacional de Investigaciones Científicas (CNRS) de Francia. Ha estudiado, en particular, los intercambios entre la ciencia china y otras tradiciones científicas. Es autor de una historia de las matemáticas chinas (París, Masson, 1987).

no supone en absoluto una falta de abstracción; muy por el contrario, algunos resultados obtenidos mediante la manipulación de piezas de rompecabezas suponen un gran ingenio y una extraordinaria capacidad de abstracción.

Además, los matemáticos chinos se vieron a menudo obligados a deformar a sabiendas la realidad, pues les era muy difícil enseñar su disciplina respetando escrupulosamente la profusión y la complejidad de las experiencias vividas. Por esta razón muchos problemas chinos ocultan, bajo una apariencia concreta, situaciones puramente ficticias: valores muy grandes o muy pequeños, imposibles en la realidad, o desprovistos de sentido, como por ejemplo un número de hombres no entero; datos combinados entre sí de manera arbitraria con respecto a la realidad, especialmente cuando se añaden aritméticamente áreas a volúmenes y a precios; inversión del papel de los datos y de las incógnitas, cuando se pide calcular las dimensiones de los objetos a partir de sus volúmenes, el capital a partir de los intereses devengados, o la cantidad de mercancías sobre la base de la parte recibida por cada uno. Claro está, estos procedimientos permiten el acceso a situaciones mucho más interesantes desde el punto de vista matemático que desde el de la vida cotidiana.

Sobre ese terreno "ficticio" se desarrolló el álgebra china. En los manuales más antiguos se observa la acumulación de recetas de cálculo útiles para solucionar tipos limitados de problemas. En el caso extremo, cada problema constituye un caso particular, aunque más tarde aparecieron procedimientos uniformes capaces de resolver tipos cada vez más amplios de problemas. En este nuevo marco, la fantasía concreta ya no sirve como guía en la búsqueda de soluciones.

Empero, nada de todo esto tendría importancia sin la intervención del cálculo. La originalidad china consiste en este caso en una práctica basada en el uso de instrumentos para calcular. Sin duda, el más conocido de estos instrumentos es el ábaco, que apareció tardíamente (hacia el siglo XV). La práctica de los matemáticos chinos se basaba ante todo en la manipulación de varillas de calcular *Chosuan*, cuya posición relativa permitía distinguir los diversos coeficientes numéricos de las ecuaciones. Expresados en forma de configuraciones de la posición de las varillas de calcular, los problemas chinos quedan en cierto modo depurados de su contexto concreto y pasan a depender únicamente de procedimientos de cálculo preestablecidos.

Se trata del método conocido por el nombre genérico de *fangcheng* (en esta palabra, *fang* significa "cuadrado" o "rectángulo" y *cheng* significa "repartir"; es pues un método que consiste en distribuir números distinguiendo dos direcciones principales y formando un cuadrado o un rectángulo, o sea, como diríamos ahora, una "matriz"). Además, había dos clases de varillas, las rojas y las negras, es decir, las positivas y las negativas, que representaban las fuerzas complementarias que organizan el universo chino, el *yin* y el *yang*.

Estamos pues ante un álgebra "instrumental", que elude todo razonamiento discursivo. De allí procede su vigor, pero también su debilidad; en sus procedimientos manipulatorios, los cálculos desaparecen a medida que se efectúan. Este "arte de las varillas" se asemeja al arte del virtuoso que ejecuta una partitura sin mirarla; no es casual que algunos matemáticos chinos comparen explícitamente las matemáticas con la música.

Cálculo y manipulación, tales son los ingredientes básicos de una matemática que nunca se sintió limitada por ningún sistema dogmático, y que integró sincréticamente, en diversos momentos de su historia, numerosos elementos venidos de otros lugares. ■

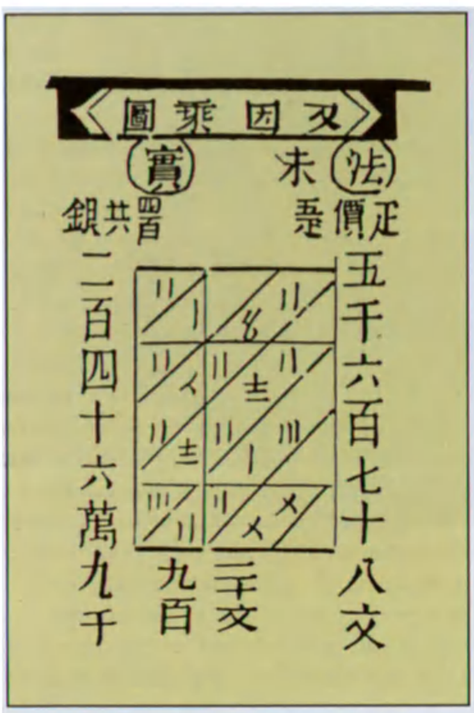
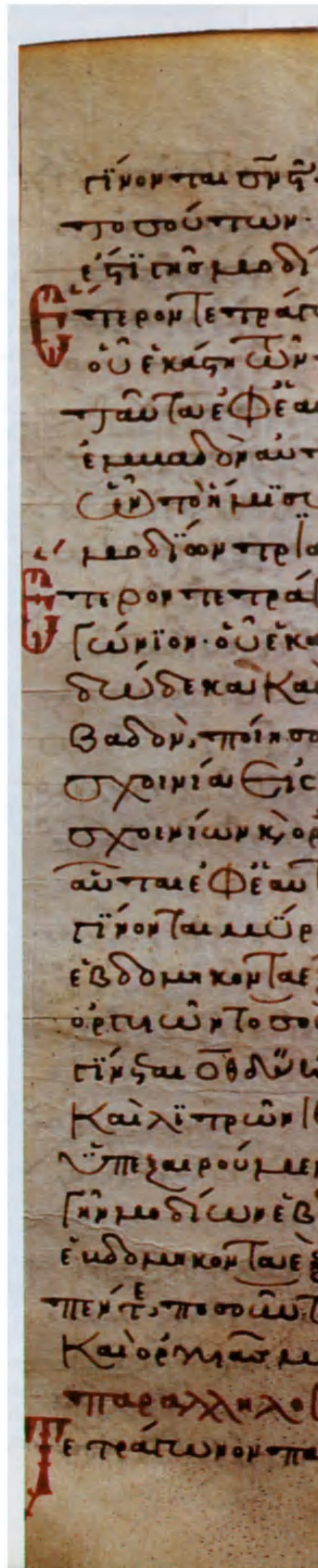


Tabla de multiplicación (1593).

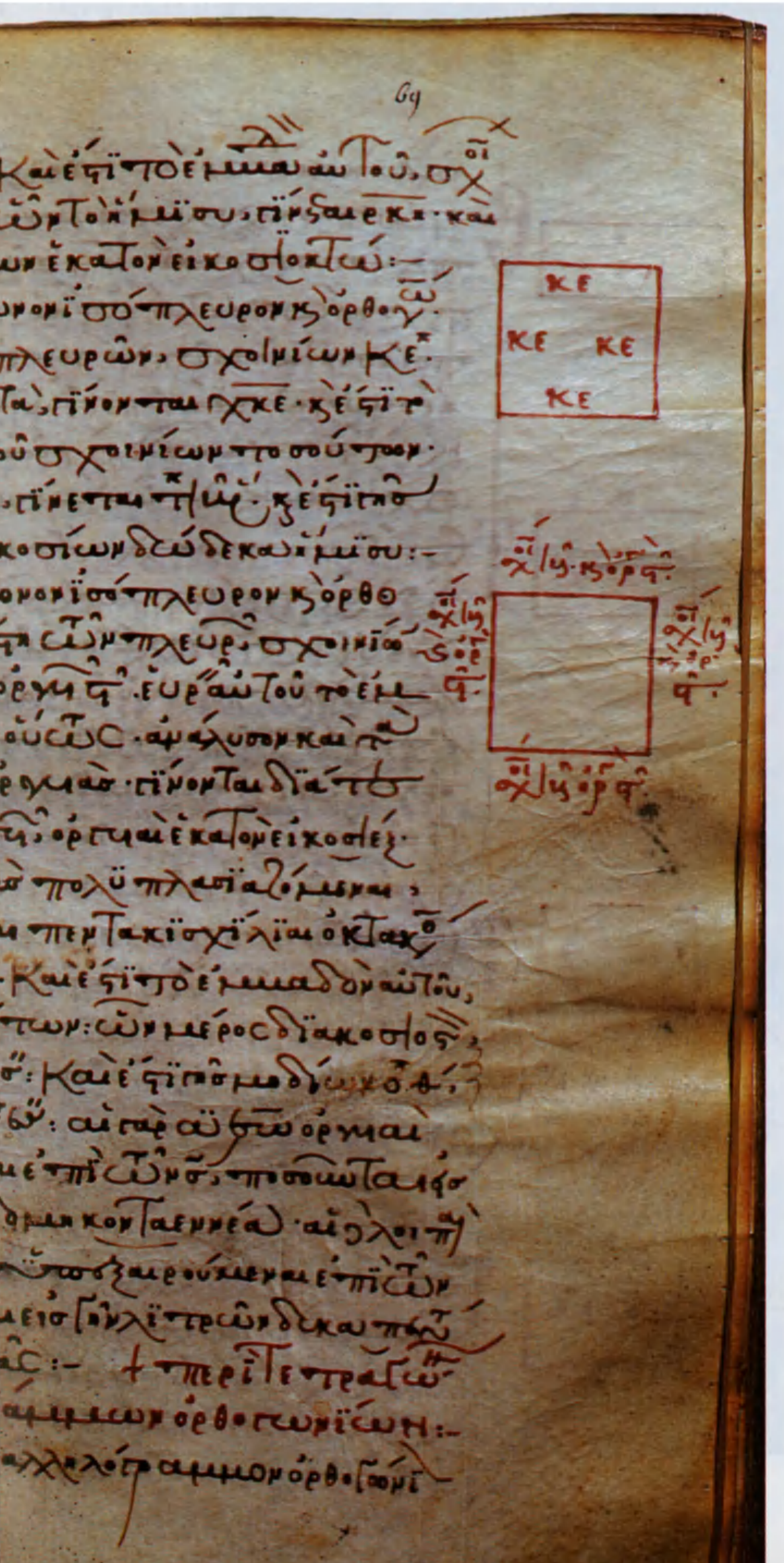


Los Elementos de Euclides. Manuscrito griego del siglo XII.

ANTIGUA GRECIA

La odisea de la razón

POR BERNARD VITRAC



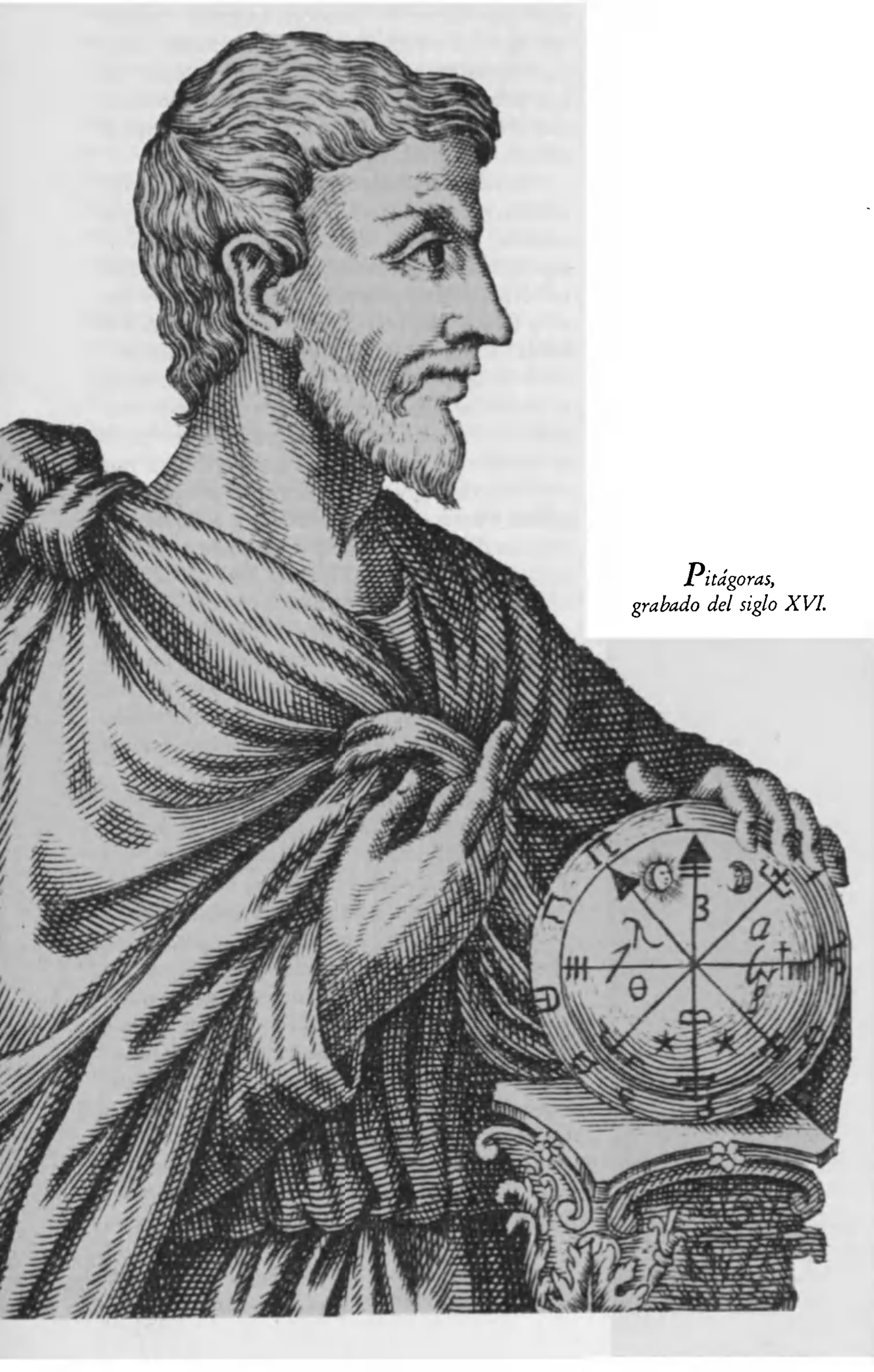
Es un lugar común poner de relieve la contribución fundamental de las matemáticas griegas al desarrollo de esta ciencia en Occidente. La designación misma de "matemáticas" y "matemáticos" o sus equivalentes en la mayoría de las lenguas europeas modernas son de origen griego, derivados del verbo "conocer, aprender"; *mathema* significa en griego "lo que se enseña", esto es, todas las formas de conocimiento, antes de que esta palabra, en plural, adquiriera en la época clásica el sentido más especializado que nosotros le damos: "ciencias matemáticas".

Se sabe poco sobre la enseñanza de las matemáticas en la Antigua Grecia. Al parecer, algunas escuelas filosóficas, en una época en la que la especialización intelectual no era todavía habitual, tuvieron un importante cometido en la formación de los matemáticos. En la época clásica se habla incluso de escuelas llamadas "científicas", como la de Quíos o la de Cízico, pero ignoramos si impartían una formación general o especializada y si eran algo más que un grupo de discípulos en torno a un maestro prestigioso. Al igual que con la medicina, de la que se tienen pruebas más sólidas y antiguas de la existencia de escuelas, hay indicios de que el medio familiar pudo influir en la formación del sabio. Tenemos muy pocos datos biográficos de los matemáticos, pero se sabe, sin embargo, que Arquímedes era hijo de un astrónomo, Hipsicles de un matemático, y que los geómetras Menecmo y Dinóstrato eran hermanos; en cuanto a la única mujer griega de la que se sabe que se dedicó a las matemáticas, Hipatia, era hija del matemático Teón de Alejandría.

En la Grecia de la época clásica no existe un estado centralizado como los del Cercano Oriente de la Antigüedad en los que muy pronto se hizo sentir la necesidad de formar una clase de escribas "funcionarios". Existen tan sólo pequeñas ciudades independientes, permanentemente enfrentadas, u organizaciones gentilicias cuyas estructuras estatales poco consistentes no originan necesidades de formación comparables a las que se observan en Egipto, Babilonia o China.

Si bien el comercio, la agrimensura o la navegación exigen un mínimo de conocimientos matemáticos y aunque el cálculo se enseña en la escuela elemental, la ciudad griega se interesa poco por la formación intelectual y técnica de los niños y jóvenes. La aparición de escuelas, algunas de las cuales llegarán a ser famosas, se debe a la iniciativa privada; así, los dos grandes pedagogos atenienses de principios del siglo IV a.C., Isócrates y Platón, fundan cada uno su propia escuela, el primero de retórica y el segundo de filosofía.

Los dos consideran las matemáticas un instrumento indispensable de la formación intelectual y ambos reconocen la dificultad de esos estudios, la "gimnasia" y la concentración intelectual que requieren. Pero sus enfoques respectivos son muy distintos: según Isócrates, las matemáticas, al igual que los debates contradictorios que tanto atraen a la juventud, deben formar mentes "bien hechas", aunque su contenido resulte inútil para el ciudadano cuyo ideal consiste en dedicarse a la vida política. Para Platón, si las matemáticas cumplen también una función propedéutica, ésta es de muy distinta magnitud, pues deben servir de introducción al estudio de la filosofía —esto es, del idealismo platónico— y también como medio de selección, pues esas matemáticas y esa filosofía, convertida en una auténtica ascesis intelectual, forman parte de un proyecto de reforma política.



Pitágoras, grabado del siglo XVI.

En los siglos III a II a.C. las ciencias matemáticas experimentan un auge considerable. La mayoría de las obras que se conservan de esta época pertenecen a matemáticos relacionados de algún modo con Alejandría, capital de la dinastía griega de los Lágidas que gobierna Egipto desde el 306 al 31 a.C. Es sabido que esos reyes fomentaron considerablemente una política de mecenazgo que antes se practicaba en ocasiones en beneficio de individuos aislados —muchas veces poetas y crearon instituciones, las más conocidas de las cuales son el Museo y la Biblioteca de Alejandría. No cabe poner en tela de juicio el impulso que dieron esas instituciones a los estudios literarios. Salta menos a la vista, tal vez, la correlación con el desarrollo científico, pero tampoco puede desecharse, ya que el clima que así se había creado sólo podía serle favorable.

Ignoramos, sin embargo, si los grandes sabios de la época (Herófilo de Calcedonia, Euclides, Straton de Lámpsaco, Aristarco de Samos, Eratóstenes de Cirene, Apolonio de Perga), cuya presencia en Alejandría está documentada o es probable, formaron discípulos, impartieron enseñanzas o dieron simples conferencias en el Museo mismo o con carácter privado; así, no hay ninguna seguridad de la existencia de una escuela como tal en Alejandría. De hecho, el Museo sólo funcionó como una universidad en la época del Imperio Romano, siendo emulado entonces en Efeso, Atenas, Esmirna y Egina.

Los textos matemáticos

Junto a las matemáticas puras, propias de la tradición griega, existe también un corpus de textos matemáticos que denominaremos "calculatorios", bastante parecidos a los de las matemáticas egipcias, babilónicas o chinas. Así, un corpus de textos matemáticos bastante tardío, atribuido a Herón de Alejandría, se compiló y utilizó hasta la época bizantina probablemente para dar formación matemática a los técnicos. Al igual que en los textos babilónicos o egipcios, los problemas planteados se refieren explícitamente a una situación concreta, incluso si ésta no es muchas veces más que un artificio con fines pedagógicos.

Nada similar existe en los tratados clásicos de Euclides, Arquímedes o Apolonio, quienes no prestan la menor atención a las aplicaciones prácticas. La exposición euclidiana de la teoría de los números no recurre para nada a ejemplos numéricos; las obras que se han conservado parecen obedecer a las exigencias de una clara delimitación entre la investigación abstracta y las aplicaciones prácticas. No obstante, si hay una perfecta separación de los temas, los mismos autores llevan a cabo trabajos tanto de matemáticas puras como aplicadas.

Tales de Mileto, grabado del siglo XVII.

BERNARD VITRAC, francés, es profesor de matemáticas y dirige, junto con J. Ritter, una colección sobre historia de las ciencias, publicada por la Universidad de París VIII. Es autor de *Médicine et philosophie au temps d'Hippocrate* (Medicina y filosofía en tiempos de Hipócrates, 1989). Actualmente prepara una traducción comentada de los *Elementos* de Euclides, cuyo primer volumen aparecerá este año.

Cuatro son los rasgos fundamentales que caracterizan esta parte de las matemáticas griegas que por convención hemos llamado "puras":

La organización deductiva: los tratados clásicos como los *Elementos* están organizados deductivamente; se llega a los resultados por una demostración, bien partiendo de resultados demostrados previamente, bien de principios expuestos al comienzo; cabe decir que se trata de un procedimiento axiomático parcial; este procedimiento destaca el aspecto lógico y necesario de las matemáticas. Hay que señalar, sin embargo, que no siempre es fácil disociar el aspecto retórico, que permite conseguir la aquiescencia del lector o del alumno y persigue una eficacia psicológica y pedagógica, del aspecto lógico que se concentra en la arquitectura necesaria y objetiva del razonamiento.

La orientación geométrica: incluso en la teoría de los números, la estática o la astronomía, la orientación de los tratados demostrativos es fundamentalmente geométrica. Las matemáticas antiguas recurrieron a simbolismos varios para anotar los números y las fracciones, y también utilizaron abreviaturas. Pero fue en el empleo de las figuras geométricas donde más lejos llevaron los griegos sus investigaciones sobre las "representaciones simbólicas": la posibilidad de descomponer las figuras en elementos, de determinar las reglas de construcción autorizadas y el descubri-

miento de propiedades que parecen estar ya "presentes" en las figuras son aspectos todos ellos que se combinaban ya a la perfección con la exposición deductiva.

El ideal de ciencia desinteresada: las matemáticas deben estudiarse por afición al saber en sí.

Matemáticas y filosofía: este desarrollo de las matemáticas puras es contemporáneo del de la filosofía.

Los filósofos y las matemáticas

De hecho, al mismo tiempo que van cobrando auge las matemáticas, surge una especulación a la vez metodológica e ideológica sobre las ciencias. La clasificación de Gemino, astrónomo y matemático griego del siglo I a.C., constituye un buen ejemplo de ello (véase el recuadro p. 34). Esta clasificación, que supone la existencia de un corpus considerablemente desarrollado y muy diversificado, retoma y hace suya una diferenciación que da primacía al estudio abstracto, separándolo de sus posibles aplicaciones.

Según Aristóteles, las matemáticas estudian propiedades que pueden ser "abstractas" de los objetos del mundo físico. Además las matemáticas, al igual que todas las ciencias demostrativas, se basan en principios, de modo que una ciencia puede presuponer otra o, en palabras de Aristóteles, "estar subordinada a otra": la óptica, por ejemplo, está "subordinada" a la geometría. Existe, pues, una jerarquía de las ciencias que es de orden lógico. Es preciso distinguirla de una oposición, que por lo general recalcan todos los autores griegos, entre las matemáticas "utilitarias" y las matemáticas "desinteresadas". Sólo estas últimas son dignas, a juicio de Aristóteles, de una educación liberal: "ser libre" significa ser su propia causa.

El conocimiento "de adorno" tiene, pues, la primacía sobre las técnicas necesarias; la ciencia desinteresada, que tiene su propio fin en sí misma, es la actividad suprema. Para Platón, las matemáticas de los Bárbaros, por muy prestigiosas que sean sus civilizaciones, no son *artes*, porque no están libres de las coacciones de la necesidad. Así pues, la filosofía griega entremezcla consideraciones propias de dos enfoques distintos, el metodológico y el ideológico.

Si los tratados de óptica y astronomía adoptan la forma de la exposición geométrica, a saber la deducción, que se presta particularmente bien a la eliminación de cuanto pertenece al mundo de lo "sensible" y lo "práctico", no por ello resulta fácil saber cómo los matemáticos integraban esta manera de concebir sus actividades. Por otra parte, no hay que caer en la tentación de superponer la distinción moderna "puras"/"aplicadas" a la distinción antigua "inteligible"/"sensible", ya que no existe ninguna coincidencia entre ellas.

La referencia al ideal de ciencia "desinteresada" obliga a plantear el problema de la motivación del desarrollo de las matemáticas. Hay que distinguir los fenómenos que han podido actuar como causas externas y los que se podrían considerar causas internas. Entre los primeros, destaquemos la importante función que han desempeñado la óptica y la astronomía que, para nosotros, forman parte de la física y que en la Antigüedad se clasificaban dentro de las matemáticas. Debe sumárseles la estática o ciencia de los equilibrios.

¿Qué sabemos de las motivaciones internas? Es posible tratar de descubrirlas en los prefacios con los que los autores matemáticos, al parecer desde Arquímedes, inician sus tratados; se observa que, lejos de ser producto de características psicológicas propias de la mentalidad griega, la investigación desinteresada presupone la existencia de una comunidad de matemáticos sometida a ciertas reglas.

Téngase en cuenta, en primer lugar, que esos matemáticos no estiman que tengan que justificar su práctica de la ciencia por sí misma; es algo que no requiere ninguna explicación. A lo sumo precisan por qué se dedican a las matemáticas y no a la física o a la teología; evidentemente, porque son seguras y rigurosas, en la medida en que se ocupan de un objeto "estable" (a diferencia de

PÁGINA ANTERIOR

"La muerte de Arquímedes", mosaico que representa a Arquímedes sorprendido por un soldado romano durante la toma de la ciudad de Siracusa (212 a.C.) mientras estaba abstraído en sus trabajos de geometría. Según la tradición, a la orden de rendirse, Arquímedes respondió con la frase ya legendaria: "¡Por favor no desordenes mis pequeños círculos!".

La clasificación de las "mathêmata" por Gemino

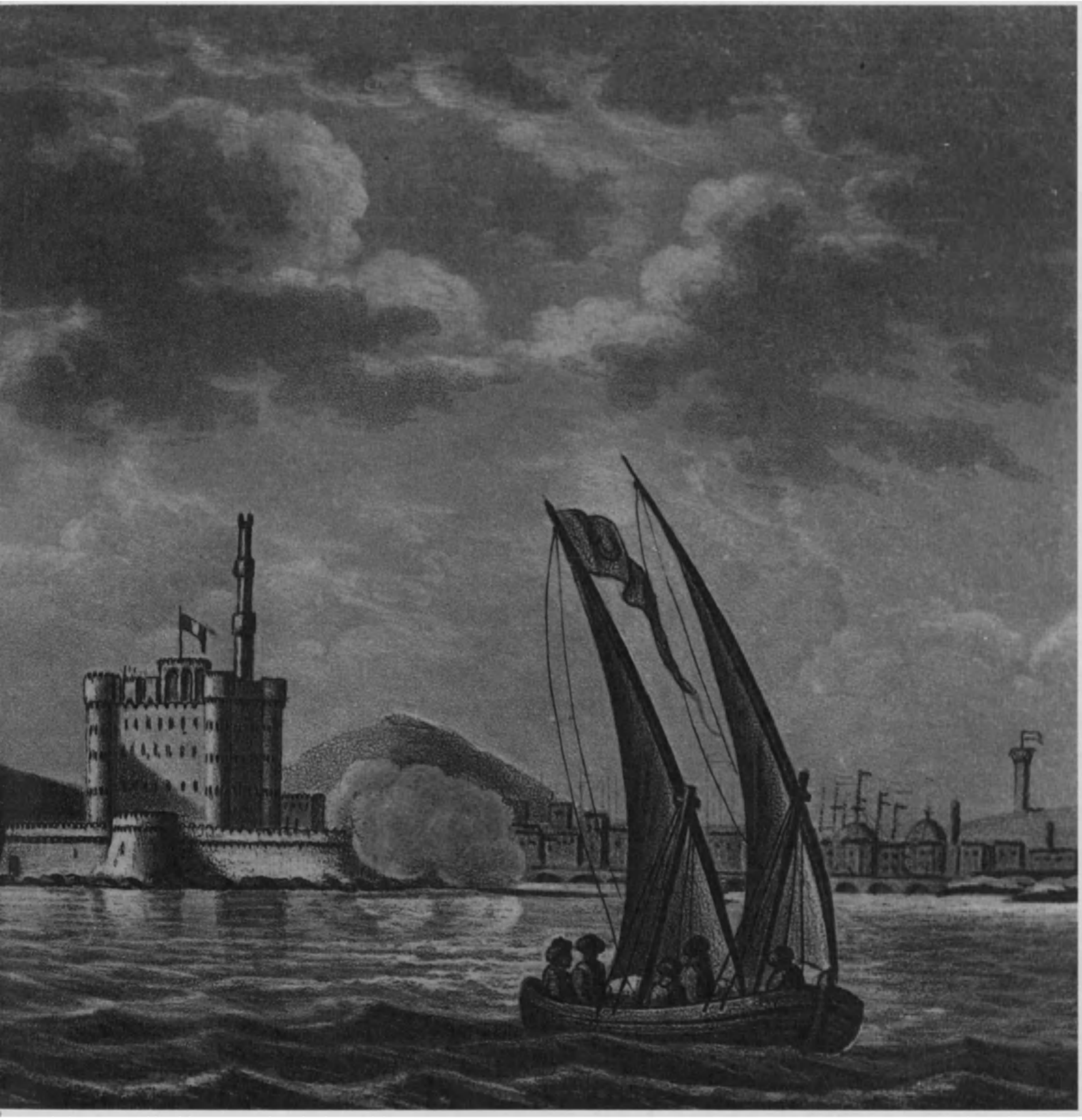
Otros, como Gemino, pretenden dividir la ciencia matemática de una manera diferente. A un lado colocan lo que se refiere solamente a las cosas inteligibles, al otro, lo que concierne a las cosas sensibles o que se relaciona con ellas; llaman sin duda inteligibles los objetos de contemplación que el alma elabora en sí misma, apartándose de las formas materiales. Consideran la aritmética y la geometría como las dos partes primordiales y más importantes de la matemática que tratan de las cosas inteligibles, y en cuanto a las que abordan las cosas sensibles, son seis: la mecánica, la astronomía, la óptica, la geodesia, la canónica y la logística.

En cambio, para ellos, contrariamente a la opinión de otros, la táctica no es digna de ser considerada una parte de la matemática, aunque utilice ya sea la logística, como en el empadronamiento de las tropas, ya sea la geodesia, como en las divisiones de los terrenos y la agrimensura. Tampoco consideran que la historia y la medicina forman parte de la matemática, aunque los autores de obras históricas recurran a menudo a teoremas matemáticos para indicar la posición de los climas o para calcular la dimensión de las ciudades, sus diámetros o sus contornos, y pese a que los médicos esclarezcan mediante este tipo de procedimientos muchas cosas de su competencia; e Hipócrates y todos los que han tratado de las estaciones y los lugares han dejado perfectamente en claro la utilidad de la astronomía para la medicina. ■

Proclo: Comentario del Libro I de los *Elementos* de Euclides.

la física) pero, no obstante, "accesible" (a diferencia de la teología).

En la época helenística se observa que esos matemáticos constituyen una comunidad "internacional" cuyos miembros están diseminados en el perímetro de la cuenca mediterránea (Grecia, Asia Menor, Egipto, Sicilia...). Con todo, mantienen relaciones personales, bien porque se visiten unos a otros, bien gracias a la circulación de sus obras. Se trata ante todo de plantear problemas a los colegas, de resolver los que ellos mismos han planteado, de criticar incluso las soluciones imperfectas que otros han propuesto. Así, algunos matemáticos adquieren una autoridad reconocida;



las publicaciones se someten a sus dictámenes y ellos se encargan de darlas a conocer a quienes estiman dignos. Otros son impostores a los que se desenmascarará en su momento planteándoles un problema imposible que pretenderán, empero, resolver. Desde luego, todo ello sucede en el marco de relaciones establecidas entre individuos y no en el de una institución en el sentido moderno de la palabra.

En definitiva, el ideal de las matemáticas "desinteresadas" parece depender de la existencia de un grupo dentro del cual los problemas de rivalidad y competencia recuerdan bastante algunas características de la comunidad científica actual. Ahora bien, no conviene exagerar demasiado esta comparación, ya que la diferencia de escala entre una y otra comunidad es muy perceptible: el número de eruditos de la época helenística, sobre todo de matemáticos, no era superior a algunos centenares. Tampoco caben dudas acerca de la precariedad de la comunidad que forman, a falta de una auténtica institución: así, a partir de la época romana, los mejores autores (Tolomeo, Pappus...) parecen preocuparse esencialmente por perfeccionar los resultados ya obtenidos; aparentemente, la emulación y la búsqueda de la novedad que caracterizan al periodo anterior han desaparecido. ■

El Faro en el puerto de Alejandría (grabado de 1801).

REGIONES ARABES

Intersección del álgebra

y la geometría

PREGUNTAS A ROSHDI RASHED

Miniatura otomana de 1534 que representa la ciudad de Bagdad.

¿Cómo pueden describirse los comienzos de las matemáticas redactadas en árabe?

La investigación matemática árabe parece haber comenzado a principios del siglo IX. En esa época, en Bagdad, el movimiento de traducción de las grandes obras helenísticas llega a su apogeo. Así, al-Hajjaj ibn Matar traduce dos veces los *Elementos* de Euclides, y el *Almagesto* de Tolomeo; Hilal ibn-Hilal al-Himsi vierte al árabe los cuatro primeros libros de las *Cónicas* de Apolonio. En el mismo siglo se traducen al árabe varias obras de Arquímedes, Pappus y Diofanto de Alejandría.

La empresa presenta dos características primordiales: las traducciones las realizan matemáticos de primer orden y se basan a su vez en las investigaciones más avanzadas de la época. Así, quien tradujo los libros V a VII de las *Cónicas* de Apolonio fue el gran matemático Thabit ibn Qurra (muerto en 901). Por otra parte, todo indica que la traducción por Qusta ibn Luqa de las *Aritméticas* de Diofanto, hacia 870, se debió a una investigación ya iniciada sobre el análisis indeterminado o el análisis diofántico racional.

Son múltiples los ejemplos que muestran la estrecha relación existente entre la traducción, por una parte, y la innovación matemática, por otra. En suma, la traducción representa un gran momento de expansión en árabe de las matemáticas helenísticas.

Al-Jwarizmi es el más conocido de los matemáticos árabes y su nombre está ligado a la aparición del álgebra. ¿Cómo caracterizar esta empresa?

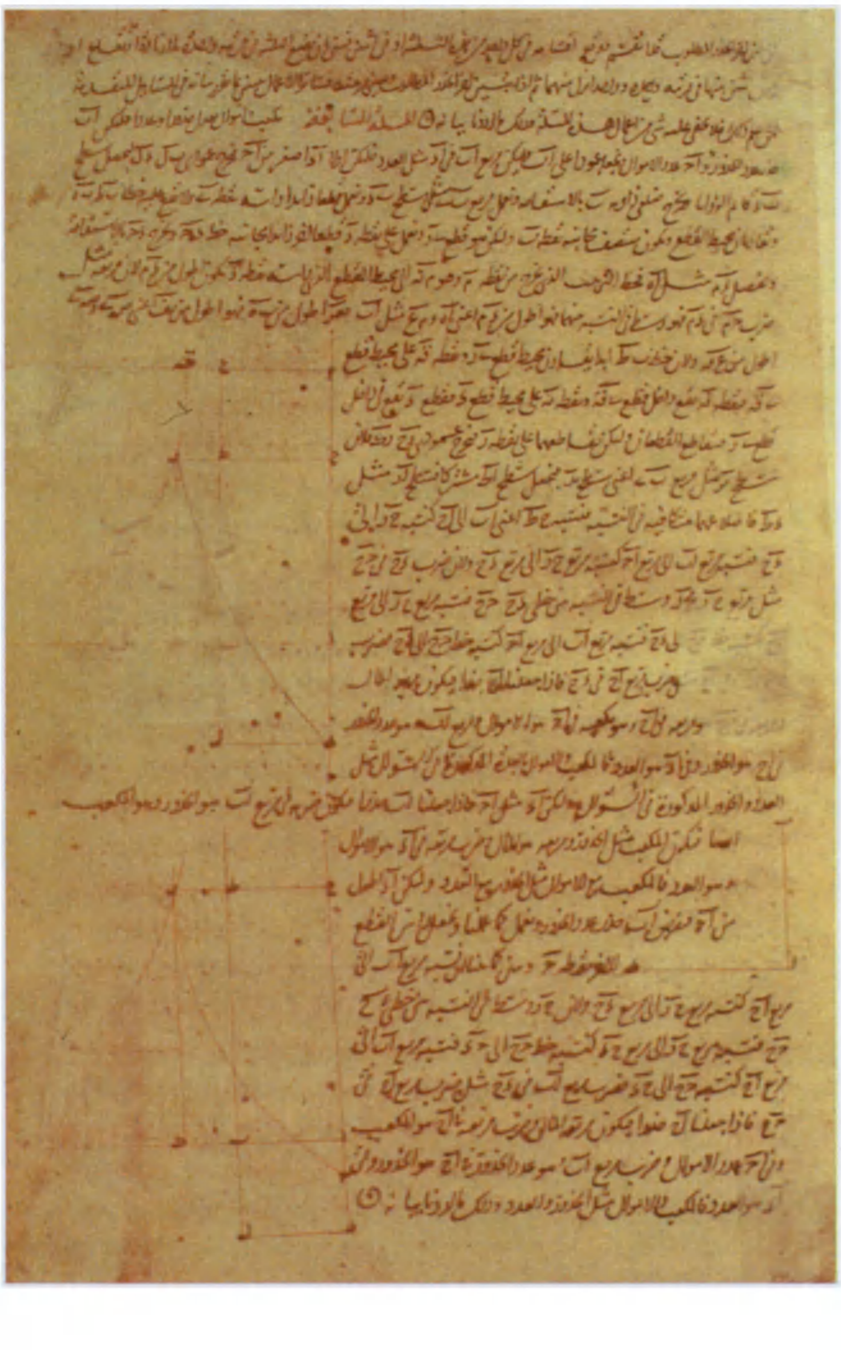
Precisamente en esta época, en el siglo IX, y en ese lugar, la Academia (Casa de la Sabiduría) de Bagdad, al-Jwarizmi redacta un libro que se caracteriza por la novedad del tema y del estilo. En esas páginas, tituladas *El libro del álgebra y de al-muqabala,* surge por primera vez el álgebra como disciplina matemática diferente e independiente. El acontecimiento fue crucial y considerado como tal por sus contemporáneos, tanto por el estilo de esta matemática como por la ontología de su objeto y, sobre todo, las extraordinarias posibilidades que ofrecía para el futuro.

Lo que se había concebido era un ente matemático suficientemente general para recibir determinaciones de géneros diferentes, pero dotado a la vez de una existencia independiente de esas determinaciones. En al-Jwarizmi el objeto algebraico remite tanto a un número como a una cantidad irracional o a una magnitud geométrica. Esta nueva ontología, así como la combinación de los dos procedimientos, el demostrativo y el aplicado, impresionaron a los filósofos de la época.

Nunca podrá insistirse demasiado en la novedad de la concepción y del estilo de al-Jwarizmi, que no se basan en ninguna tradición anterior conocida. Con esta álgebra se captan ya las inmensas posibilidades que se abrirán a las matemáticas a partir de ese momento: la aplicación de las disciplinas matemáticas las unas a las otras. Dicho de otro modo, si el álgebra, a causa de la generalidad de su objeto y de la nueva ontología así introducida, hizo posible esas aplicaciones, éstas, a su vez, por su número y su diversidad, modificarán sin cesar la configuración de las matemáticas después del siglo IX.

Los sucesores de al-Jwarizmi emprenden progresivamente la aplicación de la aritmética al álgebra, del álgebra a la aritmética, de una y otra a la trigonometría, del álgebra a la teoría euclidiana de los números, del álgebra a la geometría, de la geometría al álgebra. Esas aplicaciones entrañaron la creación de nuevas disciplinas o, al menos, de nuevos capítulos de la ciencia matemática.

De las ecuaciones, texto de Sharaf al-Din al-Tusi (segunda mitad del siglo XII). Manuscrito de 1297.



En esta perspectiva, ¿podría usted comentar un ejemplo significativo de este encuentro entre aritmética y álgebra?

Es posible mencionar, a este respecto, la contribución matemática árabe en el ámbito de la teoría clásica de los números.

A fines del siglo IX se tradujeron los textos griegos más importantes, en particular los *Libros aritméticos* de Euclides, la *Introducción aritmética* de Nicómaco de Gerasa y las *Aritméticas* de Diofanto de Alejandría. A raíz de esas traducciones se constituyen varios capítulos de la teoría de los números. Tomemos el ejemplo de la teoría de los números amigos.[1] Su evolución comprende dos etapas significativas. La primera etapa conduce, en el marco de la geometría euclidiana, a resultados nuevos. La segunda etapa da lugar, algunos siglos más tarde, gracias a la aplicación del álgebra a la teoría elemental de los números, a la creación de una región no helenística en lo referente a la teoría de los números. Precisemos ambos aspectos.

Si bien al final del libro IX de sus *Elementos* Euclides formula una teoría de los números perfectos, ni él ni Nicómaco de Gerasa enunciaron la teoría de los números amigos. Thabit ibn Qurra, traductor del libro de Nicómaco, revisor de una traducción de los *Elementos* y él mismo eminente matemático, decidió elaborar esa teoría. Enuncia y demuestra, en el más puro estilo euclidiano, el más importante teorema aplicable a esos números y que hoy día lleva su nombre.

Si se descarta aquí la mística de los números amigos que tenía vigencia desde la Antigüedad para considerar solamente a las matemáticas, no cabe sino constatar que, hasta fines del siglo XVII por lo menos, la historia de los números amigos se limita a una evocación de ese teorema de Ibn Qurra y de su transmisión por los matemáticos tardíos. Entre estos últimos, cabe citar a los matemáticos de lengua árabe como al-Antaki, al-Bagdadi, Ibn al-Banna, al-Umawi y al-Kashi. Estos nombres prueban suficientemente, tanto por su diversidad cronológica como geográfica, la gran difusión del teorema de Ibn Qurra, que retoman en 1636 Pierre de Fermat y en 1638 René Descartes.

La segunda etapa se expresa en el hecho siguiente. El célebre físico y matemático Kamal al-Din al-Farisi elaboró una relación en la que intenta demostrar el teorema de Ibn Qurra, pero por una vía diferente: basa su demostración en un conocimiento sistemático de los divisores de un entero y de las operaciones que es posible aplicarles. Al hacerlo procede en realidad a una reorganización que conduce no sólo a modificar, por lo menos localmente, la perspectiva de la aritmética euclidiana, sino también a impulsar nuevos teoremas sobre la teoría de los números. Cabe hablar entonces de una región no helenística de la teoría de los números.

1. Los números amigos son un par de números cada uno de los cuales es igual a la suma de las partes alícuotas del otro.

A la derecha: traducción latina de ***El álgebra*** *de al-Jwarizmi. Manuscrito de 1145. En el extremo derecho: los* ***Elementos*** *de Euclides comentados por Nasir al-Din al-Tusi (1201-1274). Manuscrito persa del siglo XV.*

Para que este nuevo estudio de los divisores fuese posible, era necesario que el matemático estableciera explícitamente lo que sólo existía de manera latente en los *Elementos* de Euclides; por otra parte, tenía que recurrir a los resultados del álgebra desde al-Karaji (siglos X-XI) y en particular a los métodos de combinación. El procedimiento de al-Farisi, lejos de limitarse por consiguiente a la demostración del teorema de Ibn Qurra, permite emprender un nuevo estudio: el de las dos primeras funciones aritméticas, la suma de los divisores de un entero y el número de esos divisores.

Un estilo de este tipo, que aplica el álgebra y el análisis de combinación a la aritmética euclidiana, se encuentra aun en vigor en Europa en el siglo XVII, por lo menos hasta 1640. El análisis de las conclusiones de al-Farisi y de los métodos aplicados muestra que ya en el siglo XIII se había llegado a un conjunto de proposiciones, de resultados y de técnicas que equivocadamente se habían atribuido a los matemáticos del siglo XVII.

Habría que hablar también de las nuevas relaciones que se establecen entre el álgebra y la geometría.

Ya se ha visto que a partir del siglo IX el panorama de las matemáticas se transforma y que sus horizontes se amplían. Se observa, en primer lugar, una expansión de la aritmética y de la geometría helenísticas. Por otro lado, en el seno de esas matemáticas helenísticas se crean regiones no helenísticas; ocurre que las relaciones entre las antiguas disciplinas ya no son las mismas y se han producido muchas otras agrupaciones. Esta modificación de las relaciones es capital si se quiere entender la historia de las matemáticas. Así, las nuevas relaciones que se establecen entre el álgebra y la geometría dan origen a nuevas técnicas de gran importancia.

Sin ninguna justificación teórica, los matemáticos del siglo X inician una doble traducción inconcebible anteriormente: la de los problemas geométricos en la lengua del álgebra y la de los problemas algebraicos en la lengua de la geometría. Es así como expresan algebraicamente problemas concretos, que no pueden resolverse con una regla y un compás, como la trisección del ángulo, las dos medias, el heptágono regular. Por otra parte, ante la dificultad que plantea la resolución por radicales de la ecuación de tercer grado, algunos algebristas, pero también geómetras como Abu al-Jud ibn al-Leith, proceden a traducir esa ecuación en la lengua de la geometría, lo que les permite aplicar al estudio de la ecuación la técnica de intersección de las curvas.

El primer intento de fundar esta doble traducción surge con al-Jayam (1048-1131 aproximadamente). Procurando superar la investigación ligada a una determinada forma de ecuación cúbica, al-Jayam elabora una teoría de las ecuaciones algebraicas de grado inferior o igual a tres y, al mismo tiempo, propone un nuevo modelo de redacción. Estudia las ecuaciones de tercer grado con ayuda de las curvas cónicas. Para elaborar esta nueva teoría se ve obligado a concebir mejor y a formular las nuevas relaciones entre el álgebra y la geometría. La teoría de las ecuaciones parece, en adelante, aunque todavía con timidez, superar las diferencias entre ambas disciplinas.

En su célebre tratado de álgebra al-Jayam logra obtener dos resultados trascendentales atribuidos equivocadamente a Descartes: por una parte, una solución general de todas las ecuaciones

ROSDHI RASHED,
francés, es director de investigaciones del Centro Nacional de Investigaciones Científicas (CNRS) de Francia y autor de numerosos trabajos sobre historia de las matemáticas árabes. Varios artículos suyos se han reunido en *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes* (Entre la aritmética y el álgebra. Investigaciones sobre la historia de las matemáticas árabes, París, 1984).

A la izquierda, el Observatorio de Estambul. Miniatura turca de 1581.

A la derecha, portada de un manuscrito de 1228 donde se encuentra la primera teoría de los números amigos formulada por Thabit ibn Qurra en el siglo IX.

de tercer grado por la intersección de dos cónicas y, por otra, un cálculo geométrico que resulta posible gracias a la elección de una longitud unidad, concepto que es fundamental.

Medio siglo después que al-Jayam, su sucesor, Sharaf al-Din al-Tusi, da un nuevo paso. Para demostrar la existencia del punto de intersección de dos curvas, este matemático planteó los problemas de localización y de separación de las raíces de la ecuación y estudió las condiciones de su existencia; problemas para cuya solución tuvo que definir la noción de máximo de una expresión algebraica y esforzarse por encontrar conceptos y métodos para la definición de los máximos. Este enfoque no sólo condujo a al-Tusi a inventar nociones y métodos que sólo fueron bautizados más tarde —como la derivada— sino que lo obligó a cambiar de procedimiento: por primera vez, que yo sepa, descubre la necesidad de proceder localmente, en circunstancias que sus predecesores sólo consideraban las propiedades globales de los objetos estudiados. Todos estos resultados obtenidos por al-Tusi, así como la teoría que los abarca, son de suma importancia y a menudo se atribuyen a matemáticos posteriores a él en varios siglos.

Tales son los principales aspectos de lo que yo llamo la dialéctica entre el álgebra y la geometría. Para completar el análisis, habría que mencionar los dos obstáculos que han entorpecido la progresión de esas nuevas matemáticas: la falta de audacia en el empleo de números negativos como tales, en circunstancias que aun no estaban definidos, y la debilidad del simbolismo.

La historiografía política distingue entre Antigüedad, Edad Media, Renacimiento y Tiempos Modernos. ¿Le parece que esta clasificación es aplicable a la historia efectiva de las matemáticas y en particular la contribución árabe?

Es cierto que se han opuesto las matemáticas "medievales" a las matemáticas "modernas". La primera entidad, que agruparía las matemáticas latinas, bizantinas, árabes, incluso indias y chinas, se distinguiría de otra entidad histórica nacida en el Renacimiento. Esta dicotomía no es pertinente ni desde un punto de vista histórico ni epistemológico. Está claro que las matemáticas árabes son una prolongación y un desarrollo de las matemáticas helenísticas, que efectivamente las alimentaron. Lo mismo ocurre con las matemáticas que se desarrollan en el mundo latino a partir del siglo XII. Para ajustarnos a los análisis que hemos esbozado, me parece que los trabajos realizados tanto en árabe como en latín (o en italiano) entre el siglo IX y comienzos del siglo XVII no pueden separarse en eras diferentes.

Todo indica que se trata de la misma matemática. Para convencernos de ello, hoy en día podemos comparar los escritos de al-Samaw'al (siglo XII), por ejemplo, en álgebra y en cálculo numérico, con los de Simon Stevin (siglo XVI); los resultados de al-Farisi en teoría de los números con los de Descartes; los métodos de al-Tusi para la resolución numérica de las ecuaciones con el de Viète (siglo XVI), o su investigación de los máximos con la de Fermat; los trabajos de al-Jazin (siglo X) sobre el análisis diofántico entero con los de Bachet de Meziriac (siglo XVII), etc. Si, por otra parte, hacemos abstracción de los trabajos de al-Jwarizmi, de Abu Kamil, de al-Karaji, entre otros, ¿cómo comprender la obra de Leonardo de Pisa (siglos XII-XIII) y la de los matemáticos italianos, así como las matemáticas más tardías del siglo XVII?

Existe ciertamente una ruptura con esa matemática; en efecto, las postrimerías del siglo XVII se caracterizan por la aparición de nuevos métodos y de nuevas regiones matemáticas en Europa. Sin embargo, la ruptura no fue necesariamente repentina y no se produjo simultáneamente en todas las disciplinas. Por otra parte, rara vez las líneas de separación esquivan a los autores, pero a menudo atraviesan las obras. En el ámbito de la teoría de los números, por ejemplo, la novedad no se traduce, como se ha sostenido, en el empleo de métodos algebraicos por Descartes y Fermat, los cuales, procediendo así, no hacían más que volver a los resultados de al-Farisi. Es más bien dentro de la obra de Fermat donde puede observarse una ruptura, con la invención del método de "descenso infinito" y el estudio de ciertas formas cuadráticas, hacia 1640. Algo muy distinto ocurre con el capítulo sobre la construcción geométrica de las ecuaciones, iniciado por al-Jayam, proseguido por al-Tusi, enriquecido por Descartes y retomado por muchos otros matemáticos hasta fines del siglo XVII, incluso mediados del siglo siguiente.

Es realmente a partir del final de la primera parte del siglo XVII cuando se producen los entrelazamientos y se localizan las principales rupturas. La contribución de los matemáticos árabes se inserta en una configuración coherente, llamémosla matemáticas clásicas, que se desarrolla entre el siglo IX y la primera mitad del siglo XVII. ■

El despertar de la ciencia

POR CATHERINE GOLDSTEIN Y JEREMY GRAY

contemporánea

La enseñanza de las matemáticas que las universidades europeas impartían en sus comienzos (fines del siglo XII y principios del siglo XIII) era, en lo esencial, heredera de la tradición antigua. En París, Oxford o Bolonia los programas de estudio comprendían las materias del *quadrivium* pitagórico: aritmética, geometría, música (elementos de teoría musical) y astronomía. Pero se consideraba que la ciencia de las cosas divinas era más importante pues permitía acceder a los textos fundamentales de la fe cristiana; y la Facultad de Artes, en la que se dictaban los cursos de matemáticas, gozaba de mucho menor prestigio que las facultades de Derecho, de Medicina y, sobre todo, de Teología.

El contenido de la enseñanza se limitaba a los principios elementales de cálculo y a los primeros libros de los *Elementos* de Euclides. Se estudiaban no obstante los principios del movimiento a partir de las obras de Aristóteles y, en las escuelas de Oxford y de París, se comenzó a recurrir a la mediación de las matemáticas para el estudio de los fenómenos naturales. Así, por ejemplo, en el siglo XIV, en París, Nicole Oresme trató de representar gráficamente la relación entre tiempo y velocidad en ciertos tipos de movimientos.

Los matemáticos prácticos: de la agrimensura al comercio

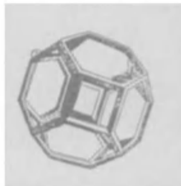
A fines de la Edad Media, dos grupos distintos, aun cuando a veces hubiesen egresado de las mismas universidades, compartían el ejercicio de las matemáticas: por un lado, los agrimensores, ingenieros y contables que pertenecían a la categoría de los artesanos y, por otro, los médicos-astrólogos que gozaban de una situación social superior.

En el siglo XIV los cambios económicos, así como el desarrollo de las ciudades y del comercio van a favorecer el ascenso social de los matemáticos prácticos. Los intercambios comerciales cada vez más complejos exigían técnicas idóneas de cálculo y de contabilidad. Los matemáticos ofrecían sus servicios en las "tiendas de ábaco" y redactaban en las lenguas vernáculas tratados donde las explicaciones teóricas sobre el cálculo aparecían junto a la solución de cuestiones financieras relativas a las tasas de interés, los cambios, la circulación y el peso de las monedas, o la repartición de los beneficios.

Para poder subsistir, estos artesanos no sólo debían competir con los otros miembros de su profesión, sino también convencer a sus empleadores o a sus clientes de la utilidad de sus conocimientos y de su competencia personal. Así, por ejemplo, el dominio de las técnicas algebraicas, tomadas del mundo árabe, consolidaba el prestigio profesional.

La Academia de Ciencias y de Bellas Artes, grabado de Gottfried Stein (1687-1747) a partir de una obra de Sébastien Le Clerc.

Al principio, esta técnica algebraica no se formulaba de la manera simbólica que hoy en día nos resulta familiar. Consistía más bien en la clasificación de los tipos de relaciones posibles entre diferentes dimensiones y en la descripción de los métodos generales que permitían determinarlos. En los tratados, estos métodos solían presentarse en forma de casos concretos, integrándose en un contexto totalmente práctico. La introducción en Europa de los números decimales acompañó y facilitó el progreso del cálculo: las aproximaciones de raíces y las fracciones complicadas abundaban en los escritos que circulaban por entonces y a los que el desarrollo de la imprenta daría amplia difusión.



En suma, la constitución de una profesión matemática con un radio de competencia más vasto, cuyo prestigio estaba vinculado al de sus usuarios preferentes, los mercaderes, respondió al surgimiento de nuevas prioridades económicas y sociales.

El movimiento humanista

Esas transformaciones no sólo afectaron a las transacciones bancarias. Desde fines de la Edad Media empezaron a llegar a Occidente muchos inventos prácticos, como el compás y los gemelos. Además, las obras de álgebra solían estar acompañadas de tratados en los que se describían los instrumentos de medición, su funcionamiento y características. Los viajes de descubrimiento pero también el simple tráfico comercial favorecieron una mayor utilización del astrolabio y del cuadrante. Los tratados de perspectiva, en parte prácticos y en parte teóricos, eran obra de pintores, cartógrafos y arquitectos. El conjunto de esas preocupaciones estaba también vinculado a lo que hoy en día llamaríamos óptica geométrica. Así pues, coexistían hasta llegar incluso a confundirse los creadores auténticos y los matemáticos prácticos más interesados por las aplicaciones concretas de su ciencia.

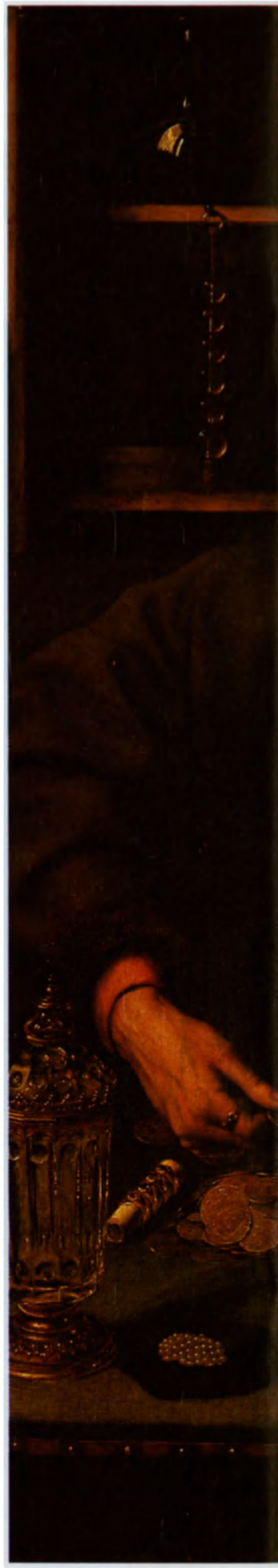
Esta época fue también la de la aparición del movimiento humanista, que se consagró al estudio y la difusión de las obras de la Antigüedad clásica. En sus comienzos este movimiento no fue favorable a las matemáticas prácticas. Si hacia fines del siglo XV los humanistas mostraron un cierto interés por la aritmética lo hicieron bajo la influencia platónica y pitagórica y continuaron menospreciando las prácticas de cálculo.

La vida intelectual, de la que la Reforma fue sólo una de las manifestaciones más espectaculares, se orientó más hacia el estudio de los textos que hacia el contacto con los artesanos. Pero esos eruditos realizaron una nueva serie de traducciones de las obras maestras de la Antigüedad, primero a partir del árabe y después directamente del griego, y al asimilar gradualmente los trabajos de los geómetras griegos, suscitaron un renacimiento de la ciencia matemática.

El arte de la guerra

Si el legado matemático de la Antigüedad dio frutos fue porque el terreno ya estaba abonado. En efecto, los príncipes recurrían cada vez con más frecuencia a los servicios de sabios, como los astrónomos Tycho Brahe y Johannes Kepler, matemáticos imperiales de la corte de Rodolfo II en Praga, no sólo para hacer establecer sus horóscopos sino también para construir fortificaciones o para resolver problemas de balística. La aplicación de las matemáticas al arte militar suscitaba un interés creciente. Así, la educación profundamente humanista que recibían los aristócratas comenzó a conceder mayor importancia a las matemáticas, y a algunos ingenieros militares se les otorgaron títulos de nobleza a cambio de sus servicios. Así, en el siglo XVI aparecen consejeros en navegación apasionados por la alquimia como John Dee, que prologó una edición de Euclides, médicos algebristas como Jérôme Cardan, o juristas expertos en criptografía como François Viète.

La indiferencia e incluso la hostilidad hacia las matemáticas aplicadas comenzó a desvanecerse, al punto que ciertos reformadores del sistema educativo se mostraron favorables a ellas. Pierre de la Ramée, por ejemplo, consagró su cátedra en el Colegio Real a las matemáticas y a sus aplicaciones concretas. Uno de sus discípulos,



El banquero y su mujer
de Quentin Metsys (1455-1530).

Snellius, contribuyó activamente a la introducción de las matemáticas universitarias en los Países Bajos, y su acción se vio favorecida por la creación de una escuela de ingenieros militares en Leyden. En las universidades europeas las matemáticas, la geografía y la hidráulica compitieron primero con la astrología hasta llegar gradualmente a reemplazarla.

El nacimiento de las academias

El redescubrimiento de las matemáticas griegas llegó a su apogeo en los albores del siglo XVII. Las traducciones y reediciones se multiplicaron; pero, además, los numerosos intentos de reconstitución de tratados perdidos o alterados ponen de manifiesto la nueva envergadura que alcanzó en esa época la cultura matemática. Esta va a beneficiarse tanto del prestigio de los resultados que se le atribuían —Galileo puso su descubrimiento de los satélites de Júpiter al servicio de los Médicis cuyo emblema era precisamente ese planeta— como del convencimiento de que esta ciencia permitía acceder al verdadero lenguaje natural del universo: "La filosofía, afirmaba Galileo, está escrita en ese gran libro que es el universo en el lenguaje de las matemáticas, y sus caracteres son los triángulos, los círculos y otras figuras geométricas sin los cuales es humanamente imposible comprender una sola palabra de ella."

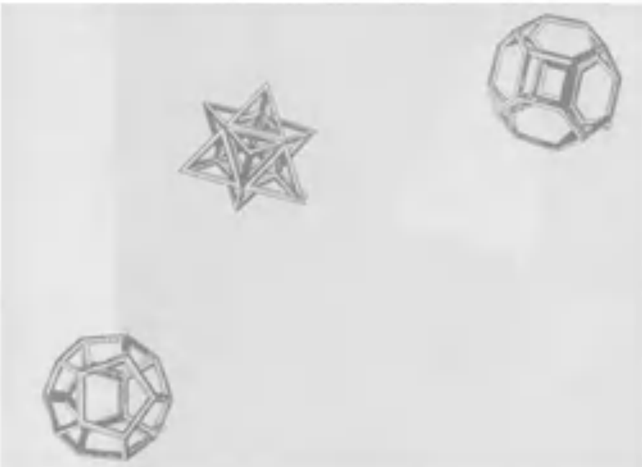
Hacia esta misma época comenzaron a surgir en Europa las academias científicas según el modelo de las sociedades italianas más precoces: algunas de ellas, como la Academia dei Lince de la que Galileo era miembro, habían sido fundadas por un mecenas, otras estaban formadas por grupos autónomos de aficionados a las ciencias que se reunían para intercambiar libros recientes, informaciones científicas o correspondencia, o para asistir a una sesión de disección o de observación de las estrellas.

Como las obras impresas —y sobre todo los libros científicos— eran todavía escasos y su difusión estaba muy limitada, estas academias contribuyeron sobremanera a la divulgación de los conocimientos. En una de las más célebres, en París, se reunían en torno del abate Marin Mersenne científicos de gran prestigio como Pascal, Descartes, Fermat, Roberval y Desargues.

Formados gracias a la lectura de las grandes obras clásicas, estos matemáticos fueron los continuadores de la tradición humanista, adoptando sus interrogantes y sus amplias perspectivas. Pero fueron también los herederos de los artesanos algorítmicos, tanto por la importancia que atribuyeron en sus obras a las técnicas algebraicas como por su origen familiar, ya que muchos de ellos eran hijos de mercaderes enriquecidos que habían adquirido cargos y títulos nobiliarios.

Ya fueran consejeros parlamentarios, monjes eruditos, diplomáticos o militares, en el siglo XVII los aficionados a las matemáticas no vivían de sus trabajos, ni siquiera de la enseñanza que impartían, y no dependían tampoco de un mecenas. En otras épocas, la práctica del reto matemático permitía a los maestros defender su reputación y ganarse la vida, ya que el triunfo público frente a un adversario les garantizaba una clientela. Ahora bien, aun cuando en el siglo XVII los miembros de una academia continuasen planteando a sus corresponsales problemas difíciles cuya solución ellos conocían, se diría que lo que perseguían era más bien demostrar su propia competencia o incitar a sus interlocutores al estudio. Siguiendo el ejemplo de Descartes, su portavoz en este punto preciso, estos hombres establecían una clara distinción entre la "geometría" basada exclusivamente en la exactitud del razonamiento y la "mecánica" sometida a las limitaciones prácticas de la artesanía.

La geometría misma no se asemejaba necesariamente a la de los griegos. Descartes y Fermat

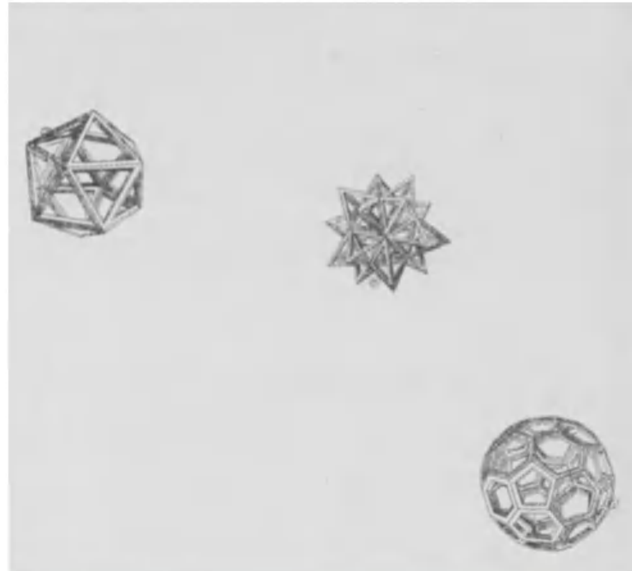


Grabado en madera (1503) en el que la Aritmética (en el centro) parece zanjar el desacuerdo existente entre los que calculaban con ayuda de un ábaco y los partidarios del cálculo por escrito utilizando números "arábigos".

El quadrivium pitagórico

Gracias a los textos de Platón (y de Isócrates) es posible conocer el modo de organización de las ciencias matemáticas que se impuso en la cultura general de la época helenística. En el sistema educativo medieval se le dio el nombre de "quadrivium pitagórico" y comprendía la aritmética, la geometría, la astronomía y la música. La astronomía podía designar ya sea los conocimientos elementales sobre la salida y la puesta de los astros, el calendario y las estaciones, ya sea nociones matemáticamente más complejas relativas a los movimientos reales y aparentes del Sol, la Luna o los planetas. A la parte estrictamente matemática de la astronomía se le daba a veces el nombre de "Esférica" debido a las hipótesis de esfericidad de la Tierra y del cosmos formuladas a partir del siglo V a. C. Del mismo modo, en este contexto la música significaba la teoría de los intervalos musicales, en particular la determinación numérica de los intervalos consonantes; se la llamaba también "Canónica". Al parecer este sistema existía desde el siglo V a. C. —es posible que en relación efectivamente con la escuela pitagórica— en un contexto que aparece vinculado al comienzo a la enseñanza "superior" y posteriormente a la "secundaria".

Bernard Vitrac



la hicieron analítica: búsqueda de tangentes a las curvas, cálculos de áreas, evaluación de las posibilidades en los juegos de azar, problemas sobre los números enteros y muchas otras cuestiones salpicaban la correspondencia y los tratados de estos sabios. Se interesaban también por las cuestiones de óptica y, de manera más general, por los fenómenos naturales que se estimaban regidos por leyes matemáticas: la mecánica constituía el modelo de esta "matematización" de las ciencias que había comenzado con los trabajos oxfordienses del siglo XIV.

Desde mediados del siglo XVII, los gobiernos comenzaron a suplir la iniciativa privada para apoyar, al menos en parte, el desarrollo de las ciencias. En 1662 mediante una carta real, la Royal Society dio carácter oficial a las reuniones de sabios que se realizaban en el Gresham College de Londres; y la Academia de Ciencias, fundada en Francia por el ministro Colbert en 1666, contaría entre sus primeros miembros a los contertulios del círculo de Mersenne. En cuanto a las publicaciones periódicas, el *Journal des Savants* en Francia y las *Philosophical Transactions* en Inglaterra mantenían informados a los aficionados a las ciencias sobre los descubrimientos más recientes.

Newton, Leibniz y el cálculo infinitesimal

Durante la segunda mitad del siglo XVII comenzaron a desarrollarse las cuestiones que la lectura analítica de los tratados de geometría había

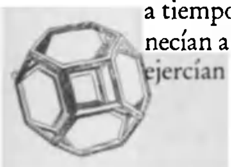
Isaac Newton, gran jefe de escuela que conserva su sencillez, grabado japonés atribuido a Hoshu (hacia fines del siglo XIX).

suscitado. Así, el vínculo entre el cálculo del área y la búsqueda de las tangentes se fue aclarando gradualmente y quedó sintetizado en los trabajos de Newton y de Leibniz. Ambos publicaron muy poco y de manera tardía: cada uno por separado dio respuestas coherentes pero distintas al problema constitutivo del cálculo integral. Ninguno de los procedimientos propuestos obtuvo una aprobación unánime y los seguidores de uno y otro reivindicarían durante muchos años la superioridad de la metodología empleada por sus respectivos maestros.

Pero esta evolución señaló también el comienzo de una nueva etapa en las relaciones de los matemáticos con el mundo físico: en 1687, en su obra maestra, *Principios matemáticos de la filosofía de la naturaleza*, Newton propuso una comprensión unificada de los movimientos de los cuerpos terrestres y celestes, formulada en un lenguaje geométrico semejante al de los *Elementos* de Euclides. Esta obra, profusamente comentada durante el siglo siguiente, permitió comprender mejor algunos fenómenos nuevos; basándose en ella, en 1731, el matemático francés Clairaut llegaría a precisar la trayectoria periódica de ciertos cuerpos celestes, como la del famoso cometa de Halley (bautizado con el nombre del astrónomo inglés que en el siglo XVII predijo su retorno).

Nuevas luces

La tradición instituida a fines del siglo XVII se mantuvo durante los primeros años del siguiente. Pero si bien los militares, los diplomáticos o los nobles siguieron interesándose por las matemáticas, tuvieron que ceder gradualmente su lugar a los matemáticos profesionales en busca de empleos a tiempo completo. En algunos países éstos pertenecían a un establecimiento de enseñanza, en otros ejercían funciones en una academia científica o en



la corte de algún soberano. Se daba prioridad a las aplicaciones prácticas de las matemáticas, a su contribución al desarrollo de la técnica y al bienestar de la humanidad. Sobre todo en Francia el siglo de las Luces fue favorable a la difusión de las ideas científicas, que debían garantizar el progreso y liberar a los espíritus de los prejuicios religiosos. D'Alembert escribió numerosos artículos sobre las matemáticas para la *Enciclopedia*. No sólo circulaban las ideas sino que también se desplazaban los hombres: así, Euler pasó de Berlín a San Petesburgo y Lagrange de la Academia militar de Turín se trasladó a la corte de Federico II de Prusia, y más tarde a la de Luis XVI en Francia.

De manera aun más sistemática que en el siglo precedente, estos matemáticos se escribían, intercambiando temas de reflexión y problemas matemáticos, y publicaban artículos ya no sobre tratados concluidos sino sobre las investigaciones que estaban realizando. Así, ampliaron las propiedades del cálculo integral y analítico, procurando multiplicar sus utilizaciones y sus posibilidades numéricas. Al mismo tiempo, redactaron obras didácticas como la *Introducción al análisis de los infinitos* (1748) de Euler. Estos textos permitían el aprendizaje directo de nuevas maneras de pensar, proponían notaciones y métodos y normalizaban las cuestiones que se estimaba de interés. Lo que distingue este siglo del anterior es la confianza creciente en el instrumento algebraico: el cálculo ya no recurre a la geometría en busca de justificación y adquiere por fin autonomía.

Para recuperar, asimilar y superar el legado greco-árabe fue necesaria la contribución de varias generaciones que participaron en complejos movimientos de reivindicaciones sociales, de emancipación y de retorno a las tradiciones intelectuales, interesándose a veces por las nuevas técnicas de drenaje o de arquitectura, a veces por las teorías cosmogónicas o por los métodos de cálculo de la superficie. ■

CATHERINE GOLDSTEIN, matemática francesa, es encargada de investigaciones del Centro Nacional de Investigaciones Científicas (CNRS) de Francia y miembro activo de la Asociación "Mujeres y Matemáticas". Ha efectuado estudios sobre la teoría de las curvas elípticas y la historia de la teoría de los números en el siglo XVII. Ha colaborado en la redacción de una obra colectiva, dirigida por Michel Serres, sobre la historia de las ciencias (París, Bordas, 1989).

JEREMY GRAY, británico, es profesor de matemáticas de la "Universidad Abierta" del Reino Unido. Ha publicado varias obras sobre historia de las matemáticas modernas, entre las que cabe mencionar *Ideas of space* (Nociones de espacio, 1989) y, en colaboración con John Fauvel, una compilación comentada de textos, *The history of mathematics and the reader* (La historia de las matemáticas en los textos, 1987).

El sistema solar según Galileo. Grabado anónimo del siglo XVI.

GABRIELA MISTRAL

CENTENARIO DE SU NACIMIENTO

Desde su nacimiento en un pueblo del norte de Chile el 7 de abril de 1889 hasta su muerte en Nueva York en 1957, la existencia de Gabriela Mistral constituye una fervorosa búsqueda intelectual y espiritual. El periplo de esta vida, un largo y casi continuo viaje del cuerpo y del alma, primero dentro del Valle de Elqui, luego en su país y después, desde la segunda mitad de su vida, por todo el espacio del mundo occidental, reviste una dimensión casi mítica. En efecto, la niña campesina, pobre y silenciosa, introvertida y soñadora, se convertirá en la "reina" de la literatura hispanoamericana, pasando de la humilde cátedra de maestra rural a recibir los mayores honores mundiales, incluido el Premio Nobel de Literatura en 1945.

Con una lengua áspera, coloquial y apasionada, tanto su obra poética, desde *Desolación* (1922) hasta *Lagar* (1954), como su formidable obra en prosa se nos aparecen hoy cargadas de sentido visionario y profético frente a los destinos de América. Pero también Europa y aun países de culturas tan diferentes como Israel, China y Japón descubren los escritos de Gabriela Mistral como una revelación poética y humanística en la que se reconocen.

Libros, tesis de grado, inspiraciones poéticas y aun filosóficas surgen de este encuentro con alguien venido de Chile, nación que produce en casi sólo la primera mitad del siglo tres figuras universalmente representativas de la cultura latinoamericana: Gabriela Mistral, Vicente Huidobro y Pablo Neruda.

Si la obra de la poetisa chilena ha alcanzado una resonancia universal ello se debe tal vez a que en ella, como en toda creación auténtica, el apego por el mundo próximo y cotidiano no es un obstáculo para la comprensión y el contacto con otras lenguas y otras culturas. Así, Gabriela Mistral señaló entre sus maestros a Santa Teresa y a Góngora pero también a Dante, a Tagore y a los autores rusos, y aunque cristiana manifestó su admiración por el budismo.

Identificada entrañablemente con su paisaje y su pueblo —"soy, decía, una criatura rematadamente regional"—, Gabriela Mistral supo transformar su propia experiencia en voz arquetípica de la comunidad y hallar en el dolor del amor frustrado la fuente del amor universal. Porque en ella, siempre conmovida y atenta a la causa de los humillados y ofendidos, de todos los perseguidos del mundo, poesía y humanismo se confundieron en una sola dimensión: "Hay que transmitir la intensidad del alma y decir con valentía el mensaje que brota del corazón, antes de que lo rompa la muerte." ■

Texto adaptado de un artículo del Sr. Gastón Von Dem Bussche, profesor investigador de la Universidad Metropolitana de Chile.

Una academia de ciencias para el Tercer Mundo

POR AKHTAR MAHMOUD FAROUQUI

SIEMPRE se ha considerado a la ciencia como la máxima expresión de la solidaridad internacional, como el acervo común de los que lo tienen todo y de los más desfavorecidos. Sin embargo, su difusión ha sido sumamente desigual. Mientras en las naciones industrialmente desarrolladas del Norte la ciencia progresa constantemente, en el Sur los científicos son relativamente escasos. Trabajan al margen de la comunidad científica mundial y los recursos de que disponen son reducidos.

En estos últimos años ha surgido una nueva institución, la Academia de Ciencias del Tercer Mundo (TWAS), que ha contribuido eficazmente a los esfuerzos encaminados a subsanar el desequilibrio que existe en el plano científico entre el Norte y el Sur. La Academia es el primer foro internacional en el que se agrupan hombres y mujeres de ciencia del Tercer Mundo a fin de dar impulso en los países en desarrollo a las ciencias básicas y aplicadas.

Fue creada por iniciativa de Abdus Salam, Premio Nobel pakistaní, que ha dedicado más de cuarenta años de su vida a ayudar a los científicos de los países en desarrollo más pobres a superar su aislamiento y a participar en las actividades que se encuentran en la vanguardia del conocimiento científico.

La sede de la Academia, en Trieste (Italia), está en el edificio del Centro Internacional de Física Teórica (ICTP), que el profesor Salam preside desde su creación y que celebra este año su vigésimo quinto aniversario.

La Academia fue lanzada oficialmente en julio de 1985 por el Secretario General de las Naciones Unidas. En los cuatro años transcurridos desde su fundación, ha iniciado y aplicado diversos mecanismos para dar impulso a la ciencia en el Sur. Así, ha otorgado unos trescientos subsidios de investigación para científicos especializados en diferentes aspectos de la ciencia, como la óptica, la física nuclear, la energía solar y física con rayos láser. Los postulantes, cuyos proyectos son examinados por cuatro expertos internacionales, proceden de numerosos países —Jamaica, China, Argentina, India, Brasil, Pakistán, México, Angola, Perú, Tailandia, Turquía y Madagascar, para mencionar solamente unos pocos.

Gracias a un programa de donaciones realizado en colaboración con el ICTP, la Academia proporciona también literatura científica a los países en desarrollo que carecen de las divisas necesarias para procurársela. Un llamamiento formulado a las bibliotecas, las editoriales, los laboratorios y los particulares a fin de que donaran libros, publicaciones periódicas y equipo a los países en desarrollo ha dado resultados muy alentadores. En el marco de este programa se proporcionan anualmente alrededor de 50.000 libros y publicaciones periódicas a unas 500 instituciones de 90 países.

Un importante proyecto de la TWAS es un programa de becas Sur-Sur cuya finalidad es que un científico de un país en desarrollo pueda trabajar en otro. La Academia da también apoyo a las visitas de científicos del Tercer Mundo a laboratorios de biología, química y geología de Italia.

En 1987 la Academia creó un Premio de Historia de la Ciencia para destacar la labor de un científico de un país del Tercer Mundo cuyos resultados no hubiesen sido reconocidos previamente. El primer premio fue otorgado en 1988 a un ensayo acerca de las tablas astronómicas compiladas por el matemático Shams-al-Din-al-Jalili y utilizadas en Damasco para medir el tiempo desde el siglo XIV hasta el siglo XIX. El concurso, abierto a especialistas de todas las nacionalidades, permite obtener un premio de 10.000 dólares.

La Academia ha concedido también premios anuales de 10.000 dólares a científicos eminentes de países del Tercer Mundo en el ámbito de la física, la química, las matemáticas y la biología, y ha organizado conferencias sobre problemas esenciales para el Tercer Mundo. Una Conferencia sobre el Papel de la Mujer en el Desarrollo de la Ciencia y la Tecnología, celebrada en Trieste en el mes de octubre, contó con la participación de 240 mujeres de ciencia de más de 70 países.

La TWAS es una organización no gubernamental sin fines de lucro financiada actualmente en gran medida por el Canadá e Italia. La integran diez Premios Nobel procedentes de países del Tercer Mundo, 106 miembros provenientes de países en desarrollo, 42 miembros asociados (científicos de países industrializados nacidos en países en desarrollo o que se han distinguido en actividades científicas en el Tercer Mundo) y tres miembros correspondientes.

A fines de 1988, sólo tres años después de su creación, Ronald Léger, del Organismo Canadiense de Desarrollo Internacional, afirmaba que la TWAS había prestado ya una ayuda importante a numerosos científicos del Tercer Mundo que trabajan aisladamente. "Para ellos, señalaba Léger, la TWAS ha significado contar con piezas de repuesto de laboratorio, subsidios de viaje, intercambios Sur-Sur para científicos jóvenes o la suscripción a una publicación especializada para un científico aislado. Y, sobre todo, la TWAS ha abierto nuevas esperanzas." ■

Akhtar Mahmoud Farouqui es redactor del Boletín de la Academia de Ciencias del Tercer Mundo.

Créditos fotográficos

Portada, página 3: J. Blauel © Artothek, Munich / Bayer, Staatsgemäldesamlungen i. Germ. Nationalmuseum, Nurenberg. **Portada posterior:** H. Jurgens, H-O Peitgen, D. Saupe (Universitat Bremen) © *The Beauty of Fractals*, H-O Peitgen, P. Richter, Heidelberg, Springer Verlag, 1986. **Página 2:** © Nathalie Gyatso, Montfort l'Amaury. **Páginas 3, 6 recuadro, 9 recuadro:** Unesco / Michel Claude. **Páginas 5, 9:** Unesco / Belmenouar. **Página 10:** © Pedro Tzontemoc. **Página 12:** Erich Lessing, Kunst und Kulturarchiv © Laenderpress, Dusseldorf **Páginas 12-13:** Georg Gerster © Rapho, París. **Página 14:** Tomado de *Eléments d'histoire des sciences*, bajo la dirección de Michel Serres, París, Bordas, 1989 © Réunion des Musées nationaux, Archives Photeb, París / Musée du Louvre. **Páginas 14-15, 44-45:** © Réunion des Musées Nationaux, Musée du Louvre, París. **Páginas 16, 27:** Derechos reservados **Página 17:** © Trusties of the British Museum, Londres. **Página 18:** Wellcome Institute Library, Londres. **Página 19:** Scheldegger © Rapho, París. **Página 20:** © Roger Viollet, Musée Guimet, París. **Página 21:** © Roland y Sabrina Michaud, París. **Páginas 22-23:** © Vivian Bastian-Olmi, Suiza. **Páginas 22-23, 25 abajo, 26:** © Communauté Flamande, Commissariat Général à la Coopération Internationale, Bruselas. **Páginas 24, 25 arriba, 28:** Tomado de *Science and Civilisation in China* de Joseph Needham, vol. 3 © Cambridge University Press, Reino Unido **Página 29:** © J. L. Charmet, Bibliothèque Nationale, París. **Páginas 30, 31:** © J. L. Charmet, París. **Páginas 32-33:** © Stadtische Galerie - Liebighaus, Francfort. **Páginas 34-35:** © The Mariners Museum, Newport News, Virgina. **Páginas 36-37, 39, 40:** Roland y Sabrina Michaud © Rapho, París. **Páginas 38, 41:** © Roshdi Rashed, Bourg-la-Reine. **Páginas 42-43:** © Graphik Sammlung ETH, Zurich. **Páginas 44, 46, 48:** © Colección Viollet, París. **Páginas 46-47:** © Bibliothèque Royale Albert I, Bruselas, Réserve Précieuse **Página 47 derecha:** © Stillman Drake, Institute for the History and Philosophy of Science and Technology, Toronto. **Página 48:** © Roger Viollet, París. **Página 49:** © Unations. **Página 50:** © Third World Academy of Science, Trieste.

el CORREO de la UNESCO

AÑO XLII

Revista mensual publicada en 34 idiomas y en braille por la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura.

31, rue François Bonvin, 75015 París, Francia.

Teléfono:
PARA COMUNICARSE DIRECTAMENTE CON LAS PERSONAS QUE FIGURAN A CONTINUACIÓN MARQUE EL **45 68** SEGUIDO DE LAS CIFRAS QUE APARECEN ENTRE PARÉNTESIS JUNTO A SU NOMBRE:

Director: Bahgat Elnadi
Jefe de redacción: Adel Rifaat

REDACCIÓN EN LA SEDE (PARÍS)

Secretaria de redacción: Gillian Whitcomb
Español: Miguel Labarca, Araceli Ortiz de Urbina
Francés: Alain Lévêque, Neda El Khazen
Inglés: Roy Malkin, Caroline Lawrence
Arabe: Abdelrashid Elsadek Mahmoudi
Estudios e investigaciones: Fernando Ainsa
Unidad artistica, fabricación: Georges Servat
Ilustración: Ariane Bailey (46.90)
Documentación: Violette Ringelstein (46.85)
Relaciones con las ediciones fuera de la Sede: Solange Belin
Relaciones con el público: Claudie Duhamel (45.86)
Secretaria de dirección: Annie Brachet (47.15), Mouna Chatta
Ediciones en braille en español,francés, inglés y coreano: Marie-Dominique Bourgeais

EDICIONES FUERA DE LA SEDE

Ruso: Georgi Zelenin (Moscú)
Alemán: Werner Merkli (Berna)
Italiano: Mario Guidotti (Roma)
Hindi: Sri Krishna Kumar Singh (Delhi)
Tamul: M. Mohammed Mustafa (Madrás)
Persa: H. Sadough Vanini (Teherán)
Portugués: Benedicto Silva (Río de Janeiro)
Neerlandés: Paul Morren (Amberes)
Turco: Mefra Ilgazer (Estambul)
Urdu: Hakim Mohammed Said (Karachi)
Catalán: Joan Carreras i Martí (Barcelona)
Malayo: Azizah Hamzah (Kuala Lumpur)
Coreano: Paik Syeung Gil (Seúl)
Swahili : Domino Rutayebesibwa (Dar-es-Salaam)
Croato-serbio, esloveno, macedonio y serbio-croata: Bozidar Perković (Belgrado)
Chino: Shen Guofen (Beijing)
Búlgaro: Goran Gotev (Sofía)
Griego: Nicolas Papageorgiou (Atenas)
Cingalés: S.J. Sumanasekera Banda (Colombo)
Finés: Marjatta Oksanen (Helsinki)
Sueco: Manni Kössler (Estocolmo)
Vascuence: Gurutz Larrañaga (San Sebastián)
Tai: Savitri Suwansathit (Bangkok)
Vietnamita: Dao Tung (Hanoi)
Pashtu: Nasir Seham (Kabul)
Hausa: Habib Alhassan (Sokoto)
Bengali: Ahmed Hedayet (Dacca)

PROMOCIÓN Y VENTAS

Responsable: Henry Knobil (45.88), **Asistente:** Marie-Noëlle Branet (45.89), **Suscripciones:** Marie-Thérèse Hardy (45.65), Jocelyne Despouy, Alpha Diakité, Jacqueline Louise-Julie, Manichan Ngonekeo, Michel Ravassard, Mohamed Salah El Din,
Relaciones con los agentes y los suscriptores: Ginette Motreff (45.64), **Contabilidad:** Liliane Tasch (45.66), **Proyectos culturales:** Ricardo Zamora-Pérez (45.80), **Depósito:** Héctor García Sandoval

PUBLICIDAD

Publicat: 17, Boulevard Poissonnière, 75002 Paris. Tel: 40.26.51.26
Director comercial: Benoît Rosier
Director de la publicidad: Danièle Michelet

TARIFAS DE SUSCRIPCIÓN

Tel: 45.68.45.65
1 año: 126 francos franceses. 2 años: 234 francos.
Para los paises en desarrollo:
1 año: 99 francos franceses. 2 años: 180 francos.
Reproducción en microfilm (1 año): 85 francos.
Pago por cheque, CCP o giro a la orden de la Unesco.

IMPRIMÉ EN FRANCE (Printed in France)
DEPOT LEGAL: C1-NOVEMBRE 1989
Fotocomposición: El Correo de la Unesco, Fotograbado-impresión: Maury-Imprimeur S.A., Z.I. route d'Etampes, 45330 Malesherbes.

ISSN 0304-310X   Nº 11 - 1989 - OPI - 89 - 3 - 474 S

Este número contiene, además de 54 páginas de textos, un encarte de 4 páginas situado entre las p.10-11 y 42-43.