

DISEÑO Y CONSTRUCCION DE UN GENERADOR  
MARKOFFIANO

Gertrudis Kurz de Delara y Antonio Elguézabal Buchanan  
Laboratorio de Radiación Electromagnética de la  
C.N.E.N.

(Recibido: 8 de Septiembre 1962)

RESUMEN

*Usando un nuevo método de diseño<sup>1</sup>, se ha efectuado la síntesis de un generador que produce una señal markoffiana de tres símbolos con probabilidades predeterminadas y ajustables que pueden variarse a voluntad en incrementos de 1/8 entre los valores cero y uno. Este generador se encuentra en operación y ha funcionado satisfactoriamente.*

El objeto de este trabajo es el de reportar sobre el diseño y construcción de un generador que produce una señal markoffiana de tres símbolos con características predeterminadas y ajustables. Este diseño se hizo para verificar experimentalmente algunos resultados que se deducen de una teoría general de autómatas expuesta en un trabajo en vías de publicación<sup>1</sup>.

La teoría en cuestión aprovecha la analogía formal que puede establecerse entre el sistema de ecuaciones lógicas que describen el comportamiento de un autómata causal en su espacio fase y las ecuaciones algebraicas que rigen el comportamiento de un sistema markoffiano con el mismo número de estados.

Sabido es que un autómata puede describirse como un dispositivo dotado de un cierto número de terminales de acceso ó entradas "x", un número de salidas "z" y un conjunto de variables binarias internas "y" cuyas combinaciones permitidas de valores especifican los llamados "estados internos" ó simplemente "estados" del autómata. Bajo la influencia de los estímulos "x" el autómata experimenta una sucesión de transiciones en sus estados internos "y" acompañadas por la aparición en la salida de decisiones "z" que pueden representarse como funciones lógicas de los estados.

Es usual y tal es nuestro caso, que la decisión "z" sea una función unívoca del estado, de manera que a una secuencia definida de estados corresponde una secuencia bien determinada de decisiones que reflejan fielmente los estados sucesivos, de manera que ambas secuencias, la de estados "y" y la de decisiones "z" pueden considerarse como dos representaciones diferentes del mismo proceso.

La teoría<sup>1</sup> parte de las llamadas ecuaciones canónicas que pueden considerarse como ecuaciones de movimiento del autómata en su espacio fase que no es sino el espacio de estados internos "y". Recordamos que estas ecuaciones pueden escribirse como igualdades lógicas de la forma:

$$y_1 = f(y, x) \tag{1}$$

en donde "y" y "x" son el estado interno del autómata y el estímulo que actúa sobre el mismo al tiempo cuantizado  $t$  y " $y_1$ " es el estado interno al tiempo  $t + 1$ . En otras palabras, las ecuaciones canónicas determinan el estado siguiente en términos del estado y de la estimulación que prevalecían en el tiempo inmediatamente anterior. Claramente (1) puede interpretarse como la expresión de una transformación

$$\downarrow \begin{pmatrix} y \\ y_1 \end{pmatrix}$$

del espacio fase en si mismo, condicionada por un conjunto de parámetros "x" que son precisamente los estímulos.

Introduciendo variables lógicas dependientes del tiempo que designan directamente los estados, en la teoría citada se demuestra que estas ecuaciones canónicas pueden siempre escribirse como un sistema de ecuaciones lógicas de la forma

$$E_1 = X E \quad (2)$$

en donde "E" es un vector llamado vector de estado, cuyos componentes son los estados internos del sistema al tiempo  $t$ , de manera que si éste posee  $n$  estados, "E" tendrá precisamente  $n$  componentes. "X", la llamada matriz de estímulos ó matriz de excitaciones, es una matriz  $n \times n$  formada con las variables que representan los estímulos "x" al tiempo  $t$ , y "E<sub>1</sub>" es el mismo vector de estado al tiempo siguiente  $t + 1$ .

Esta formulación es válida para un autómata determinista cuyos transformaciones internas estan causalmente determinadas por los estímulos. Sin embargo cuando se consideran las ecuaciones de movimiento de un autómata probabilista, cuyas transiciones en vez de ser causales, son casuales y estan limitadas solamente por un conjunto de probabilidades de transición, se encuentra, como es bien sabido, que dichas ecuaciones pueden escribirse en lenguaje algebraico de una manera formalmente idéntica a las ecuaciones (2), con la única diferencia de que la matriz "X" que determina la transformación  $E \rightarrow E_1$ , en vez de ser una matriz formada por estímulos, tiene elementos que son justamente las probabilidades de transición.

Esta analogía puede explotarse, haciendo que los estímulos "x" correspondan a una señal estocástica con una ley de probabilidad determinada, lo cual permite reinterpretar la matriz "X" como la matriz característica de un proceso markoffiano, llegandose de esta suerte a un método que permite la síntesis directa de un generador, cuyas transiciones siguen la cadena markoffiana, cuyas probabilidades transicionales son los elementos de la matriz. Si además, los procesos estocásticos "x" se hacen ajustables, la cadena de Markoff será ajustable en la misma medida.

A fin de aclarar el proceso, consideramos un lenguaje de  $n$  símbolos {S}

$$S_1, S_2, \dots, S_n,$$

suponiendo que este lenguaje ha sido producido por un autómata de  $n$  estados tal que cuando quiera que se encuentra en el estado " $j$ ", emite el símbolo  $S_j$ . Consideremos además una secuencia de  $r$  tiempos sucesivos

$$t_1, t_2, \dots, t_r$$

y supongamos que en estos tiempos el generador haya emitido una secuencia de símbolos

$$s_1, s_2, \dots, s_r \quad \text{que será una selección arbitraria de } r \text{ símbolos de } \{S\} \text{ con posibles repeticiones.}$$

Designando por

$$p(s_{r+1} / s_1, s_2, \dots, s_r)$$

la probabilidad condicional de que el generador emita el símbolo  $s_{r+1}$  al tiempo  $t_{r+1}$ , cuando había emitido los símbolos  $s_1, s_2, \dots, s_r$  en los tiempos  $t_1, t_2, \dots, t_r$ , se sabe que la característica distintiva de un lenguaje markoffiano puede establecerse por la condición:

$$p(s_{r+1} / s_1, s_2, \dots, s_r) = p(s_{r+1} / s_r) \quad (3)$$

según la cual la probabilidad condicional de cualquier símbolo  $s_{r+1}$  al tiempo  $t_{r+1}$  depende solamente del símbolo  $s_r$  emitido al tiempo inmediatamente anterior  $t_r$ , pero es independiente de los símbolos emitidos en cualesquiera tiempos anteriores a  $t_r$ .

El proceso markoffiano puede pues caracterizarse por un sistema de  $n^2$  probabilidades de transición

$$p(s_i / s_k) \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

que son las probabilidades condicionales de emisión del símbolo  $s_i$ , cuando en el tiempo inmediatamente anterior se había emitido el símbolo  $s_k$ . Si además, y esto será supuesto explícitamente en la secuela, el conjunto de valores  $p(s_i / s_k)$  es

independiente del origen del tiempo ó, dicho de otro modo, es invariante frente a translaciones en el tiempo, el proceso markoffiano en cuestión será estacionario. En nuestro caso es además finito por referirse a un número finito de símbolos.

Haciendo por brevedad  $p(i/k) = p(s_i/s_k)$ , recordamos que las  $p(i/k)$  son precisamente los elementos de la llamada "matriz de Markoff"

$$P = \{ \{ p(i/k) \} \} \quad (4)$$

$$(i, k = 1, 2, \dots, n)$$

que satisfacen las conocidas relaciones:

$$0 \leq p(i/k) \leq 1 \quad (4a)$$

$$\sum_i p(i/k) = 1 \quad (4b)$$

la segunda de las cuales supone que, de acuerdo con la hipótesis de un proceso estacionario, imaginamos una secuencia indefinidamente larga de símbolos, de manera que no nos ocuparemos de cuestiones relativas a transitorios iniciales ó condiciones de terminación.

La matriz (4) caracteriza y describe totalmente el proceso, porque si  $p(i, k)$  representa la probabilidad absoluta de ocurrencia de un digrama  $(s_i, s_k)$ , y  $p(i)$  la probabilidad absoluta de ocurrencia del símbolo  $s_i$ , en virtud de la relación

$$p(i, k) = p(i/k) p(k) \quad (5)$$

se obtiene, sumando sobre  $k$

$$p(i) = \sum_k p(i/k) p(k) \quad (6)$$

ecuación que, combinada con la condición de normalización

$$\sum_i p(i) = 1 \quad (6a)$$

permite calcular a partir del sistema de los  $p(i/k)$  el conjunto de las  $n$  probabilidad-

des absolutas  $p(i)$ , ( $i = 1, 2 \dots n$ ), como las componentes de un vector propio de la matriz de Markoff perteneciente al valor propio  $\lambda = 1$ .

Entonces (5) permite obtener las probabilidades de los dígramas y, por encadenamiento, puede computarse la probabilidad de cualquier secuencia.

Nuestro problema radicaba por tanto en sintetizar un generador en el que las  $p(i/k)$  pudieran adoptarse como elementos básicos de diseño, ajustarse a valores predeterminados y modificarse a voluntad dentro de ciertos límites. De esta manera nuestro generador sería capaz de producir toda una clase de señales markoffianas. A continuación veremos que de hecho fué posible extender la versatilidad del generador para producir señales aún de clases diferentes.

### ESPECIFICACION DEL AUTOMATA

Comenzamos por limitar a tres el número de símbolos del lenguaje, considerando por tanto un generador de 3 estados  $A, B, C$ , con la propiedad de que habría de emitir los símbolos  $a, b, c$  según se encontrara en los estados  $A, B, C$  respectivamente.

Nos propusimos variar las probabilidades de transición de  $1/8$  en  $1/8$  entre los límites 0 y 1, considerando que esto era suficiente para nuestros propósitos sin aumentar indebidamente el costo del equipo.

Según queda dicho, el generador para su operación requiere ser estimulado por 3 procesos estocásticos  $x_1, x_2, x_3$  que, con el propósito de garantizar el comportamiento markoffiano del generador mismo, se escogieron como señales bivaluadas, que tomarán los valores 0 ó 1 con probabilidades determinadas, cuidando sin embargo de que los 3 procesos fueran estadísticamente independientes.

El diagrama de transiciones del autómata se planeó con arreglo a la fig. 1. Se ve que los tres procesos independientes  $x_1, x_2$  y  $x_3$  actúan selectivamente sobre los estados  $A, B$  y  $C$  respectivamente. Por ejemplo, si el autómata está en "A", el único estímulo efectivo es  $x_1$  de manera que si  $x_1 = 0$ , el autómata permanece en A, en tanto que si  $x_1 = 1$ , pasa a B. Semejantemente ocurre con los 2 estados restantes.

Con este esquema queda garantizado que el estado final de una transición depende solamente del estado anterior y del valor del estímulo asignado a éste último, asegurándose así el carácter markoffiano del proceso, impidiéndose que se establezca una dependencia de duración mayor a un tiempo, lo que produciría un lenguaje

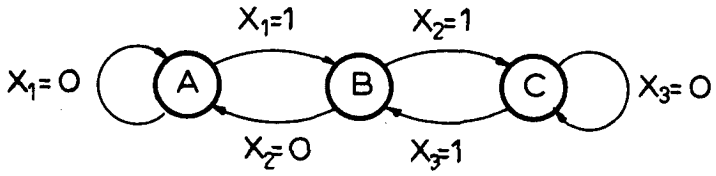


FIG.1

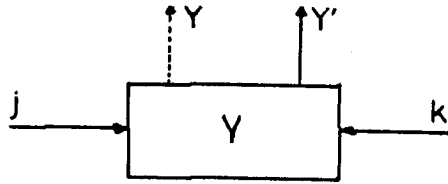


FIG.2

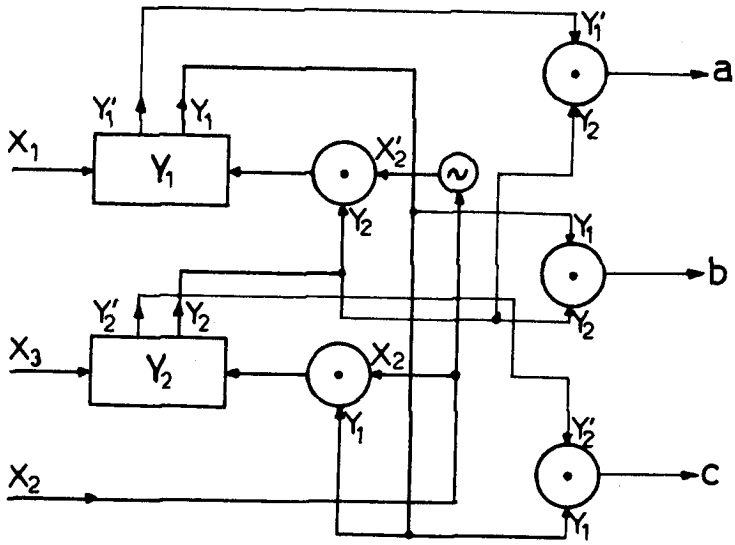


FIG.3

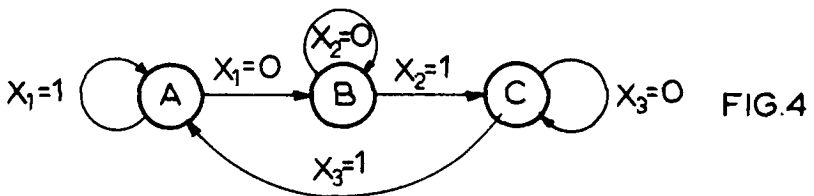


FIG.4

con mayor coherencia que el requerido. Es claro que esta última condición requiere la completa independencia estadística de las señales  $x_1, x_2, x_3$ .

Las ecuaciones lógicas que siguen las transiciones del autómata resultan inmediatamente de la gráfica de la fig. 1. Y son en este caso:

$$\begin{aligned} A_1 &= Ax_1' + Bx_2' \\ B_1 &= Ax_1 + Cx_3 \\ C_1 &= Bx_2 + Cx_3' \end{aligned} \quad (7)$$

en donde la primera ecuación significa, por ejemplo, que el autómata se encontrará en el estado  $A$  al tiempo  $t + 1$ , si al tiempo  $t$  se encontraba en  $A$  y  $x_1 = 0$  (las primas designan negación), o bien se encontraba en  $B$  y  $x_2 = 0$ . Las otras dos ecuaciones tienen una interpretación semejante.

La interpretación probabilística de las transiciones puede en este caso establecerse de una manera natural como sigue: la transición,  $A \rightarrow B$  por ejemplo, ocurre solamente si  $x_1 = 1$ , de manera que si  $p(x_1 = 1)$  es la probabilidad de que la variable  $x_1$  tome el valor 1, puede evidentemente afirmarse que ésta es precisamente la probabilidad de la transición.

Semejantemente si  $p(x_1 = 0)$  es la probabilidad del evento  $x_1 = 0$ , será así mismo la probabilidad condicional de la transición  $A \rightarrow A$ . Pueden por tanto hacerse las identificaciones

$$\begin{aligned} p(a/a) &= p(x_1 = 0) \\ p(b/a) &= p(x_1 = 1) \end{aligned}$$

que satisfacen la relación obvia:

$$p(a/a) + p(b/a) = p(x_1 = 0) + p(x_1 = 1) = 1$$

dado que escogimos para este caso:

$$p(c/a) = 0$$



de manera que en nuestro lenguaje nunca aparecería una  $c$  después de una  $a$ . De manera análoga se interpretan las transiciones remanentes pudiendo así establecerse el conjunto de identificaciones:

$$\begin{aligned}
 p(a/a) &= p(x_1 = 0) \\
 p(b/a) &= p(x_1 = 1) \\
 p(a/b) &= p(x_2 = 0) \\
 p(c/b) &= p(x_2 = 1) \\
 p(b/c) &= p(x_3 = 1) \\
 p(c/c) &= p(x_3 = 0)
 \end{aligned} \tag{8}$$

de donde se derivan inmediatamente las restricciones:

$$\begin{aligned}
 p(a/a) + p(b/a) &= 1 \\
 p(a/b) + p(c/b) &= 1 \\
 p(b/c) + p(c/c) &= 1 \\
 p(c/a) = p(b/b) = p(a/c) &= 0
 \end{aligned} \tag{8a}$$

Escribiendo las ecuaciones lógicas (7) en la forma matricial (2), se obtiene:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & 0 \\ x_1 & 0 & x_3 \\ 0 & x_2 & x'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \tag{9}$$

en donde

$$X = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & 0 \\ x_1 & 0 & x_3 \\ 0 & x_2 & x'_3 \end{pmatrix} \tag{9a}$$

es la matriz de excitación.

De ésta y de las identificaciones (8) resulta inmediatamente la matriz de Markoff asociada:

$$P = \begin{pmatrix} p(a/a) & p(a/b) & 0 \\ p(b/a) & 0 & p(b/c) \\ 0 & p(c/b) & p(c/c) \end{pmatrix} \quad (10)$$

Nuestro problema, suponiendo por el momento que los procesos estocásticos  $x_1, x_2, x_3$  son disponibles, se reduce a sintetizar un autómata que realiza las ecuaciones (7).

### SINTESIS LOGICA DEL CIRCUITO

La síntesis se desarrolla ahora de la manera ordinaria<sup>2</sup>. Para representar los 3 estados utilizamos 2 variables binarias internas  $y_1, y_2$  y escogemos las asignaciones:

$$\begin{aligned} A &= y_1' y_2 & y_1' y_2' &= 0 \\ B &= y_1 y_2 \\ C &= y_1 y_2' \end{aligned} \quad (11)$$

de donde se obtuvieron las ecuaciones de transición

$$\begin{aligned} f(y_1) &= y_2' + x_2 y_1 + x_1 y_1' \\ f(y_2) &= y_1' + x_3 y_2' + x_2' y_2 \end{aligned} \quad (12)$$

en donde  $f(y_1)$  y  $f(y_2)$  representan los valores de  $y_1$  y  $y_2$  al tiempo siguiente al que corresponde a los segundos miembros.

(12) permite realizar inmediatamente una síntesis lógica, utilizando elementos de decisión (conjunciones, alternaciones y negaciones) y de retardos. Sin embargo en nuestro caso encontramos que era posible lograr una considerable simplificación en la lógica, realizando las variables  $y_1$  e  $y_2$  como memorias "j-k".

Entendemos como memoria  $j-k$  un dispositivo, Fig. 2, con dos entradas  $j$  y  $k$  y una salida  $y$  (que a menudo se completa con la salida complementaria  $y'$ ) cuya operación obedece a las siguientes reglas:

y prende con la combinación  $j = 1, k = 0$   
 y permanece prendida en tanto que  $k = 0$ ;  
 se apaga con  $j = 0, k = 1$  y permanece  
 apagada en tanto que  $j = 0$ ;  
 mantiene el valor anterior con la combinación  $j = 0, k = 0$  y cambia (de 0 a 1, ó de 1 a 0) con la combinación  $j = 1, k = 1$ .

Haciendo la síntesis de (12) con esta clase de memoria se obtiene el resultado:

$$\begin{aligned}
 f(y_1) &= x_1 & f(y_2) &= x_3 \\
 k(y_1) &= x_2' y_2 & k(y_2) &= x_2' y_1
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

de donde resulta inmediatamente el diagrama lógico que se muestra en la Fig. 3. Aquí los símbolos  $a, b, c$  resultan con las conjunciones indicadas de acuerdo con las asignaciones (11).

La mecanización de las memorias  $j-k$  se hizo con la ayuda de un circuito de Eccles-Jordan con las modificaciones requeridas para obtener la lógica deseada, las cuales pueden notarse en el diagrama detallado que se muestra en la Fig. 9.

Con el objeto de ajustar la unidad de duración se introdujeron retardos auxiliares de 0.2 mseg.

### GENERADOR DE UN PROCESO CICLICO

Modificando el esquema de transiciones de la Fig. 1 de acuerdo con el esquema que se muestra en la Fig. 4, se pensó, de ser posible, generar además de un proceso markoffiano puro, uno de los llamados cíclicos<sup>3</sup> por el interés que en sí mismos estos encierran y por proporcionarnos la oportunidad de comparar posteriormente diversos efectos de una y otra clase de señales.

Siguiendo el mismo método anterior se encontraban las ecuaciones lógicas:

$$\begin{aligned} A_1 &= A x_1' + C x_3 \\ B_1 &= A x_1 + B x_2' \\ C_1 &= B x_2 + C x_3' \end{aligned} \quad (14)$$

con el conjunto de identificaciones:

$$\begin{aligned} p(a/a) &= p(x_1 = 0) \\ p(b/a) &= p(x_1 = 1) \\ p(b/b) &= p(x_2 = 0) \\ p(c/b) &= p(x_2 = 1) \\ p(c/c) &= p(x_3 = 0) \\ p(a/c) &= p(x_3 = 1) \end{aligned} \quad (15)$$

y las restricciones:

$$\begin{aligned} p(a/a) + p(b/a) &= 1 \\ p(b/b) + p(c/b) &= 1 \\ p(c/c) + p(a/c) &= 1 \\ p(a/b) = p(b/c) = p(c/a) &= 0 \end{aligned} \quad (15a)$$

obteniéndose así la matriz de Markoff:

$$P = \begin{pmatrix} p(a/a) & 0 & p(a/c) \\ p(b/a) & p(b/b) & 0 \\ 0 & p(c/b) & p(c/c) \end{pmatrix} \quad (16)$$

Realizando la síntesis con memorias  $j$ - $k$  y empleando las mismas asignaciones (11), se obtiene la lógica:

$$\begin{aligned} j(y_1) &= x_1 & j(y_2) &= x_3 \\ k(y_1) &= x_3 y_2' & k(y_2) &= x_2 y_1 \end{aligned} \quad (17)$$

Comparando este resultado con el obtenido con el caso acíclico (13), se ve de inmediato la gran semejanza entre uno y otro. Esta feliz circunstancia nos permitió fundir las dos formas en un mismo generador y pasar de una a otra a voluntad, mediante una simple llave de cambio.

## GENERADOR POISSONIANO CON PROBABILIDAD AJUSTABLE

La operación de nuestro generador depende ahora de la disponibilidad de tres señales de entrada  $x_1, x_2, x_3$  bivaluadas, estadísticamente independientes, y con probabilidades ajustables de tomar los valores 0 ó 1.

Señales de esta naturaleza pueden obtenerse partiendo de trenes de pulsos poissonianos. Para obtener éstos, decidimos emplear muestras radioactivas, dotada c.u. de un sistema de contadores de Geiger que, mediante filtraje adecuado, se hicieron sensibles a una sola clase de radiación (rayos  $\gamma$ ). Como muestras se emplearon pequeñas cantidades de  $U_3O_8$ .

La frecuencia fundamental del proceso poissoniano puede regularse, sin afectar su caracter, de dos maneras: variando la cantidad de muestra ó más fácilmente, variando la distancia entre ésta y los contadores, ajustando así el ángulo sólido de detección. Dado que el sistema empleado para c.u. de las tres señales es idéntico, describimos solamente una de ellas, digamos "x".

El tren de pulsos poissonianos, obtenido a la salida del sistema de contadores, se sujeta primero a una conformación con el propósito de controlar la forma del pulso, su altura y duración.

El intervalo medio entre pulso y pulso es del orden de 2-5 m seg. y la duración de pulso conformado es del orden de 1-2  $\mu$  seg. Para nuestro propósito los pulsos individuales pueden considerarse como instantáneos y el tren poissoniano puede representarse como el renglón "w" de la Fig. 5. Es de hacerse notar que siendo el tiempo muerto de los contadores del orden de 20  $\mu$  seg, para las frecuencias medias de repetición que nosotros usamos, el error introducido por éste en la estadística, es, para todo propósito práctico, despreciable. Para ajustar la señal "x" a una probabilidad bien definida no seguimos el método de emplear una compuerta que deja pasar solamente un porcentaje fijo de pulsos. Este método tiene

el inconveniente, de que la probabilidad de ocurrencia de un pulso no depende solamente del ajuste de la compuerta sino también de la frecuencia media de los pulsos "w" que habrá por tanto de verificarse en cada experimento mediante conteo, y de ningún modo es comodo para ajustarse. El procedimiento de White<sup>4</sup>, que resuelve este problema, habría salido demasiado costoso, para realizarse en tres unidades idénticas.

El método que hemos adoptado se ilustra primero mediante la señal "a" de Fig. 5. Hacemos que el tren "w" excite un contador binario, cuya salida bivaluada adoptará la forma "a". Dado el carácter poissoniano del tren "w" y la conocida ley de repartición de los pulsos poissonianos en el tiempo<sup>3</sup>, es inmediato que la señal es estocástica y tiene la propiedad de que

$$p(a = 1) = p(a = 0) = 1/2 .$$

Para obtener ahora según el mismo principio una "x" con probabilidad ajustable a diferentes valores, subdividimos mediante un sistema adecuado de contadores, la secuencia de intervalos entre los pulsos  $t_0, t_1, t_2, \dots$ , no como en el ejemplo de la señal "a" en trozos de 2 tiempos (haciendo "activo" cada segundo de ellos), pero en trozos de 8 tiempos, lo que nos permitió escoger como tiempo activo 1, ó 2, ..... hasta 7 de ellos, dándonos señales con probabilidad  $p(x = 1)$  de 1/8, 2/8... hasta 7/8. Queda entendido que la subdivisión en 8 tiempos es perfectamente arbitraria, habiéndose podido escoger cualquier otra potencia de 2.

Mostramos también en la gráfica Fig. 5 tres de estas posibles señales adonde "b" representa una señal con  $p(x = 1) = 1/8$ , "c" con  $p(x = 1) = 2/8$  y "d" con  $p(x = 1) = 3/8$ .

El dispositivo para efectuar esta operación se construyó en forma de un autómata de 8 estados  $a, b, c, \dots, h$ , cuyo diagrama de transiciones se muestra en Fig. 6. Las transiciones de un estado al siguiente se efectúan mediante los pulsos de la señal "w" en tanto que el autómata queda estable durante los intervalos entre pulsos.

De este autómata podemos obtener la señal requerida "x", dando simplemente salida "1" a un número escogido de estados y formando las alternaciones lógicas correspondientes. Así obtendremos por ejemplo, una señal con  $p(x = 1) = 1/8$ ,

dando salida "1" solamente a uno cualquiera de los 8 estados y dando salida "0" a los demás. De la misma manera obtendremos una señal con  $p(x = 1) = 2/8$ , si la salida se hace "1", cuando el autómata se encuentra ó en uno, ó en otro de dos estados escogidos de los 8, haciéndose "0" en los demás. De manera análoga realizamos los valores restantes para las probabilidades  $p(x = 1) = n/8$ , ( $n = 1, 2, \dots, 7$ ).

Para la síntesis de este autómata se necesitan tres variables internas, bivaluadas  $y_1, y_2, y_3$ , cuyas 8 combinaciones pueden asignarse una por una a los 8 estados. Estas variables "y" fueron realizadas en forma de tres contadores binarios, conectados en cascada, como lo demuestra el diagrama de bloques de la Fig. 7.

Los cambios entre los niveles cero y uno se hacen para  $y_1$  con cada segundo pulso, para  $y_2$  con cada cuarto pulso y para  $y_3$  con cada octavo pulso. Las asignaciones de las combinaciones de las tres variables "y" a los estados del autómata se hicieron por orden alfabético según la siguiente tabla:

| Estado | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ |
|--------|-------|-------|-------|
| a      | 0     | 0     | 0     |
| b      | 1     | 0     | 0     |
| c      | 0     | 1     | 0     |
| d      | 1     | 1     | 0     |
| e      | 0     | 0     | 1     |
| f      | 1     | 0     | 1     |
| g      | 0     | 1     | 1     |
| h      | 1     | 1     | 1     |

Los estados a, b, c, ..., h pudieron así ser realizados formando todas las conjunciones posibles entre las salidas (afirmadas y negadas) de los tres contadores, combinándolas después de 7 diferentes maneras por medio de alternaciones, dando c.u. una posible señal "x".

Fue posible simplificar algo esta solución y reducir a un número más costoso los diodos necesarios para formar las conjunciones y alternaciones, agregando un cuarto paso de multivibrador biestable. Este paso, marcado con "x" en la Fig.7

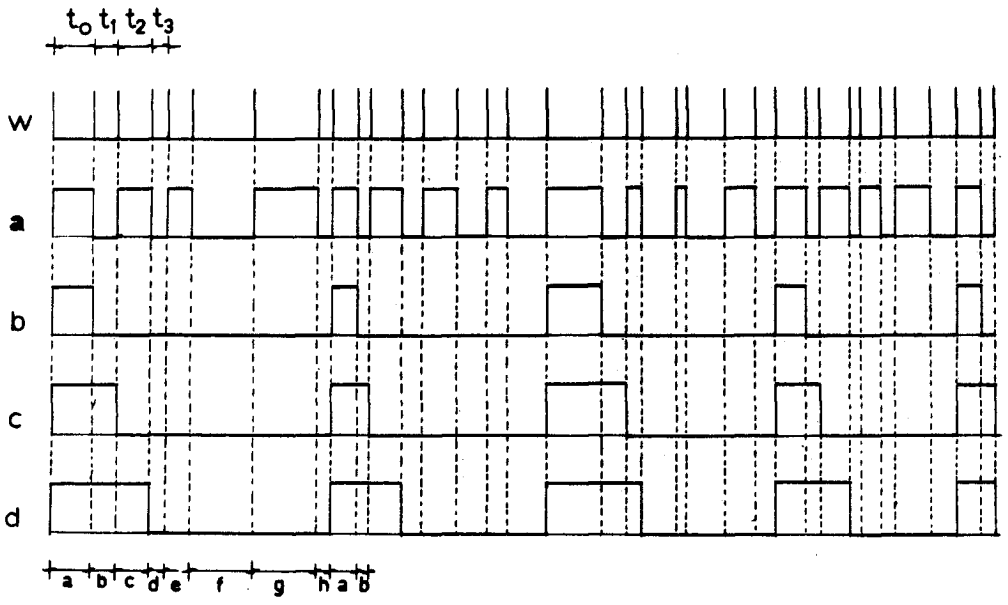


Fig.5.

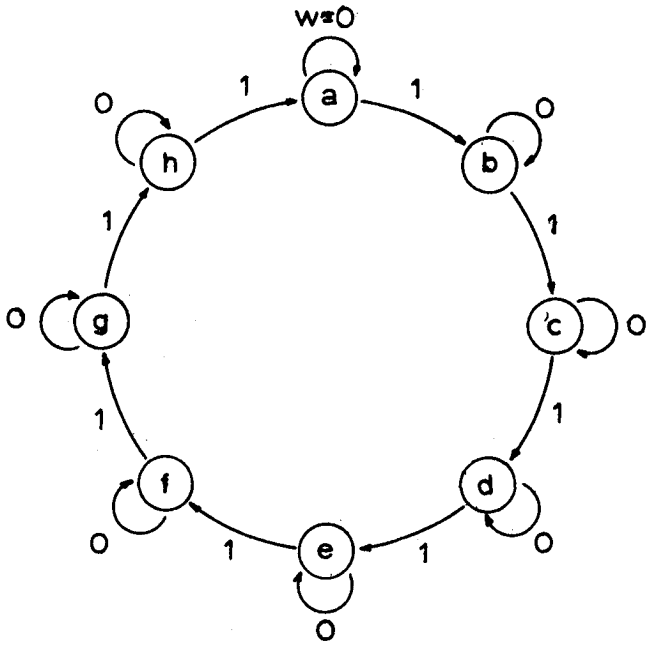
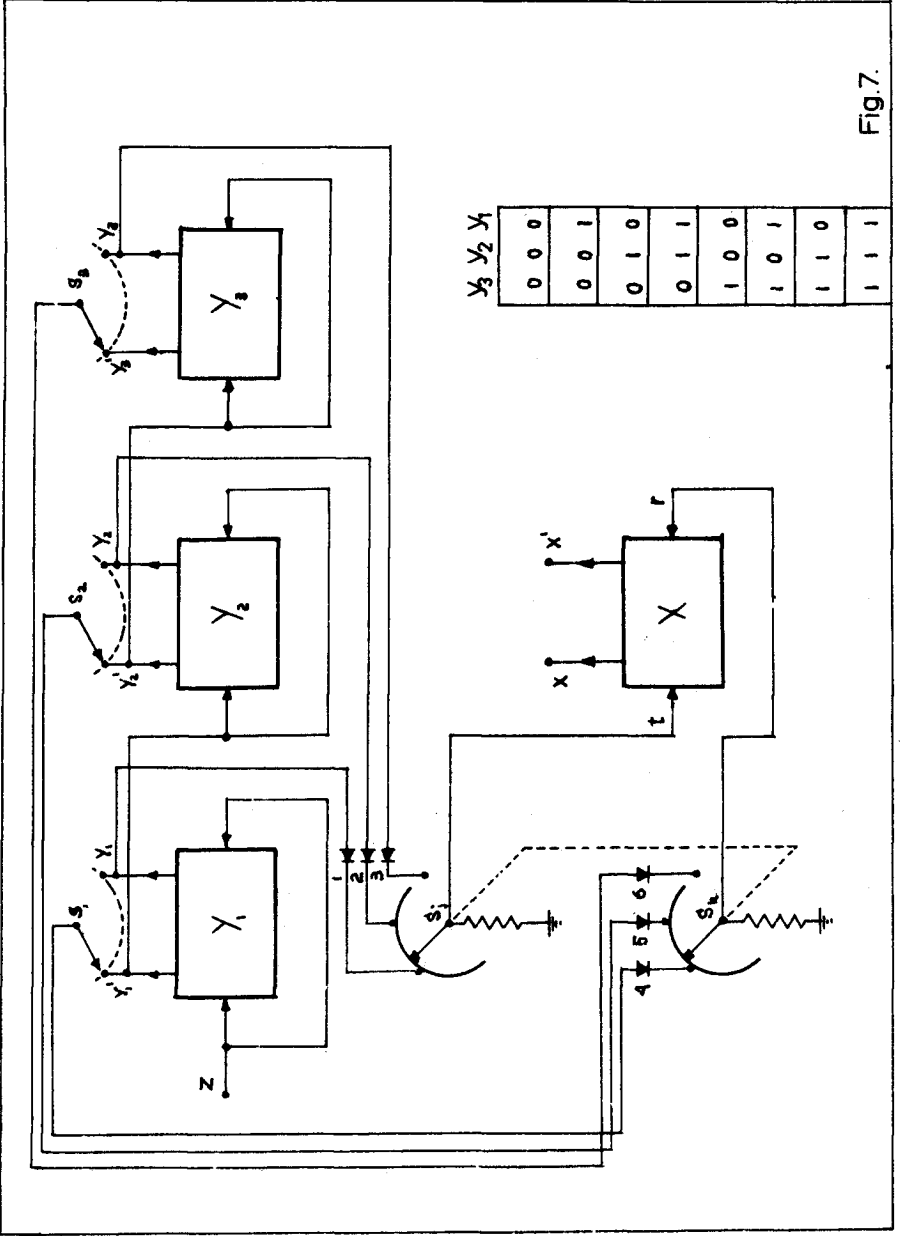


Fig.6.





| $Y_3$ | $Y_2$ | $Y_1$ |
|-------|-------|-------|
| 0     | 0     | 0     |
| 0     | 0     | 1     |
| 0     | 1     | 0     |
| 0     | 1     | 1     |
| 1     | 0     | 0     |
| 1     | 0     | 1     |
| 1     | 1     | 0     |
| 1     | 1     | 1     |

Fig.7.

tiene dos entradas independientes "s" y "r" y su salida "x" prende al excitarse la línea de entrada "s" y se apaga al excitarse la línea de entrada "r".

Excitando ahora "s" con una combinación fija de las variables  $y_1, y_2, y_3$ , en nuestro caso con la conjunción  $y'_1 y'_2 y'_3$  que corresponde al estado "a", excitamos la entrada "r" con una conjunción susceptible de ajustarse a voluntad a cualquiera de los demás estados. De esta manera la salida de la memoria "s-r" tomará el valor "1" al iniciarse el estado "a", quedará en "1" hasta que se apaga con el estado al cual habíamos ajustado "r" y quedará apagado hasta que vuelva otra vez al estado "a".

Refiriéndonos a los ejemplos gráficos de la Fig. 5 obtendremos las señales "b", "c", "d" si excitamos en cada caso la línea "s" al iniciarse el estado "a" y ajustamos la línea "r" de tal manera que se excita para la señal "b" al iniciarse el estado "b", para la señal "c" al iniciarse el estado "c" y para la señal "d" al iniciarse el estado "d".

El ajuste de "r" se efectúa mediante tres conmutadores, uno para cada variable, con los cuales se puede escoger entre la salida afirmada y negada correspondiente.

## EIGENVALORES DE LA MATRIZ DE MARKOFF

Presentamos a continuación unos resultados de los cálculos numéricos que efectuamos con valores particulares para los términos de la matriz de Markoff en sus dos formas, presentadas en (10) y en (16) para los casos cíclico y acíclico. Seguimos en estos cálculos la exposición de Blanc-Lapierre y Fortet<sup>3</sup> sobre los procesos de Markoff finitos y estacionarios, aplicando la ecuación de Chapman-Kolmogorov<sup>5</sup> en su forma matricial para obtener las probabilidades condicionales  $p(i_{n+t}/k_n)$  de que ocurre el símbolo "i" un número de instantes  $t$  arbitrario después de la ocurrencia del símbolo "k". Estas probabilidades se calculan como los términos de una matriz

$$P(t) = P^t \quad (18)$$

o sea de la potencia de orden "t" de la matriz original que da las probabilidades condicionales para los intervalos subsecuentes. En nuestros cálculos se adopta-

ron los siguientes valores numéricos para los términos  $p(i/k)$  de la matriz "P":

I.- Forma I, acíclica, matriz  $P_I$  de (10):

$$P_I = \begin{pmatrix} p(a/a) & p(a/b) & 0 \\ p(b/a) & 0 & p(b/c) \\ 0 & p(c/b) & p(c/c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \quad (10a)$$

II.- Forma II, cíclica, matriz  $P_{II}$  de (16):

$$P_{II} = \begin{pmatrix} p(a/a) & 0 & p(a/c) \\ p(b/a) & p(b/b) & 0 \\ 0 & p(c/b) & p(c/c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 3/4 \\ 3/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \quad (16a)$$

Además asignamos arbitrariamente valores numéricos a los símbolos  $a, b, c$  haciendo

$$a = 0$$

$$b = 1$$

$$c = 2$$

(19)

lo que puede interpretarse, por ejemplo, como tres niveles diferentes de voltaje.

a.- Eigenvalores de la matriz  $P_I$

Determinamos con estos valores particulares los Eigenvalores de la matriz  $P_I$ , obteniéndose:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\lambda_3 = \frac{\sqrt{5}}{4} \quad (20)$$

Calculando ahora  $P_I^t(t) = (P_I)^t$ , cuyos elementos llamaremos  $p^t(i/k)$ , resultó:

$$p^t(0/0) = p(0) + \frac{(\lambda_2)^t}{110} (25 + 9\sqrt{5}) + \frac{\lambda_3^t}{110} (25 - 9\sqrt{5})$$

$$p^t(1/0) = p(1) - \frac{\lambda_2^t}{110} (15 + \sqrt{5}) - \frac{\lambda_3^t}{110} (15 - \sqrt{5})$$

$$p^t(2/0) = p(2) - \frac{\lambda_2^t}{55} (5 + 4\sqrt{5}) - \frac{\lambda_3^t}{55} (5 - 4\sqrt{5})$$

$$p^t(0/1) = p(0) - \frac{\lambda_2^t}{55} (15 + \sqrt{5}) - \frac{\lambda_3^t}{55} (15 - \sqrt{5})$$

$$p^t(1/1) = p(1) + \frac{\lambda_2^t}{55} (20 - 6\sqrt{5}) + \frac{\lambda_3^t}{55} (20 + 6\sqrt{5}) \quad (21)$$

$$p^t(2/1) = p(2) - \frac{\lambda_2^t}{55} (5 - 7\sqrt{5}) - \frac{\lambda_3^t}{55} (5 + 7\sqrt{5})$$

$$p(0) = \frac{6}{11}$$

$$p^t(0/2) = p(0) - \frac{\lambda_2^t}{55} (15 + 12\sqrt{5}) - \frac{\lambda_3^t}{55} (15 - 12\sqrt{5})$$

$$p(1) = \frac{3}{11} \quad (21a)$$

$$p^t(1/2) = p(1) - \frac{\lambda_2^t}{110} (15 - 21\sqrt{5}) - \frac{\lambda_3^t}{110} (15 + 21\sqrt{5})$$

$$p(2) = \frac{2}{11}$$

$$p^t(2/2) = p(2) + \frac{\lambda_2^t}{110} (45 + 3\sqrt{5}) + \frac{\lambda_3^t}{110} (45 - 3\sqrt{5})$$

Siendo  $|\lambda_2| < 1$

y  $|\lambda_3| < 1$

y por tanto  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_2^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_3^t = 0$

Se obtiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_I(t) = \begin{pmatrix} p(0) & p(0) & p(0) \\ p(1) & p(1) & p(1) \\ p(2) & p(2) & p(2) \end{pmatrix} \quad (22)$$

lo que pone en evidencia que la ocurrencia de un símbolo será independiente de lo que ocurrió en un tiempo muy anterior.

b.- para el caso cíclico obtuvimos los eigenvalores:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\lambda_3 = \frac{i\sqrt{5}}{4} \quad (23)$$

y los términos  $p^s(j/k)$  de la matriz  $P_{II}(t)$  en la forma:

$$p^s(j/k) = p(j) + (-1)^r \frac{\lambda_2^t}{m} (s + q \cdot i\sqrt{5}) + (-1)^r \frac{\lambda_3^t}{m} (s - q \cdot i\sqrt{5})$$

indicando los valores de  $r, m, s, q$  para los valores correspondientes de  $j, k = 0, 1, 2$  en la tabla siguiente:

| $j$ | $k$ | $r$ | $m$ | $s$ | $q$ |                  |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------------------|
| 0   | 0   | 0   | 70  | 25  | 1   |                  |
| 0   | 1   | 1   | 35  | 5   | -4  |                  |
| 0   | 2   | 1   | 70  | 10  | 13  |                  |
| 1   | 0   | 1   | 70  | 5   | 3   | con $p(0) = 2/7$ |
| 1   | 1   | 0   | 35  | 10  | -1  | $p(1) = 3/7$     |
| 1   | 2   | 1   | 70  | 5   | -4  | $p(2) = 2/7$     |
| 2   | 0   | 1   | 35  | 5   | -4  |                  |
| 2   | 1   | 1   | 35  | 5   | 3   |                  |
| 2   | 2   | 0   | 70  | 25  | 1   |                  |

En el límite para  $t \rightarrow \infty$  obtenemos desde luego el mismo resultado que en (22).

Las diferencias de estructura que se observan en las dos matrices  $P_I(t)$  y  $P_{II}(t)$  se reflejan en las diferencias que se muestran a continuación en las funciones de correlación de las dos señales.

### FUNCIONES DE CORRELACION

Llamaremos  $x(u)$  la señal emitida por el generador markoffiano, que toma de acuerdo con (19) los valores 0, 1, 2 según el símbolo

$$s = a, b, c$$

que ocurre en el momento dado  $u$ .

La función de correlación de la señal se define entonces en la forma:

$$C(t) = \overline{x(u) \cdot x(u+t)} \quad (25)$$

en donde el promedio será tomado respecto al tiempo  $u$  variable, siendo  $t$  un intervalo fijo de desplazamiento en el tiempo entre  $x(u+t)$  y  $x(u)$ .

Para calcular este promedio llamaremos " $r$ " y " $s$ " los símbolos que aparecen en los tiempos  $u$  y  $u+t$ ; ( $r, s = a, b, c$ ).

Será entonces:

$$\begin{aligned} C(t) &= \sum_{r,s} r \cdot s \cdot p(r, s, u, u+t) = \sum_{r,s} r \cdot s \cdot p(s, u+t/r, u) = \\ &= \sum_{r,s} r \cdot s \cdot p(r) \cdot p^t(s/r) \end{aligned} \quad (26)$$

Para el valor max.  $C(0)$  ó la potencia media resulta

$$C(0) = \overline{x(u) \cdot x(u)} = \overline{(x^2)} = \sum_r r^2 \cdot p(r) \quad (27)$$

y para el valor asintótico de  $C(t)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = C(\infty) = \sum_{r,s} r \cdot s \cdot p(r) \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} p^t(s/r) = \sum_{r,s} r \cdot p(r) \cdot s \cdot p(s) = \bar{x}^2 \quad (28)$$

Es además conveniente, para fines de comparación, normalizar la función de correlación en la forma:

$$\Phi(t) = \frac{C(t) - C(\infty)}{C(0) - C(\infty)} \quad (29)$$

haciendose  $\Phi(0) = 1$  y  $\Phi(\infty) = 0$

a.- Función de Correlación para la forma I de la señal

de (20), (21) y (29) obtuvimos

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \frac{\lambda_2^{|t|}}{60} (30 + 13\sqrt{5}) + \frac{\lambda_3^{|t|}}{60} (30 - 13\sqrt{5}) = \\ &= \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^{|t|} \frac{30 + 13\sqrt{5} + (30 - 13\sqrt{5})(-1)^t}{60} \end{aligned} \quad (30)$$

Sustituyendo valores pares e impares para los intervalos  $t$ , obtenemos

$$\text{para } t = 2n, (n = 0, 1, 2 \dots) \quad \Phi(2n) = \lambda_2^{2n} = \lambda_3^{2n}$$

$$\text{para } t = 2n + 1, (n = 0, 1, 2 \dots) \quad \Phi(2n + 1) = \Phi(1) \lambda_2^{2n} = \Phi(1) \lambda_3^{2n} \quad (31)$$

$$\text{en donde} \quad \lambda_2^2 = \lambda_3^2 = 5/16$$

$$\text{y} \quad \Phi(1) = 13/24 \quad (31a)$$

La función de correlación decae para cada dos símbolos, ó sea para cada intervalo de dos tiempos, con una rapidez proporcional a  $\lambda_2^2 = \lambda_3^2$ .

La pendiente de la curva de correlación puede expresarse así en función de los Eigenvalores de la matriz de Markoff.

Evaluando la expresión (30) para diferentes valores de  $t$  obtuvimos la curva Fig. 8, que decae asintóticamente hasta cero.

El alcance de correlación es de 4 símbolos, considerando como significativa la contribución hasta el momento que la correlación se abate a un 10% del valor max.

b.- Función de Correlación de la forma II

Para la forma cíclica la función de correlación es:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \frac{\lambda^{t|}}{2} (10 + i\sqrt{5}) + \frac{\lambda^{t|}}{3} (10 - i\sqrt{5}) = \\ &= \left(\frac{i\sqrt{5}}{4}\right)^{|t|} \frac{10 + i\sqrt{5} + (10 - i\sqrt{5})(-1)^{|t|}}{20} \end{aligned} \quad (32)$$

dando las mismas expresiones (31) para  $\Phi(2n)$  y  $\Phi(2n + 1)$ , pero con

$$|\lambda_2|^2 = |\lambda_3|^2 = -5/16$$

y

$$\Phi(1) = -1/8 \quad (31b)$$

La función de correlación ilustrada en la segunda gráfica de la Fig. 8 es de tipo oscilatorio y decae como en el caso anterior con  $|\lambda_2|^2$ .

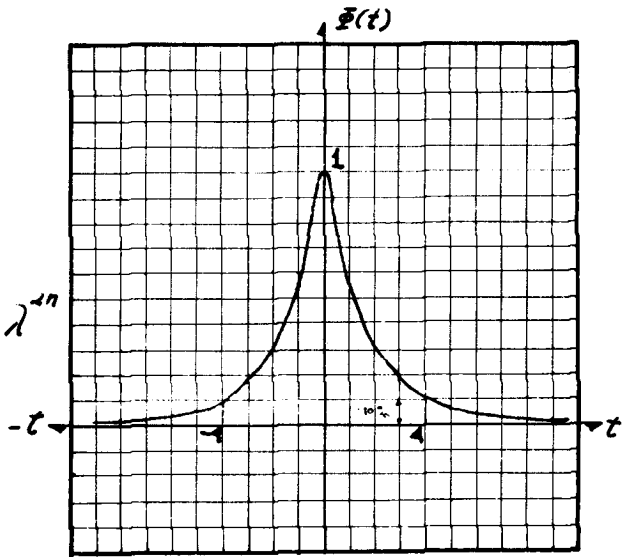
El alcance de correlación resultó ser también de 4 símbolos.

#### REFERENCIAS

- 1.- A. Medina, "Lógica dependiente del tiempo". Comunicación privada.
- 2.- Montgomery Phister: "Logical Design of Digital Computers". John Wiley, N.Y., 1959.
- 3.- A. Blanc-Lapierre et R. Fartet: "Théorie des Fonctions Aléatoires", Ed. Masson et Cie., Paris, 1953.
- 4.- G.M. White: "An Electronic Probability Generator". Gen. Electric Research Lab. Report No. 58-RL-2101.
- 5.- A.N. Kolmogorov "Foundations of the Theory of Probability", Ed. Chelsea, N. Y.



$$\begin{aligned}\Phi(2n) &= \lambda^{2n} \\ \Phi(2n+1) &= \Phi(1) \lambda^{2n}\end{aligned}$$



$$\Phi(t) = \frac{C(t) - C(\infty)}{C(0) - C(\infty)}$$

$$\begin{aligned}\Phi(2n) &= \lambda^{2n} \\ \Phi(-n+1) &= \Phi(1) \lambda^{2n}\end{aligned}$$

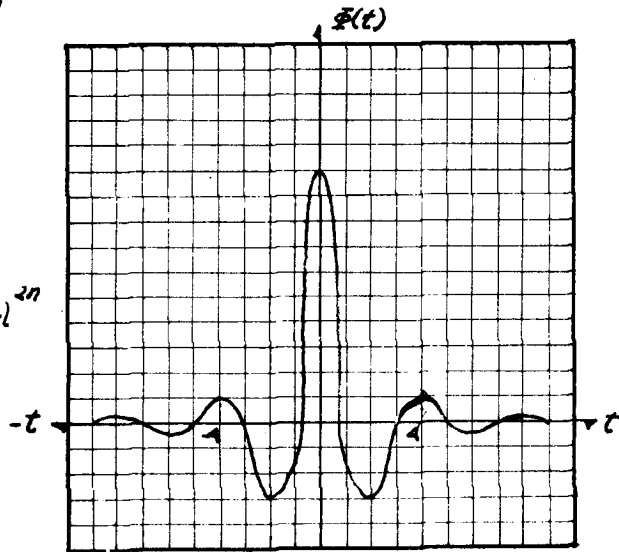


Fig. 8.

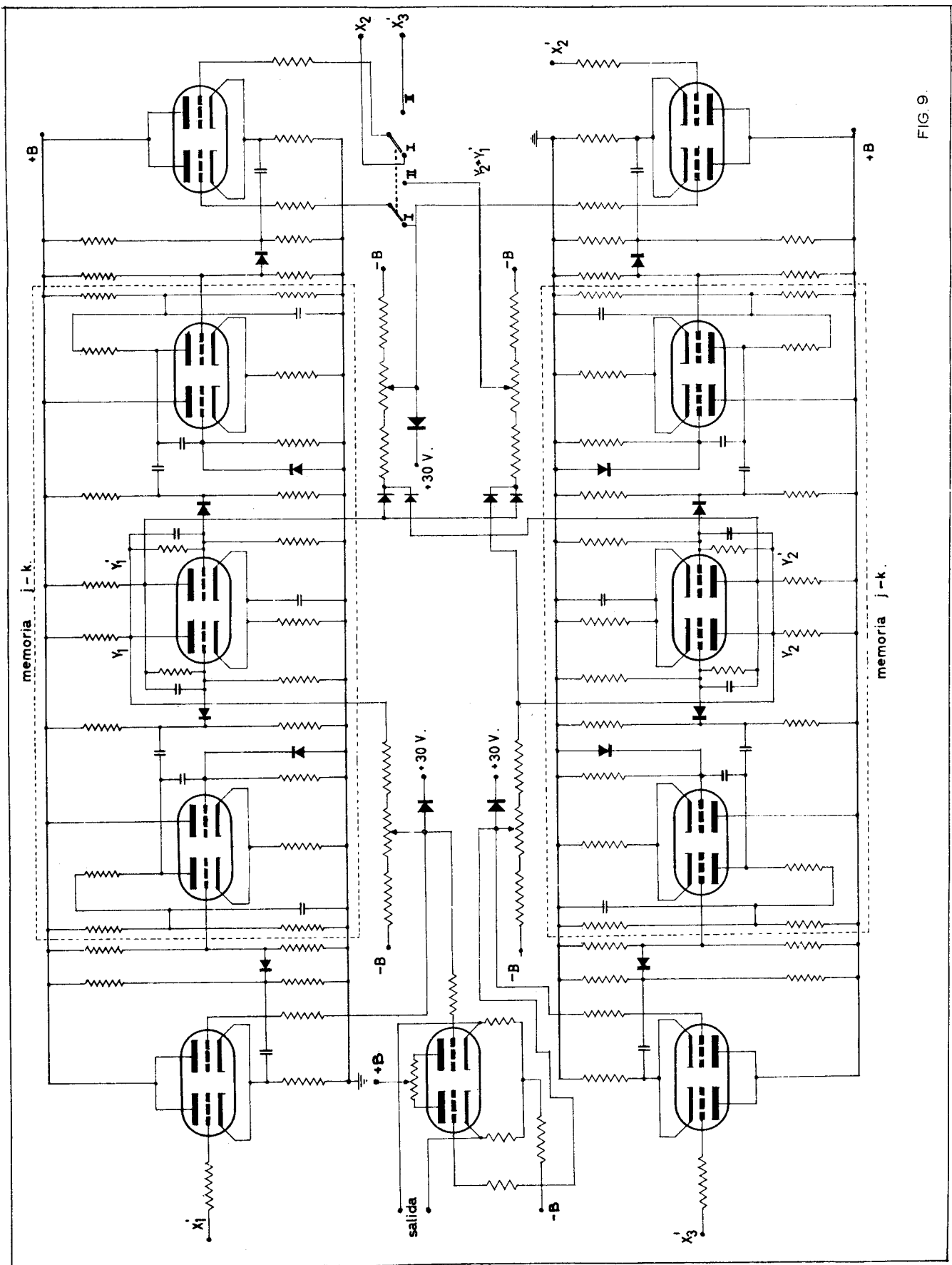


FIG 9.