

# La dinámica de la burbuja de Poincaré

Carlos Becerra Labra

*Instituto de Matemática y Física, Universidad de Talca*

*2 Norte N685, Talca, Chile*

*e-mail: cbecerra@pehuenche.otalca.cl*

Recibido el 10 de mayo de 2000; aceptado el 4 de octubre de 2000

Israel en 1966 [W. Israel, *Il Nuovo Cimento* **44 B** (1966) 2349], encontró una ecuación de movimiento para una burbuja masiva con simetría esférica en relatividad general. Esta burbuja está constituida por partículas de polvo sin carga eléctrica, de modo que su tensión superficial es nula. En un trabajo posterior este mismo autor [W. Israel, *Phys. Rev.* **153** (1967) 1388], estudió la dinámica de la burbuja en la variedad de espacio tiempo definida por la métrica de Kruskal. López en 1988 [C.A. López, *Phys. Rev. D* **38** (1988) 3662], extendió la solución de Israel, encontrando una ecuación de movimiento para una burbuja esférica con carga eléctrica y tensión superficial, usando el formalismo de Gauss, Codazzi y Lanczos. Esta burbuja consiste una cáscara infinitamente delgada en donde está distribuida uniformemente la carga eléctrica. Para mantener en equilibrio esta burbuja, ya que la repulsión coulombiana la haría explotar, introdujo ciertas tensiones de Poincaré que logran estabilizarla. En el presente trabajo se estudia la dinámica de esta burbuja generalizando los resultados de Israel, obtenidos para la geometría de Schwarzschild al caso de la geometría de Reissner-Nordström [4].

*Descriptor:* Burbuja de Poincaré

In 1966 Israel [W. Israel, *Il Nuovo Cimento* **44 B** (1966) 2349] found an equation of motion for a massive bubble with spherical symmetry in General Relativity. The bubble is made out of dust chargeless particles, so that it has a vanishing surface tension. In a later work this author [W. Israel, *Phys. Rev.* **153** (1967) 1388] analyzed the dynamics of this bubble in the spacetime manifold defined by the Kruskal line element. Later, in 1988 López [C.A. López, *Phys. Rev. D* **38** (1988) 3662] extended the solution found by Israel to the case of a charged spherical bubble with surface tension. The new equation of motion was determined by using the formalism of Gauss, Codazzi and Lanczos. The bubble now consists of an infinitely thin shell with a uniform surface distribution of electric charge. To maintain the bubble in equilibrium it was necessary to introduce an isotropic tension (Poincaré tensions) to compensate the Coulomb repulsion. In this paper we studied the dynamics of the Poincaré bubble by extending the results of Israel, which were obtained with the Schwarzschild metric, to the Reissner-Nordström. Geometry [4].

*Keywords:* Bubble

PACS: 04.20.-q

## 1. Introducción

En el presente trabajo se estudia en detalle la dinámica de una burbuja esférica con carga eléctrica y tensiones de Poincaré. Es una generalización de los resultados obtenidos por Israel [2], para la geometría de Schwarzschild al caso de la geometría de Reissner-Nordström [4]. En primer lugar, se desarrolla el formalismo canónico de la burbuja de Poincaré. Se obtiene en forma explícita la frecuencia de movimiento y los niveles cuánticos de energía para pequeñas oscilaciones. Finalmente, se resuelve en forma exacta la ecuación de movimiento de la burbuja de Poincaré.

## 2. Formalismo canónico

Este estudio se inicia encontrando el hamiltoniano de la burbuja de Poincaré. Para ello, se considera la integral primera de la Ref. 3:

$$\alpha + \beta = 2a, \quad a = \text{constante} > 0. \quad (1)$$

El parámetro  $a$  es una constante que depende de las condiciones iniciales de la burbuja. Se puede hallar conociendo su radio inicial y su velocidad inicial.

Además

$$\alpha \equiv \sqrt{1 + R^2} \quad \text{y} \quad \beta \equiv \sqrt{1 + R^2 - \frac{2M}{R} + \frac{e^2}{R^2}}, \quad (2)$$

donde  $R$  es el radio de la burbuja,  $M$  es su masa gravitacional y  $|e|$  es su carga total.

Se elige la velocidad de la luz  $c$  y la constante gravitacional  $G$ , igual a la unidad.

$$\dot{R} = \frac{dR}{dt}, \quad t = \text{tiempo propio.}$$

De (1) y (2), se obtiene el hamiltoniano de la burbuja de Poincaré:

$$H \equiv M = 2aR \left[ \sqrt{1 + R^2} - 1 \right] + 2a(1 - a)R + \frac{e^2}{2R}. \quad (3)$$

La masa gravitacional  $M$  o la energía total de la burbuja es igual a su energía cinética más la energía potencial "elástica" y coulombiana.

De la Ec. (3) haciendo  $\dot{R} = 0$ , se obtiene la energía potencial de la burbuja:

$$U_{(R)} = 2a(1 - a)R + \frac{e^2}{2R}. \quad (4)$$

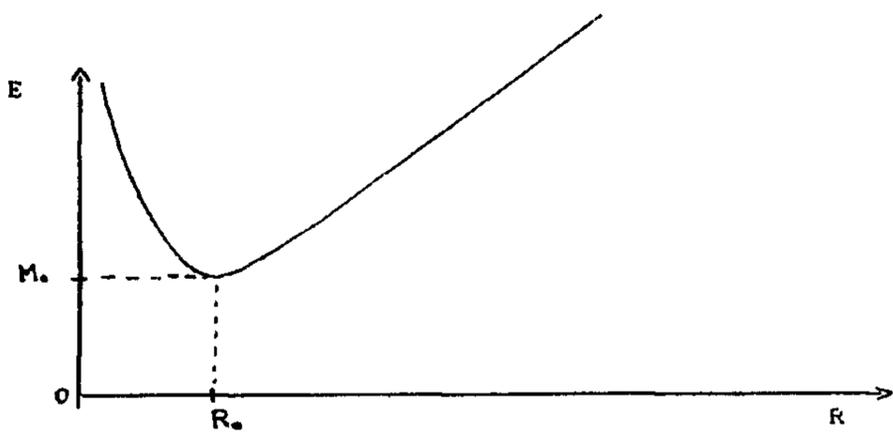


FIGURA 1. Energía potencial asociada a la burbuja de Poincaré, para la condición  $0 < a < 1$ .

En la Fig. 1 se presenta la energía potencial asociada a la burbuja de Poincaré, para la condición  $0 < a < 1$  y en el se observa que existe un punto de equilibrio estable, cuyo radio es,

$$R_0 = \frac{e^2}{M_0},$$

donde  $M_0$  es la energía total de la burbuja de Poincaré en la configuración de equilibrio.

El momento canónico conjugado de  $R$ , se obtiene usando la ecuación  $\dot{R} = \partial H / \partial p$  y la Ec. (3):

$$p = 2aR \ln(\dot{R} + \alpha). \quad (5)$$

El lagrangiano de la burbuja, se obtiene usando la relación:  $L = p\dot{R} - H$  y las Ecs. (3) y (5):

$$L = 2aR[\dot{R} \ln(\dot{R} + \alpha) - \alpha] + 2a^2R - \frac{e^2}{2R}. \quad (6)$$

La ecuación de movimiento de la burbuja de Poincaré se obtiene usando la ecuación de Euler-Lagrange [4], y la Ec. (6):

$$\ddot{R} = -\frac{\alpha}{2aR} \left[ M - \frac{e^2}{R} \right]. \quad (7)$$

A continuación se estudia el movimiento de la burbuja de Poincaré para pequeñas oscilaciones en torno al punto de equilibrio estable [4]. Para ello, es necesario aplicar la condición  $\dot{R}^2 \ll 1$ . Desarrollando en serie el hamiltoniano dado por la Ec. (3) y el momento canónico conjugado de  $R$ , luego se desprecia los términos de potencia superior a  $\dot{R}^2$ :

$$H \equiv M \approx 2aR \left[ \left( 1 + \frac{1}{2}\dot{R}^2 \right) - a \right] + \frac{e^2}{2R};$$

$$p = 2aR\dot{R}. \quad (3a)$$

Usando las Ec. (3a), se escribe el hamiltoniano en función de  $R$  y  $p$ :

$$H \equiv M \approx \frac{p^2}{4aR} + 2a(1-a)R + \frac{e^2}{2R}. \quad (8)$$

Para determinar la frecuencia de oscilación en torno a  $R_0$ , se aplica el método de las variables acción y ángulo [4]. Despejando el momento canónico  $p$  de la Ec. (8)

$$p = \pm \sqrt{8a^2(a-1)R^2 + 4aMR - 2ae^2}. \quad (9)$$

Por lo tanto,

$$J_R = 2 \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \sqrt{8a^2(a-1)R^2 + 4aMR - 2ae^2} dR; \quad (10)$$

$R_{\max}$  y  $R_{\min}$ , representan los puntos de retroceso clásico y se obtienen igualando a cero la Ec. (9):

$$R_{\max} = \frac{M}{4a(1-a)} \left[ 1 + \sqrt{1 + 4a(a-1) \frac{e^2}{M^2}} \right]$$

y

$$R_{\min} = \frac{M}{4a(1-a)} \left[ 1 - \sqrt{1 + 4a(a-1) \frac{e^2}{M^2}} \right]. \quad (11)$$

Para que existan estos puntos de retroceso se debe cumplir que  $0 < a < 1$ .

Integrando la Ec. (10) y reemplazando los límites dado por las Ecs. (11):

$$J_R = \pi \left[ \frac{M^2}{4a(1-a)\sqrt{2(1-a)}} - \frac{e^2}{\sqrt{2(1-a)}} \right]. \quad (12)$$

El símbolo  $\pi$ , representa el número  $\pi$ .

La frecuencia del movimiento, se obtiene usando la ecuación  $\nu = dE/dJ$  y la Ec. (12), [ $M \equiv E$ ] es la energía total:

$$\nu = \frac{2a\sqrt{2}}{\pi} \frac{\sqrt{(1-a)^3}}{E}. \quad (13)$$

La expresión (13), representa la frecuencia de oscilación de la burbuja de Poincaré en torno a  $R_0$ , esta frecuencia depende de los valores de la energía total  $E$ .

Para obtener los niveles cuánticos de energía de la burbuja, se usa la regla de cuantización de Bohr-Sommerfeld [4]

$$J = \oint p dR = \left[ n + \frac{1}{2} \right] h, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots;$$

( $h$  es la constante de Planck) y la Ec. (12), luego se despeja la energía total  $E$

$$E_n = \sqrt{4a\sqrt{2(1-a)^3} \left[ \frac{e^2}{\sqrt{2(1-a)}} + \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{h}{\pi} \right]}. \quad (14)$$

La expresión (14) representa los niveles cuánticos de energía de la burbuja de Poincaré para pequeñas oscilaciones.

### 3. Ecuación de movimiento

Se encontró la solución exacta de la ecuación de movimiento de la burbuja de Poincaré, [Ec. (7)]. Se despeja  $R = R(t)$  de la ecuación de movimiento. Matemáticamente es más sencillo expresar  $t_{(R)}$  [6],

$$t_{(R)} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}} \int \frac{R^2 dR}{\sqrt{R^4 + AR^3 + BR^2 + CR + D}}, \quad (15)$$

donde

$$A \equiv \frac{M}{(a^2 - 1)}, \quad B \equiv \frac{(M^2 - 2a^2 e^2)}{4a^2(a^2 - 1)},$$
$$C \equiv \frac{Me^2}{4a^2(a^2 - 1)}, \quad D \equiv \frac{e^4}{16a^2(a^2 - 1)}.$$

En el caso general en que todas las raíces del polinomio de cuarto grado son distintas, la integral (15), es elíptica. En este caso, no se pudo obtener una descripción cualitativa de la evolución de la burbuja de Poincaré, debido a lo complejo

de las funciones elípticas obtenidas. Luego se investiga la solución de la ecuación de movimiento, cuando dos raíces del polinomio de cuarto grado son iguales, en estos casos la solución son funciones circulares, obteniendo en uno de ellos la solución encontrada por Israel [3].

### 4. Conclusiones

- Al analizar la energía total de la burbuja de Poincaré se encontró que existe dos puntos de retroceso, cuando se cumple  $0 < a < 1$ , lo que implica que la burbuja evoluciona entre un radio máximo y uno mínimo, es decir, esta burbuja no colapsa ni explota, Ecs. (11).
- Al analizar la función energía potencial, se observó que existe un punto de equilibrio estable.
- Usando el método de las variables acción y ángulo se determinó la frecuencia y los niveles cuánticos de energía, para pequeñas oscilaciones.

---

1. W. Israel, *Il Nuovo Cimento* **44 B** (1966) 2349.
2. W. Israel, *Phys. Rev.* **153** (1967) 1388.
3. C.A. López, *Phys. Rev. D* **38** (1988) 3662.
4. Misner-Thorne-Wheeler, *Gravitation*.

5. H. Goldstein, *Mecánica Clásica*, (Editorial Aguilar, Madrid, 1979).
6. Byrd-Friedman, *Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists. Band LXVII*, (Prentice-Hall, New York, 1964).