El teorema de Poynting para campos complejos

M. Fernández Guasti
Universidad Autónoma Metropolitana-Unidad Iztapalapa
Apartado postal 55-534, México D.F., Mexico
e-mail: mfg@xanum.uam.mx

Recibido el 4 de octubre de 2000; aceptado el 13 de noviembre de 2000

Se presenta la derivación del teorema de Poynting utilizando una representación compleja de los campos electromagnéticos. En esta reformulación se obtiene cabalmente la forma funcional de una ecuación de continuidad. Este resultado no requiere que los campos armónicos sean trenes de onda infinitos, de manera que con este formalismo es posible abordar el caso de pulsos electromagnéticos. La definición del vector de Poynting para campos complejos se reduce a la definición convencional si los campos son reales sin involucrar un factor de $1/2$ adicional.

Descriptores: Electromagnetismo clásico; ecuaciones de Maxwell

Poynting's theorem is derived for complex electromagnetic fields without invoking the harmonic dependence of the fields. This reformulation yields the functional form of a continuity equation. The definition of poynting's vector for complex fields reduces to its traditional definition for real fields without involving an extra factor of $1/2$.

Keywords: Classical electromagnetism; Maxwell equations

PACS: 03.05De; 41.20-q

1. Introducción

La ecuación de balance de energía para campos y desplazamientos electromagnéticos reales es

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}(\vec{B} \cdot \vec{H} + \vec{E} \cdot \vec{D}) = -\vec{E} \cdot \vec{J}, \tag{1}$$

donde se define el vector de Poynting como $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$. Este resultado es válido para medios lineales no dispersivos y sin pérdidas, puesto que la única limitante impuesta en la derivación es que la permitividad y permeabilidad sean cantidades reales e independientes del tiempo. La dependencia armónica de los campos electromagnéticos frecuentemente se representa en la notación polar compleja. El teorema complejo de Poynting que se obtiene para trenes de onda infinitos es

$$\nabla \cdot \frac{1}{2}(\vec{E} \times \vec{H}^*) + 2i\omega \left[\frac{1}{4}(\vec{E} \cdot \vec{D}) - \frac{1}{4}(\vec{B} \cdot \vec{H})\right] = -\frac{1}{2}\vec{J}^* \cdot \vec{E}. \tag{2}$$

Esta expresión se considera análoga a la conservación de campos reales [1]. El vector de Poynting complejo se define como $\vec{S} = 1/2(\vec{E} \times \vec{H}^*)$ y se considera que la parte real representa el promedio temporal del flujo de energía del campo, mientras que la parte imaginaria representa la energía reactiva almacenada en el medio. Dos objeciones y una observación sobre este resultado son: 1) la ecuación obtenida no representa estrictamente una ecuación de balance, 2) el resultado difiere en un factor de $1/2$ de la definición para campos reales, 3) el resultado es válido únicamente para trenes de onda armónicos infinitos.

Derivemos ahora un resultado similar que sin embargo rectifica estas observaciones. Permitamos que los campos y los desplazamientos sean funciones complejas arbitrarias, posiblemente no armónicas. Comencemos con la identidad vectorial $\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) = \vec{H}^* \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}^*)$; substituyendo los rotacionales por las derivadas temporales de las ecuaciones de Maxwell que expresan las ley de Faraday $\nabla \times \vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$ y la ecuación de Ampere modificada $\nabla \times \vec{H}^* = \vec{J}^* + \partial\vec{D}^*/\partial t$, obtenemos

$$\nabla(\vec{E} \times \vec{H}^*) + \vec{H}^* \cdot \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) + \vec{E} \cdot \left(\frac{\partial \vec{D}^*}{\partial t}\right) = \vec{E} \cdot \vec{J}^*.$$

Supongamos que el medio es lineal, sin dispersión ni absorción, de manera que la permitividad y permeabilidad sean cantidades reales independientes del tiempo. Las ecuaciones constitutivas son entonces $\vec{B} = \mu\vec{H}$ y $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$. Los complejos conjugados de estas ecuaciones son $\vec{B}^* = \mu\vec{H}^*$ y $\vec{D}^* = \varepsilon\vec{E}^*$ puesto que se ha supuesto que el medio es transparente. La ecuación resultante es

$$\nabla \cdot \left[\left(\vec{E} \times \vec{H}^*\right)\right] + \frac{1}{\mu}\left[\vec{B}^* \cdot \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)\right] + \varepsilon\left[\vec{E} \cdot \left(\frac{\partial \vec{E}^*}{\partial t}\right)\right] = -\vec{E} \cdot \vec{J}^*. \tag{3}$$

Este resultado, sin embargo, no tiene la forma de una ecuación de conservación, pues los términos que involucran productos de campos con derivadas temporales deben ser expresables en términos de la derivada temporal de una función de los campos [2]. Para obtener una ecuación de conservación es necesario considerar el complejo conjugado de esta ecuación y sumar ambas ecuaciones:

$$\nabla\cdot[(\vec{E}\times\vec{H}^*)+(\vec{E}^*\times\vec{H})]+\frac{1}{\mu}\left[\vec{B}^*\cdot\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)+\vec{B}\cdot\left(\frac{\partial\vec{B}^*}{\partial t}\right)\right]+\varepsilon\left[\vec{E}\cdot\left(\frac{\partial\vec{E}^*}{\partial t}\right)+\vec{E}^*\cdot\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\right]=-(\vec{E}\cdot\vec{J}^*+\vec{E}^*\cdot\vec{J}),$$

de manera que los términos que involucran derivadas temporales pueden rescribirse como $[\partial(1/\mu)\vec{B}\cdot\vec{B}^*/\partial t]+[\partial\varepsilon\vec{E}\cdot\vec{E}^*/\partial t]$. La ecuación de balance para campos complejos es entonces

$$\nabla\cdot\frac{1}{2}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*+\vec{E}^*\times\vec{H}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\left(\vec{B}\cdot\vec{H}^*+\vec{E}\cdot\vec{D}^*\right)\right]=-\frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{J}^*+\vec{E}^*\cdot\vec{J}\right). \tag{4}$$

El término contenido en la divergencia corresponde entonces al flujo, de manera que el vector de Poynting para campos complejos es

$$\vec{S}=\frac{1}{2}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*+\vec{E}^*\times\vec{H}\right)=\mathrm{Re}\{\vec{E}\times\vec{H}^*\}; \tag{5}$$

de estos resultados se desprende que:

i. La expresión (4) tiene la forma de una ecuación de balance. Nótese que la ecuación compleja, ya sea con (2) o sin (3) la dependencia armónica explícita, no contiene la forma operacional

$$\left(\nabla\cdot+\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

ii. Si los campos son reales se recupera la definición del vector de Poynting para campos reales.

iii. La expresión es válida para campos complejos arbitrarios como pueden ser pulsos con una distribución espacio-temporal finita.

En esta reformulación el vector de Poynting es siempre una cantidad real, inclusive si los campos son complejos. Para propósitos de propagación, esto puede representar una ventaja pues solamente el campo es responsable del transporte de energía aunque la energía total del pulso esté compuesta tanto por el campo como por el medio [3].

1. J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed., (John Wiley, New York, 1999) p. 262.
2. D.F. Nelson, *Phys. Rev. Lett.* **76** 25 (1996) p. 4713.
3. J. Peatross, S.A. Glasgow, and M Ware, *Phys. Rev. Lett.* **84** 11 (2000) p. 2370.