

Inferencia de estructuras vorticosas del flujo que pasa alrededor de un obstaculo, mediante un modelo euleriano tridimensional

C. Millán Barrera¹ y H. Ramírez León²

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua

Paseo Cuauhnáhuac No. 8532, Col. Progreso, 62550 Jiutepec, Morelos, Mexico

e-mail: ¹cmillan@tlaloc.imta.mx; ²hrleon@tlaloc.imta.mx

Recibido el 3 de febrero de 2000; aceptado el 15 de agosto de 2000

Hace mas de cien años, se infirió la existencia de corrientes secundarias basándose en el hecho de que la velocidad máxima en canales se encuentra justo debajo de la superficie libre, y el de la variación cíclica de sólidos suspendidos en la dirección transversal de un canal. Gibson (1909), estimó la velocidad aproximada de tales corrientes como aproximadamente el 5% de la velocidad principal. A pesar de su aparente debilidad, las corrientes secundarias juegan un papel esencial en la transferencia lateral de cantidad de movimiento, calor y masa en un canal, por tanto, su variación es tridimensional. Asimismo son responsables en gran parte de las formas de fondo, en flujos con gran contenido de sedimentos suspendidos. La importancia del flujo secundario queda de manifiesto cuando se introduce el concepto de vorticidad. En este artículo se presentan los resultados obtenidos con un modelo euleriano tridimensional que incluye la ecuación estadística de la vorticidad, donde las correlaciones $\overline{u_i \omega_j}$ fueron modeladas en función de las correlaciones dobles $\overline{u_i u_j}$ obtenidas, mediante las propiedades del flujo turbulento. El modelo se aplica a un canal con un obstáculo en el fondo. Los resultados arrojados por la simulación son interesantes, ya que los patrones de flujo de vorticidad se comportan de manera semejante a otros encontrados en estudios experimentales. La finalidad de este estudio es servir de base a estudios posteriores sobre los procesos dinámicos del movimiento de partículas en el fondo de un canal.

Descriptores: Vorticidad tridimensional; modelación de la turbulencia; estructuras de vorticidad; modelación de las correlaciones $\overline{\omega_i u_j}$

More than 100 years ago, it was inferred the existence of secondary currents in open channels on the basis of the fact that the maximum velocity occurred just below the free surface indeed another one, the cyclic variation of the concentration of suspended sediment in the spanwise direction of them. Gibson (1909), estimated that the velocity of the secondary currents would be about 5% of mainstream velocity. In spite of their apparent weakness, the secondary currents play an essential role in the lateral transfer of momentum, energy, heat and mass in a channel, and thus their distributions show variations in all three dimensions. In the same form, for the most part they are responsables of the bed patterns in high content sediment suspended flows. The importance of secondary flows is manifested on the fact of the introduction from vorticity concept. In this work, some results obtained with a 3-D eulerian model to which has coupled the statistical vorticity equation, are shown. Correlations $\overline{u_i \omega_j}$ were modeled according to $\overline{u_i u_j}$ correlations using the fluid flow turbulence properties. Model is applied to a flow deformed by a three dimensional obstacle at the bottom. Simulation results of the vorticity show similarities with other flow patterns behaviors found in experimental investigations. This work will be used as a background to subsequent studies concerning dynamical processes of the particles movement on the bottom of a channel

Keywords: Tridimensional vorticity; turbulence modelling; vorticity structures; $\overline{\omega_i u_j}$ correlations modelling

PACS: 47.32.Cc

1. Introducción

La turbulencia en canales abiertos consiste de movimientos con una amplia gama de escalas que se extienden desde milímetros hasta abarcar la profundidad del flujo. Desde los años treinta se ha tenido claro que la turbulencia juega un papel muy importante en los fenómenos de transporte y se han llevado a cabo numerosos estudios encaminados al entendimiento de las diferentes escalas de la turbulencia y su influencia en los procesos de transporte de sedimentos en canales. Sin embargo, aunque las teorías son cada vez mejor entendidas aún no se han resuelto modelos que permitan describir los procesos de transporte de sedimentos sobre bases relevantes del *conocimiento puro de la turbulencia*. En lugar de ello, se han propuesto para uso práctico muchas formulaciones empíricas.

En la literatura se encuentran modelos que consideran diversas aproximaciones de la turbulencia que van desde coefi-

cientes, constantes o variables, hasta teorías refinadas que requieren equipos de cómputo sofisticados. Sin embargo, a pesar de los grandes avances en tecnología computacional, los procedimientos como las simulaciones directas, que en teoría son capaces de considerar todo el espectro de escalas de la turbulencia tridimensional, son aplicados solamente a situaciones demasiado idealizadas como en flujos a bajos números de Reynolds y/o bidimensionales. Para altos números de Reynolds, situación usualmente encontrada en la naturaleza, el tamaño de los vorticillos más pequeños de la turbulencia es sólo 10^{-4} a 10^{-3} de la profundidad del flujo. Para un número de Reynolds de 3300 [1] requirieron de 4 millones de puntos de malla y 250 horas de tiempo de supercomputadora para simular flujo en un canal. En las diferentes aplicaciones de esta técnica se ha hecho evidente una estructura de la turbulencia similar a la observada experimentalmente. Debido a que las simulaciones directas arrojaron resultados aceptables, propiciaron el desarrollo de los métodos de simulación de grandes

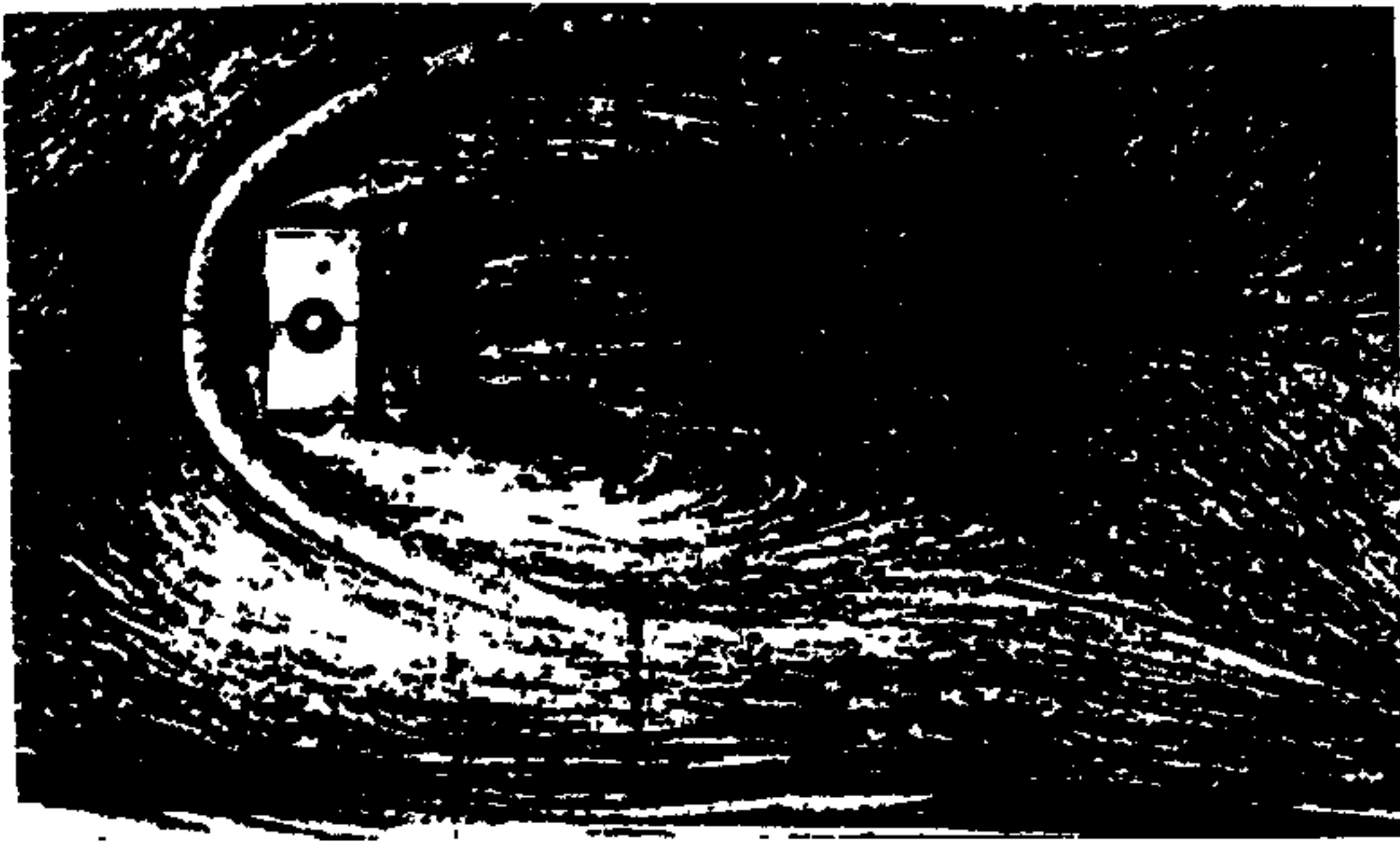


FIGURA 1. Resultado parcial del experimento de W. Frank [2].

remolinos, que simulan directamente el movimiento turbulento de las grandes escalas, que se puede resolver por una malla numérica dada, mientras el movimiento de las escalas finas es aproximado por un modelo de escalas de submalla. Las estructuras de escalas grandes de la turbulencia pueden ser resueltas, pero los cálculos deben ser dependientes del tiempo y tridimensionales, de ahí que requieran largos tiempos de cálculo. En el presente, ambas simulaciones ya sean directas o de grandes remolinos se utilizan cada vez más en cálculos ingenieriles en flujo bidimensional aportando información valiosa para la investigación de estructuras coherentes de escalas grandes.

El objetivo de este trabajo es el estudio de estructuras turbulentas que se producen alrededor de un obstáculo ubicado en el fondo de un canal, para lo cual es importante señalar las siguientes consideraciones: el modelo desarrollado es tridimensional y se estudian las estructuras de vorticidad generadas alrededor del obstáculo, para lo cual se considera una ecuación estadística particular apoyada en las escalas finas del flujo turbulento, las correlaciones de orden dos del tipo $\overline{\omega_j u_j}$ se aproximan como una función $f(\overline{u_\alpha u_\beta})$ obtenida previamente por un modelo de turbulencia κ - ϵ .

Existen pocos estudios en la literatura que tratan la formación de vórtices, trabajos relevantes fueron dados por Frank [2] y Larousse *et al.* [3], quienes realizaron estudios análogos con diferentes condiciones. En el estudio de Frank (Fig. 1) las condiciones de flujo corresponden a números de Reynolds del orden de 10^5 , el fluido utilizado en el experimento es una combinación de petróleo y hollín. Para la visualización del flujo se utilizó el método la superficie revestida ya que éste en particular permite observar las líneas de separación y religue o unión. Por otro lado en la Fig. 2, que corresponde a un diagrama esquemático de un estudio experimental hecho por Larousse *et al.* [3], se pueden observar las envolventes del flujo medio y líneas de separación y unión, sugeridos por información más precisa que fue arrojada por experimentos y visualizaciones llevadas a cabo con ayuda de anemometría láser, el experimento se realizó a números de Reynolds del orden de 10^5 , y los patrones de flujo fueron determinados mediante un estudio topológico del flujo. Al observar cuidadosamente estas figuras podemos observar que existe una gran analogía en ellas; sin embargo, en ambos estudios no se profundiza en lo relacionado a la magnitud de

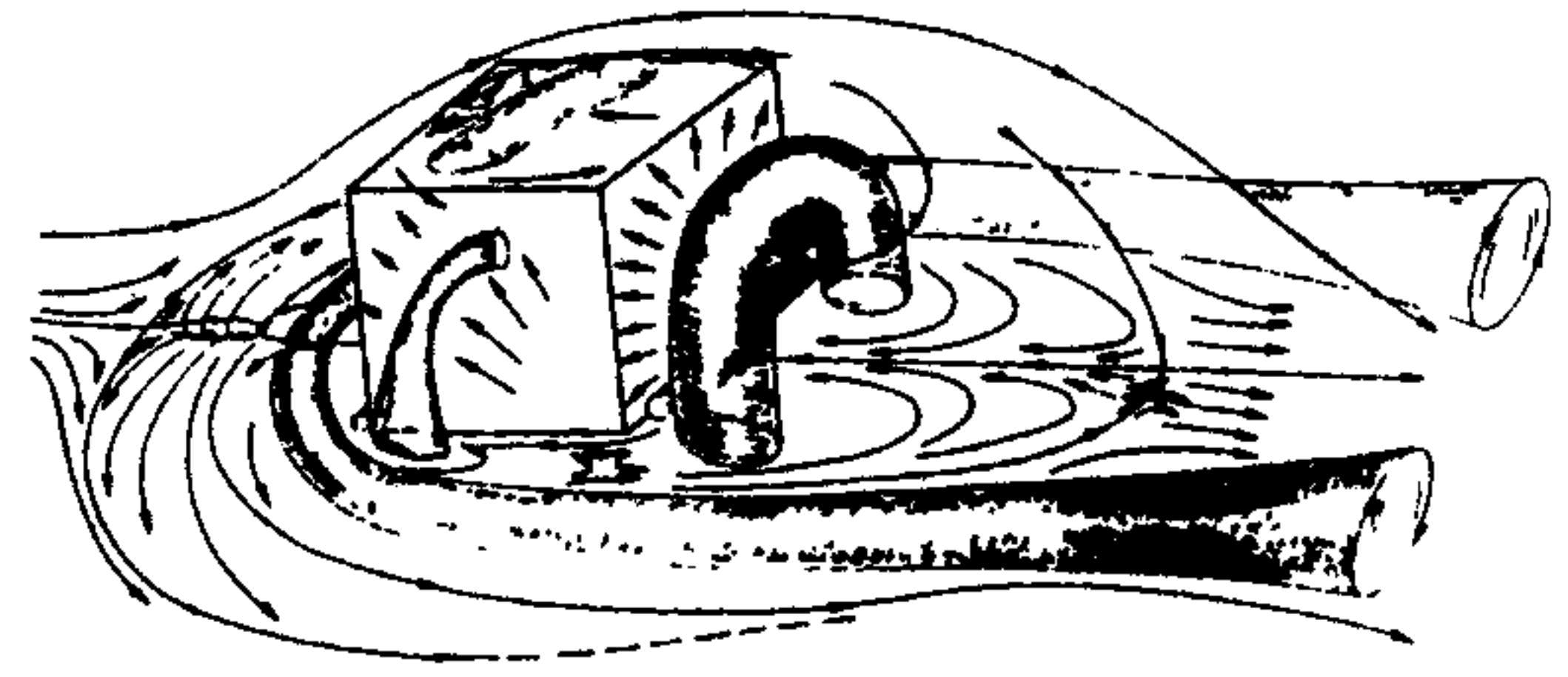


FIGURA 2. Esquema de resultados obtenidos por Larousse *et al.* [3].

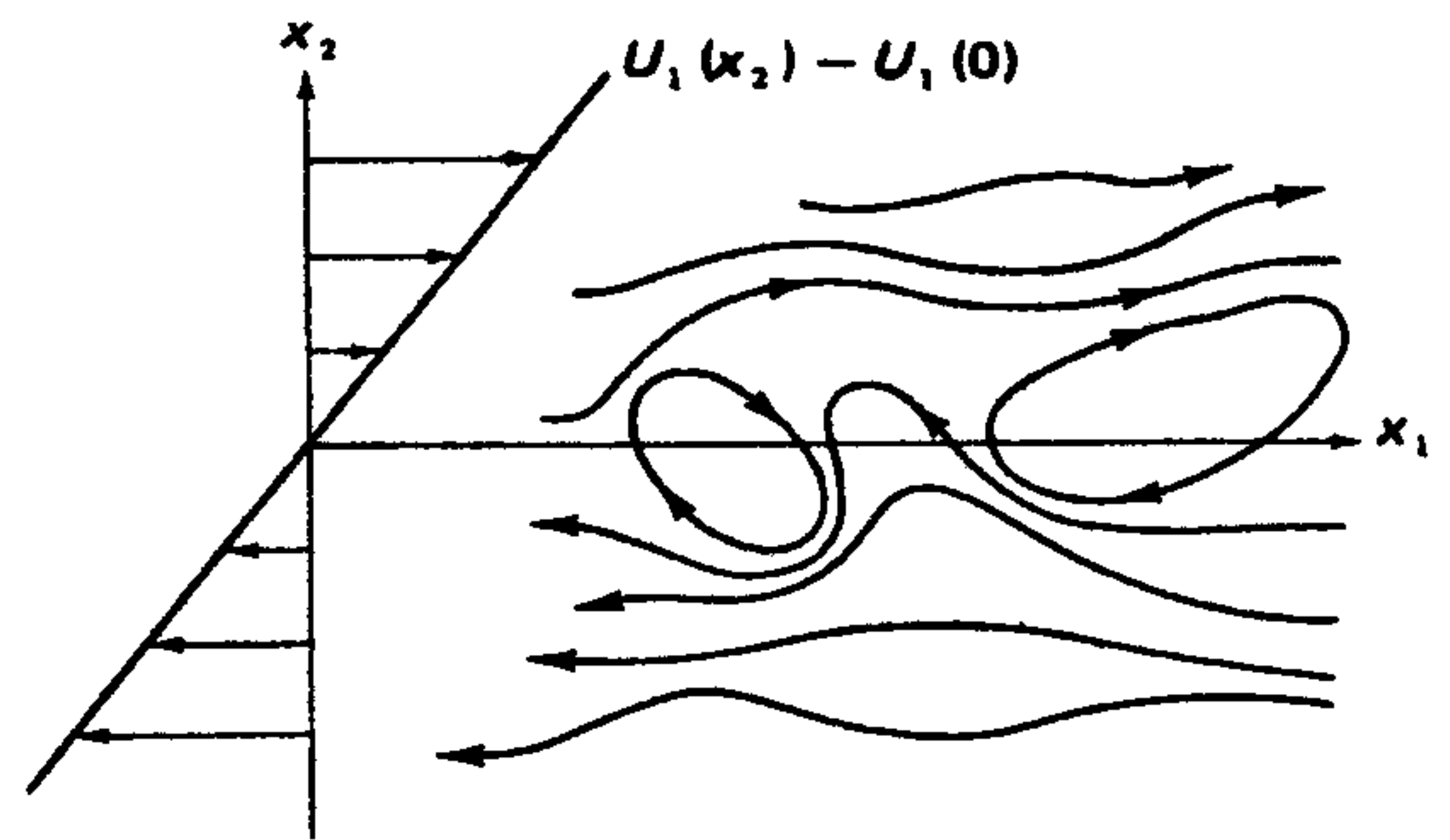


FIGURA 3. Ejemplo de un esfuerzo cortante puro.

las estructuras turbulentas y se limitan a definir las cualitativamente. El modelo desarrollado en este estudio reproduce adecuadamente las estructuras de vorticidad reportadas por otros autores, permitiendo además cuantificar y seguir la evolución e intensidad de los vórtices.

2. Aspectos fundamentales del movimiento de una partícula fluida

Si se recuerda que la turbulencia es básicamente tridimensional, se puede señalar que la velocidad instantánea en un punto del espacio debe verse como la resultante de las inducciones del conjunto de remolinos del medio circundante. Un ejemplo simple de esta afirmación anterior se muestra en la Fig. 3, en la que un esfuerzo cortante puro, representado por el gradiente $0.5 (\partial U / \partial y)$, introduce un alargamiento o deformación en la dirección inclinada a 45° con respecto a los ejes x - y , y una fuerza de compresión en la dirección perpendicular.

Como resultado de la acción del cortante sobre el fluido, una partícula se ve sometida a tres tipos de acciones al pasar de un tiempo t_1 al tiempo t_2 : a una deformación, una rotación y, además si la partícula cambia con respecto al espacio, a una traslación. La deformación y rotación se denominan componente simétrica y antisimétrica del movimiento del fluido, respectivamente. La deformación total del flujo puede escribirse como

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = S_{ij} + R_{ij}, \quad (1)$$

en la cual S_{ij} representa el tensor o la componente simétrica del flujo y R_{ij} el tensor o la componente de rotación, defini-

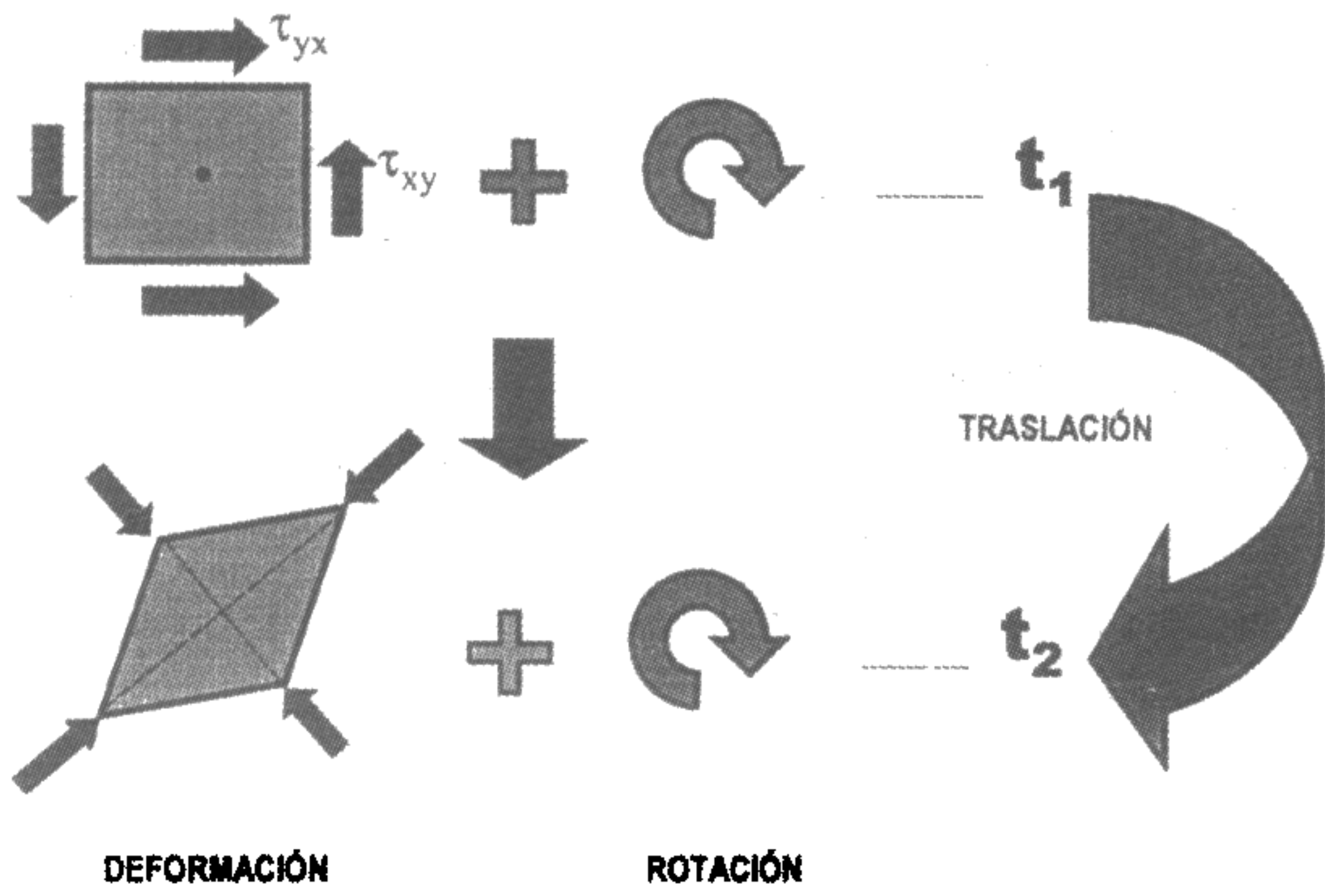


FIGURA 4. Esquema de una partícula fluida sometida a deformación, rotación y traslación.

dos respectivamente por

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), \quad (2)$$

$$R_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right). \quad (3)$$

Ambas componentes se ilustran en la Fig. 4. El tensor simétrico está asociado directamente a la deformación del elemento de fluido y el asimétrico a la rotación simple ligada al vector remolino.

2.1. Acción de la vorticidad

En lo que respecta a las agitaciones turbulentas, y revisando las ecuaciones medias de Navier-Stokes, se deduce que el movimiento medio aporta energía para mantener el estado turbulento, este mecanismo identificado como de producción o de transferencia de energía del movimiento medio hacia el movimiento fluctuante es interesante y sumamente complejo; las fluctuaciones de velocidad se deben a la presencia de remolinos en cada instante, y éstos se mueven gracias a su energía cinética la cual varía de acuerdo a su forma; es decir, si sufren un alargamiento o una compresión, ya que se ha demostrado, que la energía cinética de los remolinos es proporcional a su longitud, ℓ , de tal manera que si un remolino es alargado su longitud aumenta y por tanto también su energía cinética, pero su sección disminuye. Por el contrario, cuando un remolino es comprimido, su sección aumenta pero su energía cinética disminuye. La dirección del alargamiento es dada por la deformación del movimiento medio, por esta razón los remolinos que mejor extraen la energía cinética del movimiento del flujo son aquellos cuyos ejes están más o menos alineados con los ejes de la deformación del movimiento medio. Más adelante, en la discusión de resultados, se presenta la producción de energía cinética a lo largo del canal obtenida en este estudio y el obtenido por otros estudios numéricos y experimentales.

Finalmente, recuérdese que el alargamiento de un remolino en cualquier dirección, después de cierto tiempo provocará que se alarguen la misma cantidad de remolinos en las

tres direcciones, es de esta manera que los remolinos *olvidan* poco a poco las características de su ancestro iniciador y tienden hacia un estado isótropo más o menos universal, sin embargo, esta *universalidad* no es totalmente independiente de las condiciones iniciales del problema.

3. Tratamiento estadístico de la ecuación de vorticidad

Todos los flujos turbulentos son caracterizados por altos niveles de vorticidad fluctuante. Esta es la característica que distingue la turbulencia de otros movimientos de flujo aleatorios, como las ondas oceánicas u ondas de gravedad atmosféricas.

Los esfuerzos de Reynolds pueden ser asociados con remolinos cuya vorticidad está alineada aproximadamente con la tasa media de deformación. A continuación se mostrará que los términos de turbulencia en las ecuaciones para el flujo medio están asociadas con el transporte y alargamiento de la vorticidad. Para obtener la ecuación general de la vorticidad para flujo incompresible, se aplica el operador rotacional a las ecuaciones de Navier-Stokes, siendo la vorticidad igual a

$$\Omega = \nabla \times \mathbf{U}, \quad (4)$$

$$\nabla \times \frac{d\mathbf{U}}{dt} + \nabla \times [(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U}] = \nabla \times \left(-\frac{\nabla P}{\rho} \right) + \nabla \times \mathbf{f} + \nu \nabla \times \nabla^2 \mathbf{U}, \quad (5)$$

la cual, para este caso en que se supone flujo incompresible y que las fuerzas de cuerpo y los efectos de la rotación de la tierra despreciables, se reduce a la ecuación siguiente, escrita en notación indicial:

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_j} = \Omega_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial x_j^2} \quad (6)$$

Para resolver esta ecuación se recurre a un tratamiento estadístico tal como se procede clásicamente con las ecuaciones de N-S, de esta manera, la vorticidad instantánea se descompone en una vorticidad media y una fluctuación de vorticidad; de tal forma que

$$\bar{\Omega}_i = \bar{\Omega}_i + \bar{\omega}_i; \quad \bar{\omega}_i = 0,$$

Al introducir esta descomposición y aplicar los axiomas de Reynolds en la Ec. (6) se obtiene una ecuación estadística para la vorticidad:

$$\frac{\partial \bar{\Omega}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{\Omega}_i}{\partial x_j} = \bar{\Omega}_i \bar{S}_{ij} + \nu \frac{\partial^2 \bar{\Omega}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial (\overline{u_j \omega_i})}{\partial x_j}. \quad (7)$$

La Ec. (7) guarda una forma similar con la ecuación promediada de N-S. En particular, el término de segundo orden que involucra una correlación entre las fluctuaciones de vorticidad y las de velocidad, requiere de un tratamiento particular. Puede demostrarse que existe una relación equivalente para dicho tensor, en función de las fluctuaciones de velocidad $\overline{u_i u_j}$, aprovechando las propiedades de flujo turbulento.

El significado dinámico entre los esfuerzos de Reynolds $\overline{u_i u_j}$ está asociado principalmente con la interacción de la vorticidad y la velocidad. Para aclarar un poco esto consideremos un flujo medio bidimensional en el cual $\overline{U}_1 \gg \overline{U}_2$ y $\overline{U}_3 = 0$, y para el cual las derivadas aguas abajo de las cantidades medias son pequeñas comparadas con las derivadas transversales, es decir, $\partial/\partial x_1 \ll \partial/\partial x_2$. Esto ocurre generalmente en la mayoría de los flujos tipo capa límite y en las estelas. En estas condiciones, la única componente de la vorticidad diferente de cero es $\overline{\Omega}_3 = \partial\overline{U}_2/\partial x_1 - \partial\overline{U}_1/\partial x_2$. Debido a que $\overline{U}_2 \ll \overline{U}_1$ y a que $\partial/\partial x_1 \ll \partial/\partial x_2$, la componente de vorticidad resulta

$$\overline{\Omega}_3 = \frac{\partial\overline{U}_1}{\partial x_2}.$$

Si se escribe la ecuación para \overline{U}_1 en función de las fuerzas de rotación, los términos de vorticidad producto asociados con el flujo medio son $\overline{U}_2\overline{\Omega}_3$ y $-\overline{U}_3\overline{\Omega}_2$. El primero de ellos es igual a $-\overline{U}_2\partial\overline{U}_1/\partial x_2 + \overline{U}_2\partial\overline{U}_2/\partial x_1$. El segundo es cero ya que $\overline{U}_3 = 0$, $\overline{\Omega}_2 = 0$. También $-\partial(\overline{U}_j\overline{U}_j/2)/\partial x_1$ es igual a $-\overline{U}_1\partial\overline{U}_1/\partial x_1 - \overline{U}_2\partial\overline{U}_2/\partial x_1$ en este flujo. Si se desprecia el término viscoso y la contribución de la turbulencia a la presión dinámica, la ecuación para \overline{U}_1 puede escribirse como

$$\overline{U}_1 \frac{\partial\overline{U}_1}{\partial x_1} + \overline{U}_2 \frac{\partial\overline{U}_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial\overline{P}}{\partial x_1} + \overline{u_2\omega_3} - \overline{u_3\omega_2} \quad (8)$$

esta ecuación es análoga a la obtenida para el flujo medio bidimensional, en la que se desprecian los efectos viscosos:

$$\overline{U}_1 \frac{\partial\overline{U}_1}{\partial x_1} + \overline{U}_2 \frac{\partial\overline{U}_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial\overline{P}}{\partial x_1} + \frac{\partial\overline{u_1u_1}}{\partial x_1} - \frac{\partial\overline{u_1u_2}}{\partial x_2}. \quad (9)$$

Observando que $\partial\overline{u_1^2}/\partial x_1 \ll \partial\overline{u_1u_2}/\partial x_2$, se encuentra que el término vorticoso representa la derivada de la corriente transversal de los esfuerzos cortantes de Reynolds $-\overline{u_1u_2}$.

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(-\overline{u_1u_2}) = \overline{u_2\omega_3} - \overline{u_3\omega_2}. \quad (10)$$

Las contribuciones relativas de $\overline{u_2\omega_3}$ y $\overline{u_3\omega_2}$ a $\partial(-\overline{u_1u_2})/\partial x_2$ dependen aparentemente del tipo de flujo considerado. Si la longitud de escala ℓ es aproximadamente constante a través del flujo, la fuerza del alargamiento del vórtice $\overline{u_3\omega_2}$, será despreciable y el gradiente de los esfuerzos de Reynolds puede ser interpretado como transporte de vorticidad. Esto explica porque la teoría del transporte de la vorticidad ha tenido éxito en la descripción de las estelas turbulentas y de los *jets*; en estos flujos, la longitud de escala tiende a un valor constante en la dirección transversal del flujo.

Generalizando la Ec. (10) para un flujo tridimensional, la Ec. (7) puede escribirse como

$$\frac{\partial\overline{\Omega}_i}{\partial t} + \overline{U}_\ell \frac{\partial\overline{\Omega}_i}{\partial x_\ell} = \overline{\Omega}_\ell \overline{S}_{i\ell} + \nu \frac{\partial^2\overline{\Omega}_i}{\partial x_\ell \partial x_\ell} - \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left(\frac{\varepsilon_{ijk}}{2} \frac{\partial\overline{u_k u_\ell}}{\partial x_j} \right), \quad (11)$$

la cual facilita el tratamiento de esta ecuación y se evita un análisis más riguroso sobre el término $\overline{u_j\omega_i}$ que obligaría al desarrollo de ecuaciones de transporte de cantidades como $\overline{u_i\omega_j}$, $\overline{\omega_i\omega_i}$, $\overline{u_i\omega_j u_j}$, etc. En la Ec. (11) sólo se requerirá de evaluar las correlaciones dobles de velocidad.

En este estudio tales cantidades turbulentas son evaluadas mediante la relación clásica de las tensiones de Reynolds esquematizadas por analogía a la expresión de esfuerzos moleculares en un flujo laminar [4]

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_T \left(\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial\overline{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \kappa, \quad (12)$$

en la que ν_T es el coeficiente de viscosidad turbulenta equivalente, y se evalúa de la relación

$$\nu_T = C_\mu \frac{\kappa^2}{\varepsilon}, \quad (13)$$

en la que κ es la energía cinética de la turbulencia y ε su disipación. Las ecuaciones de κ y ε se describen a continuación

a) Ecuación de la energía cinética de la turbulencia

$$\frac{\partial\kappa}{\partial t} + \overline{U}_j \frac{\partial\kappa}{\partial x_j} = P + B + \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_\kappa} \frac{\partial\kappa}{\partial x_j} \right), \quad (14)$$

donde ε es el término de disipación que transfiere directamente la energía cinética de la turbulencia en energía interna del fluido por acción viscosa.

b) Ecuación de la disipación de la energía cinética de la turbulencia

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \overline{U}_j \frac{\partial\varepsilon}{\partial x_j} = C_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{\kappa} (P + C_{\varepsilon_3} B) - C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{\kappa} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial\varepsilon}{\partial x_j} \right). \quad (15)$$

En las ecuaciones anteriores se introducen además del término de producción (P) que se puede definir como el producto de los esfuerzos de Reynolds por los gradientes de velocidad media y del término B que incluye los efectos de flotación, cinco constantes de modelación, las cuales deben ser determinadas experimentalmente, aunque en este caso fueron tomadas del modelo estándar de Rodi [5].

4. Aplicación a un flujo que se deforma alrededor de un obstáculo

Los flujos reales en canales abiertos y ríos son a menudo demasiado complejos para ser representados como flujos en 2-D, el entendimiento del flujo secundarias es esencial para la interpretación de las estructuras turbulentas de flujo en 3-D. Si el flujo no es uniforme en la dirección principal, la vorticidad en ésta es generada por el alargamiento/contracción de los vórtices. El tipo de movimiento considerado es el movimiento secundario en canales rectos que tienen las condiciones de frontera más simples, pero que sin embargo proporcionan información básica acerca de las estructuras turbulentas

de flujo en 3-D. Tales corrientes secundarias son generadas por la no-homogeneidad y la anisotropía de la turbulencia, y son llamadas *corrientes secundarias de Prandtl de segundo tipo*.

Hace más de cien años Sterns [6] infirió la existencia de corrientes secundarias, basándose en el hecho de que la velocidad máxima en canales abiertos ocurre ligeramente por debajo de la superficie libre. Gibson [7] estimó que la velocidad de las corrientes secundarias sería alrededor del 5% de la velocidad media principal. Vanoni [8] sugirió que corrientes celulares secundarias pueden existir en canales anchos en base a la observación de que la concentración de sedimentos suspendidos variaba cíclicamente en la dirección del flujo medio. Karcz [9] y Kinoshita [10] se imaginaron el patrón de flujo de las corrientes celulares secundarias para explicar la formación de listones de arena en canales fluviales anchos.

En este estudio las corrientes secundarias, y en general todo tipo de estructuras turbulentas, son generadas cuando al flujo en un canal rectangular se le coloca un obstáculo rectangular en el fondo. El entendimiento y cuantificación de estas estructuras permitirá contribuir a identificar los diferentes procesos dinámicos que siguen los sedimentos en el fondo de un canal.

4.1. Dominio de estudio

Las simulaciones se hicieron en un canal con superficie libre con un obstáculo en el fondo, las dimensiones del canal son: en la dirección x y y , 0.3 m; y en la dirección z , 0.20 m. Las dimensiones del obstáculo son de 0.06 m \times 0.06 m \times 0.04 m de altura. Sobre este dominio de estudio se generó una malla no homogénea de 117 250 puntos, refinada en la región de influencia del obstáculo.

4.2. Condiciones iniciales

El número de Reynolds es aproximadamente 14 000, por lo que este estudio considera una capa límite turbulenta desarrollada. La presión en el fondo del canal se consideró igual a la presión hidrostática

$$P(z) = \gamma \cdot h. \quad (16)$$

En el caso del perfil de velocidad de entrada al canal se utilizó la ley logaritmo que considera los efectos de pared sobre el perfil de flujo. Dicha ley se escribe como

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + A, \quad (17)$$

donde A es una constante de integración, cuyo valor es 5.287, y el valor de la constante de Von Karman κ , se tomó igual a 0.412 [11]. Una consideración importante es que las constantes κ y A en la ley logaritmo, deberán ser determinadas de datos experimentales que pertenezcan solamente a la región del flujo $y/h < 0.2$, en donde y es el tirante de agua y h la altura total del canal.

4.3. Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera se introducen en celdas ficticias que se encuentran en los bordes del dominio de estudio, en estos, ya sean fronteras físicas o impuestas, y según sea el caso, se deben cumplir las condiciones de frontera de Neumann o de Dirichlet, es decir, $\partial\phi/\partial x = 0$ y $\partial\phi/\partial x = C$, respectivamente

5. Método numérico de solución

Se resuelven las ecuaciones de N-S promediadas, la ecuación de continuidad, las ecuaciones para el modelo κ - ϵ y las ecuaciones de vorticidad. Los resultados que se presentan se obtuvieron cuando la convergencia estacionaria es de $O(10^{-6})$. El sistema de ecuaciones estadístico obtenido anteriormente, es resuelto por vía numérica, lo cual involucra otro tipo de consideraciones como la discretización espacial y temporal de las ecuaciones. En el presente trabajo se utiliza el método de diferencias finitas para discretizar las ecuaciones en el tiempo; y para la discretización espacial de las variables se usa la célula MAC; el método para resolver la ecuación de continuidad es el de compresibilidad artificial.

6. Análisis de resultados

La ausencia de estudios tanto numéricos como experimentales, sólo permite hacer comparaciones cualitativas en la mayoría de los casos, sin embargo, en las Figs. 5 y 6 se presenta una comparación del perfil de la producción de energía cinética a lo largo del canal obtenida en este estudio y la ubicación del mismo dentro de los obtenidos por otros autores en un experimento similar a éste, utilizando varios modelos numéricos e inclusive una medición experimental, para el mismo problema. En la Fig. 5 se presenta una recopilación de datos experimentales y numéricos hecha por Franke y Rodi [12], para un experimento de flujo bidimensional sobre las esquinas de un cilindro con un $Re = 22\ 000$. En la Fig. 6, se muestra la envolvente de resultados numéricos y experimentales del experimento ya referido, localizando dentro de ella los resultados aquí obtenidos, se puede constatar que éstos caen dentro del intervalo de resultados arrojados por otros modelos, por lo que se pueden considerar como válidos.

En la Fig. 7 se muestran las líneas de contorno de la intensidad del esfuerzo tangencial \overline{vw} , que es un esfuerzo neto del flujo secundario, dicho resultado coincide con la esquematización que actualmente se tiene del flujo secundario, como vórtices girando uno opuesto del otro a lo ancho del dominio de flujo, a dichos vórtices se les conoce como celdas convectivas. En la Fig. 8, se presenta la deformación total de la contribución \overline{vw} alrededor del obstáculo y la influencia que esta correlación puede tener en el flujo secundario y en la vorticidad del flujo. Por otra parte en las Figs. 9a y 9b, es posible observar lo que se denomina *hojas de vorticidad*, en ésta se ve como las líneas se deforman poco a poco hasta formar varias estructuras turbulentas, entre las que sobresalen: el vór-

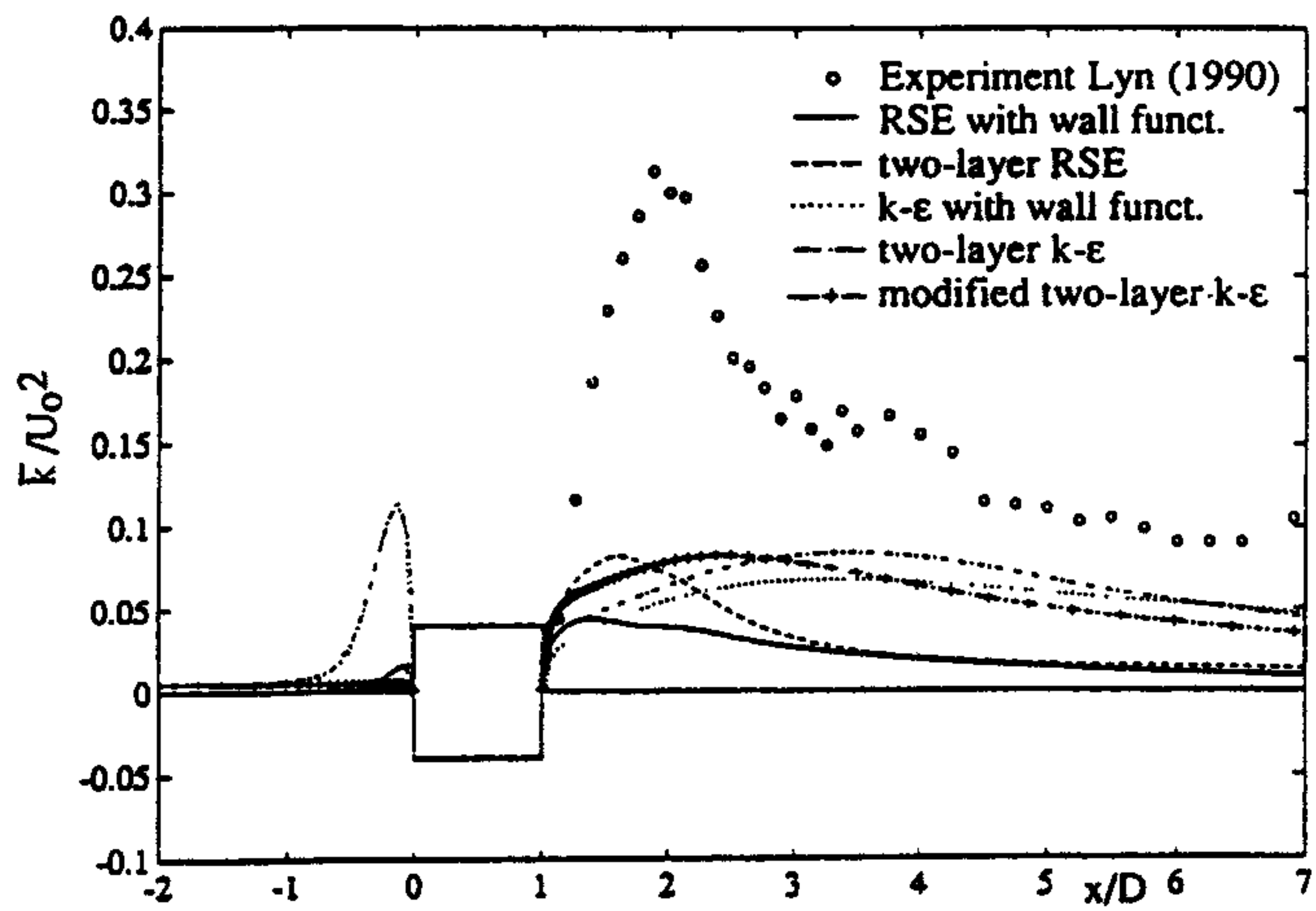


FIGURA 5. Energía cinética adimensional, obtenida por Franke y Rodi [12].

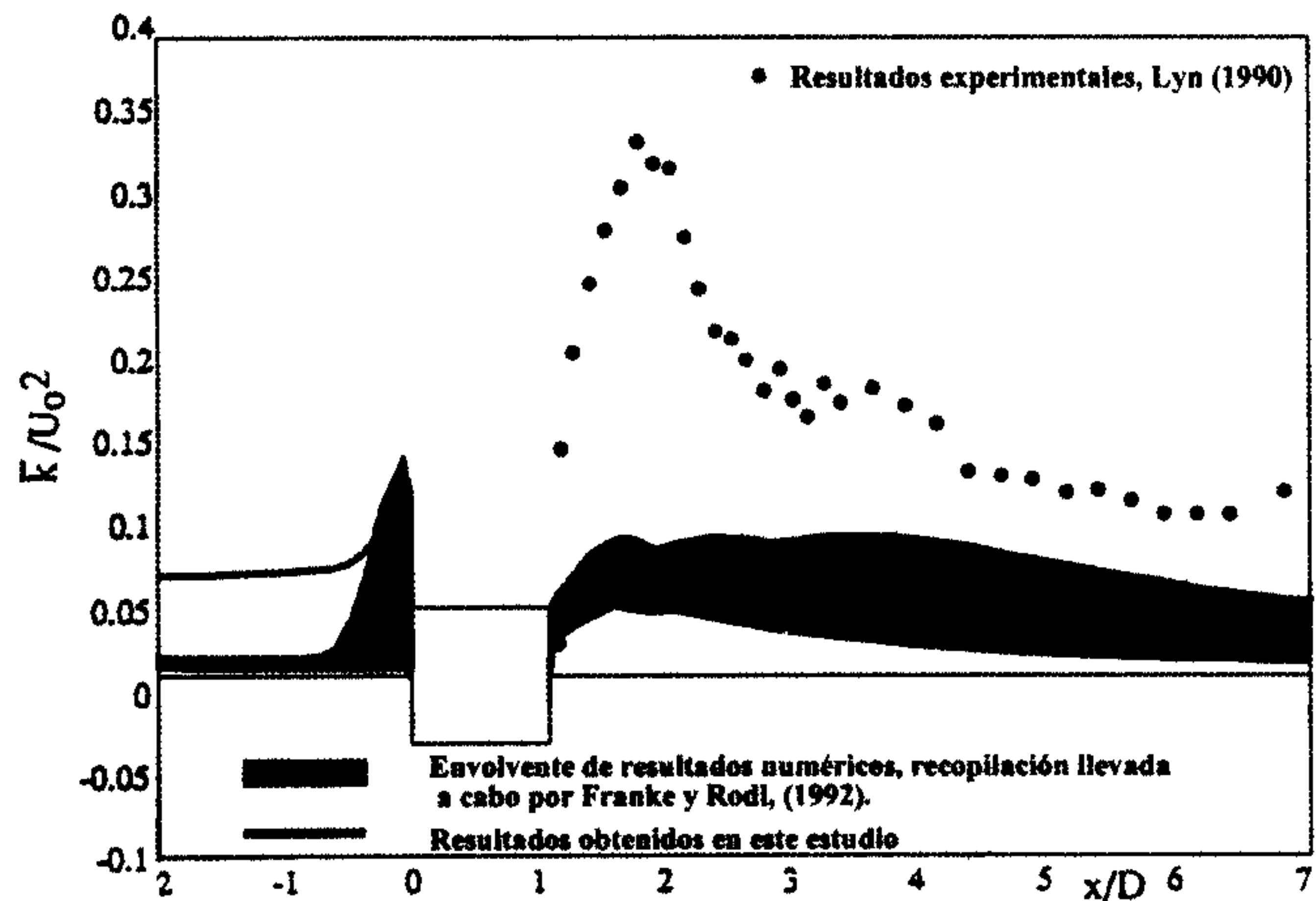


FIGURA 6. Ubicación de resultados de la energía cinética adimensional a lo largo del canal obtenida en este estudio y el trabajo de Franke y Rodi [12].

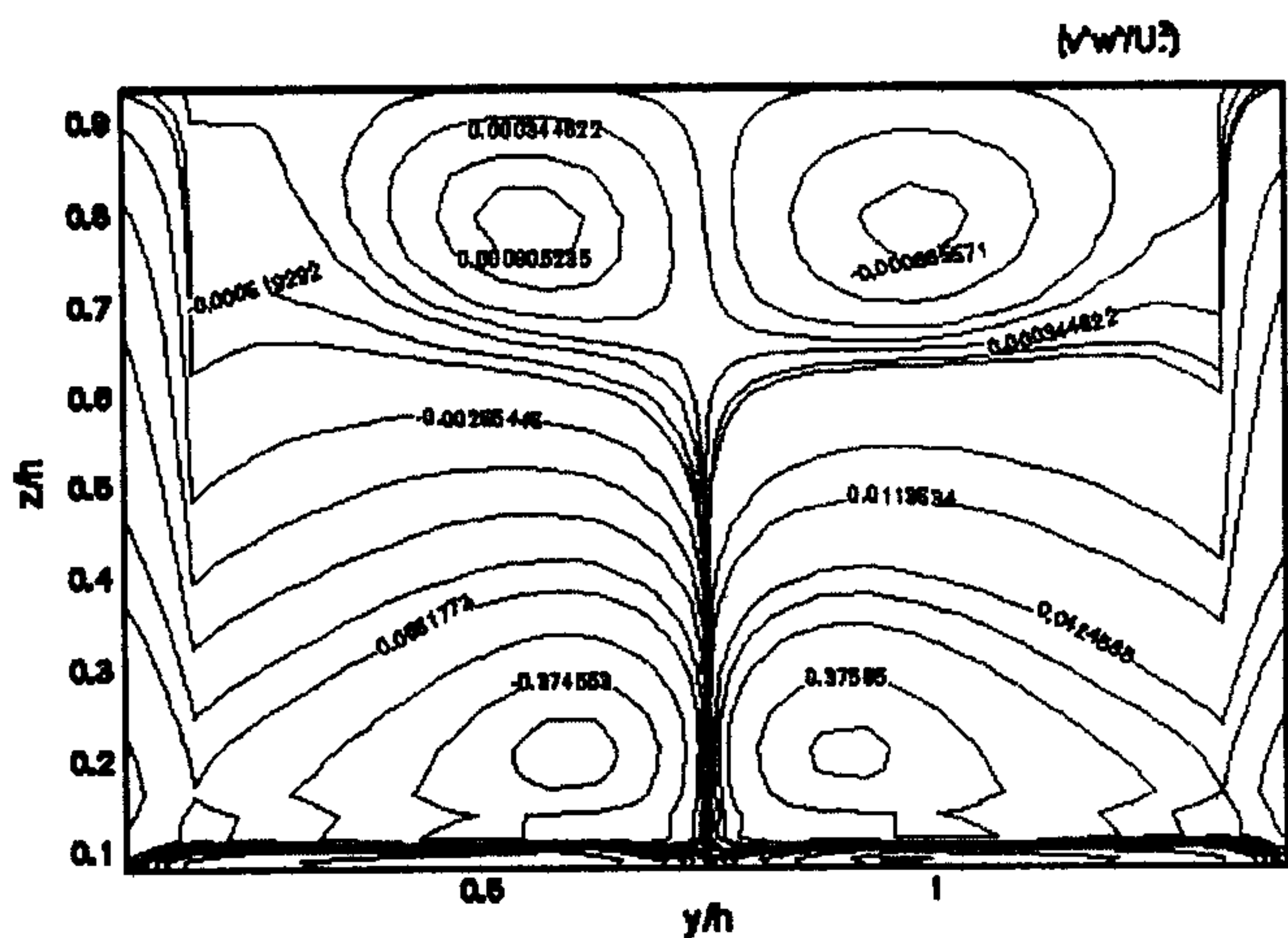


FIGURA 7. Líneas de contorno de la intensidad del esfuerzo de Reynolds $-\overline{vw}$.

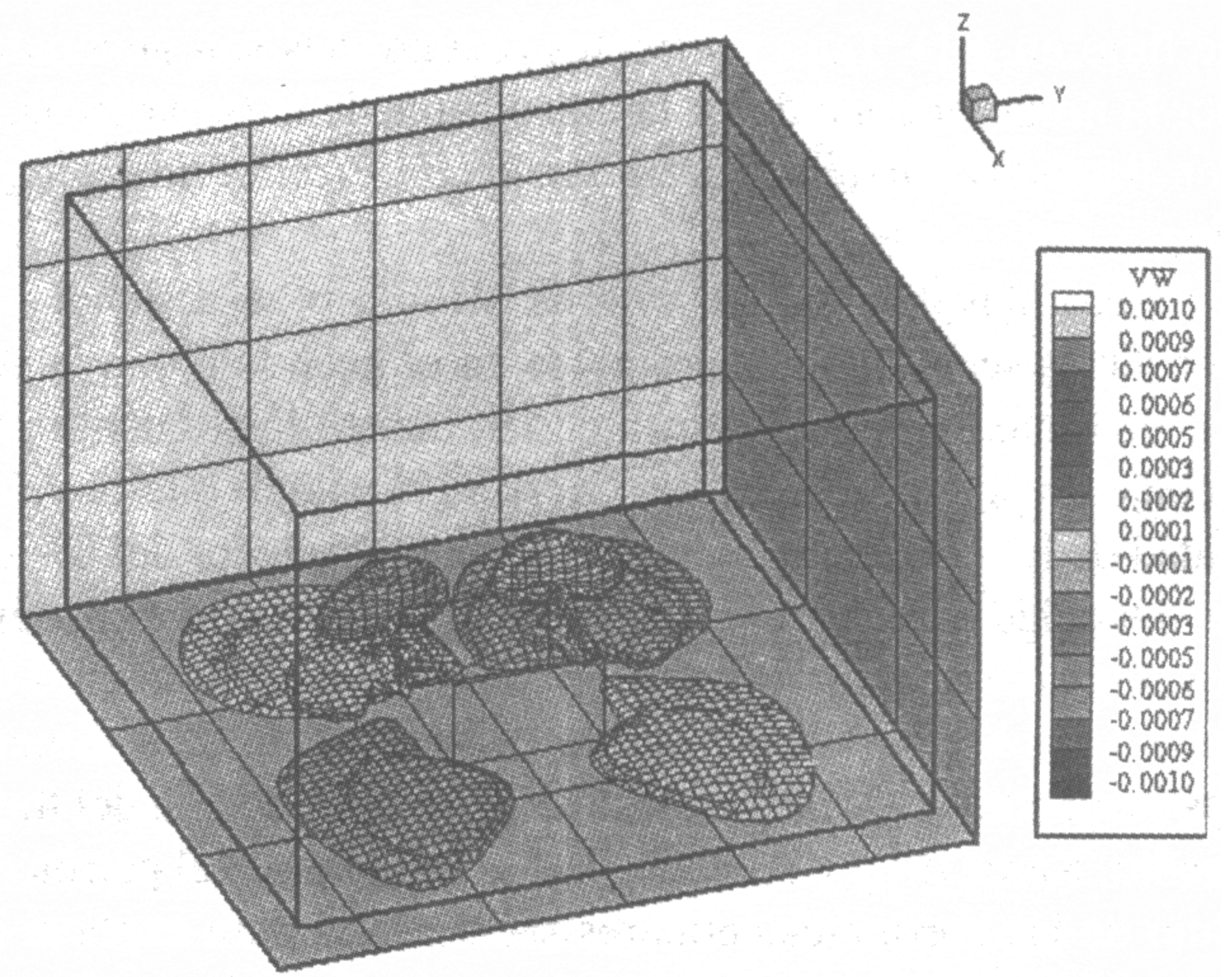
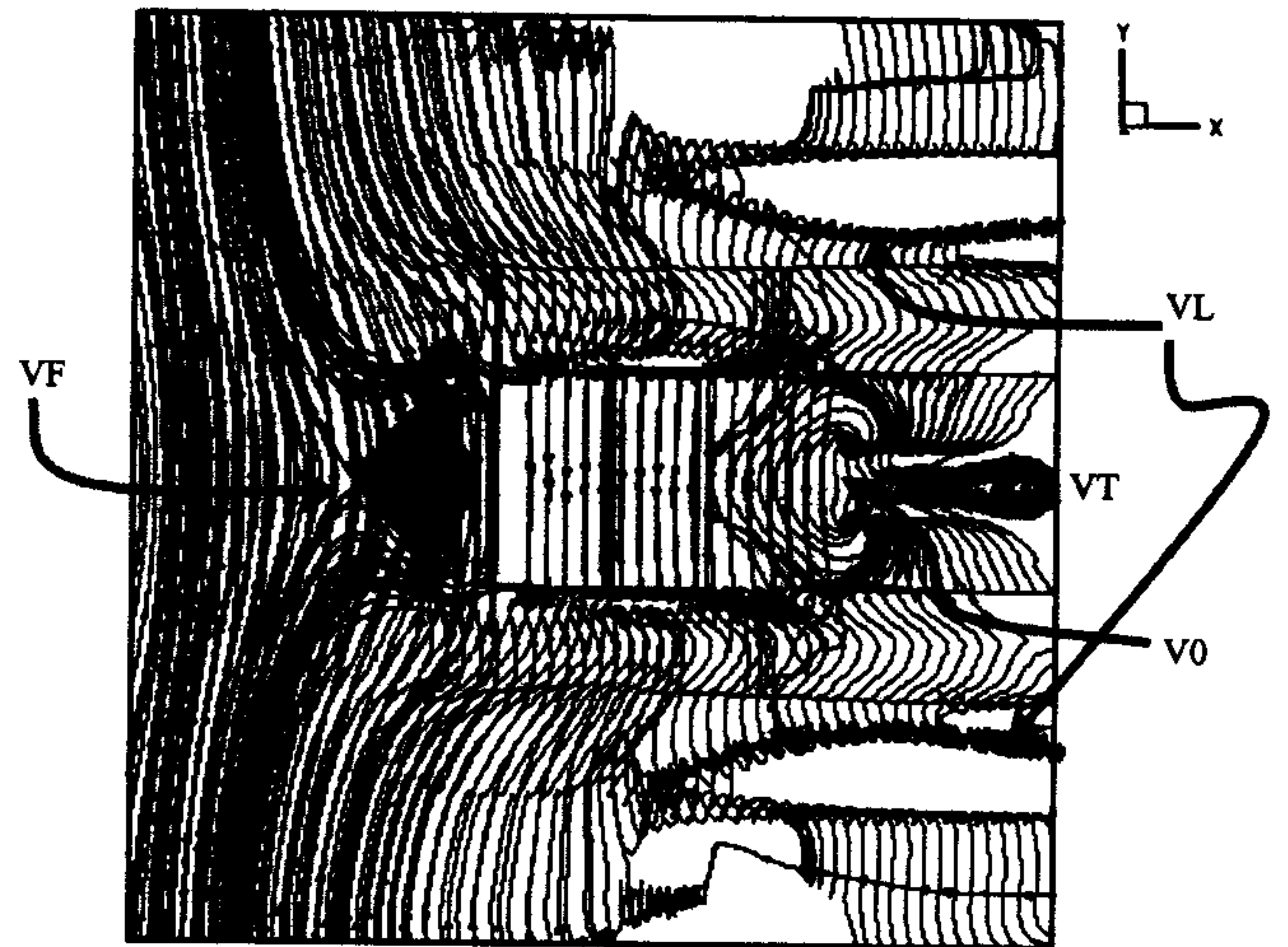
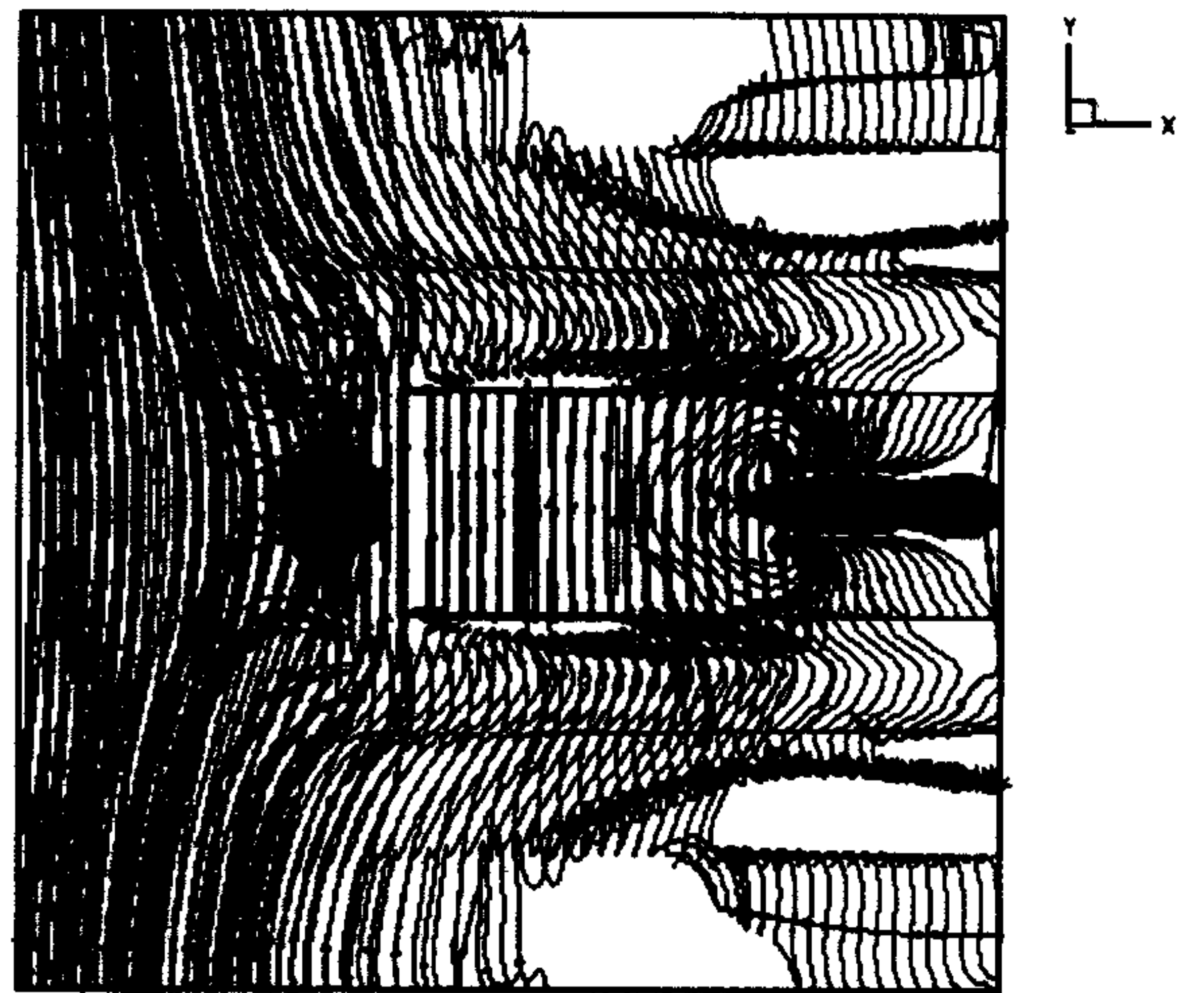


FIGURA 8. Perspectiva de líneas de contorno de los esfuerzos de Reynolds.



(a)



(b)

FIGURA 9. Líneas de volumen de vorticidad en el plano $x-y$, a) tocando varios puntos en y , a) en el fondo del canal; y b) a 0.075 cm del fondo del canal.

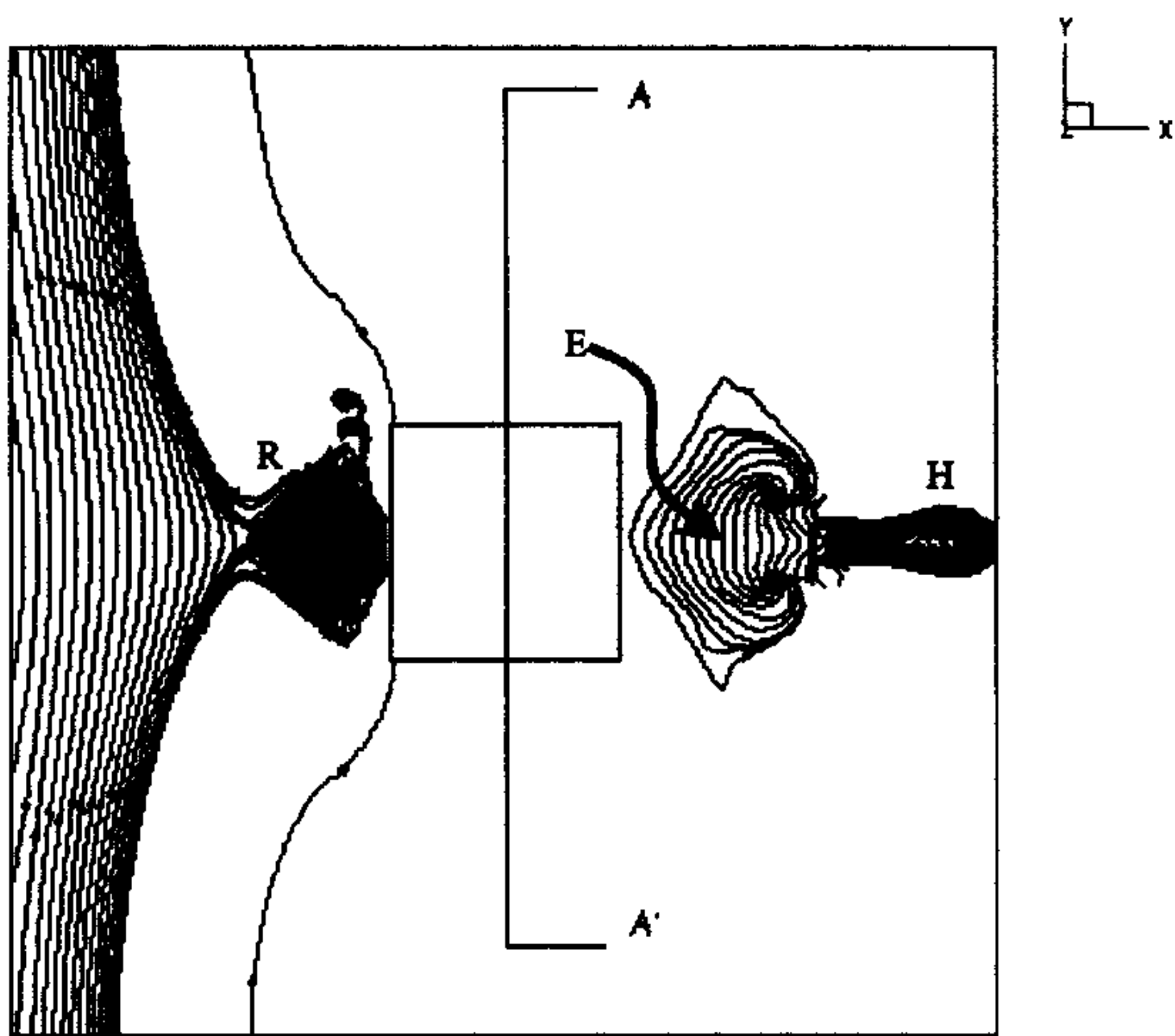


FIGURA 10. Líneas de volumen de vorticidad en el plano $x-y$ en el fondo del canal, al centro de la dirección y .

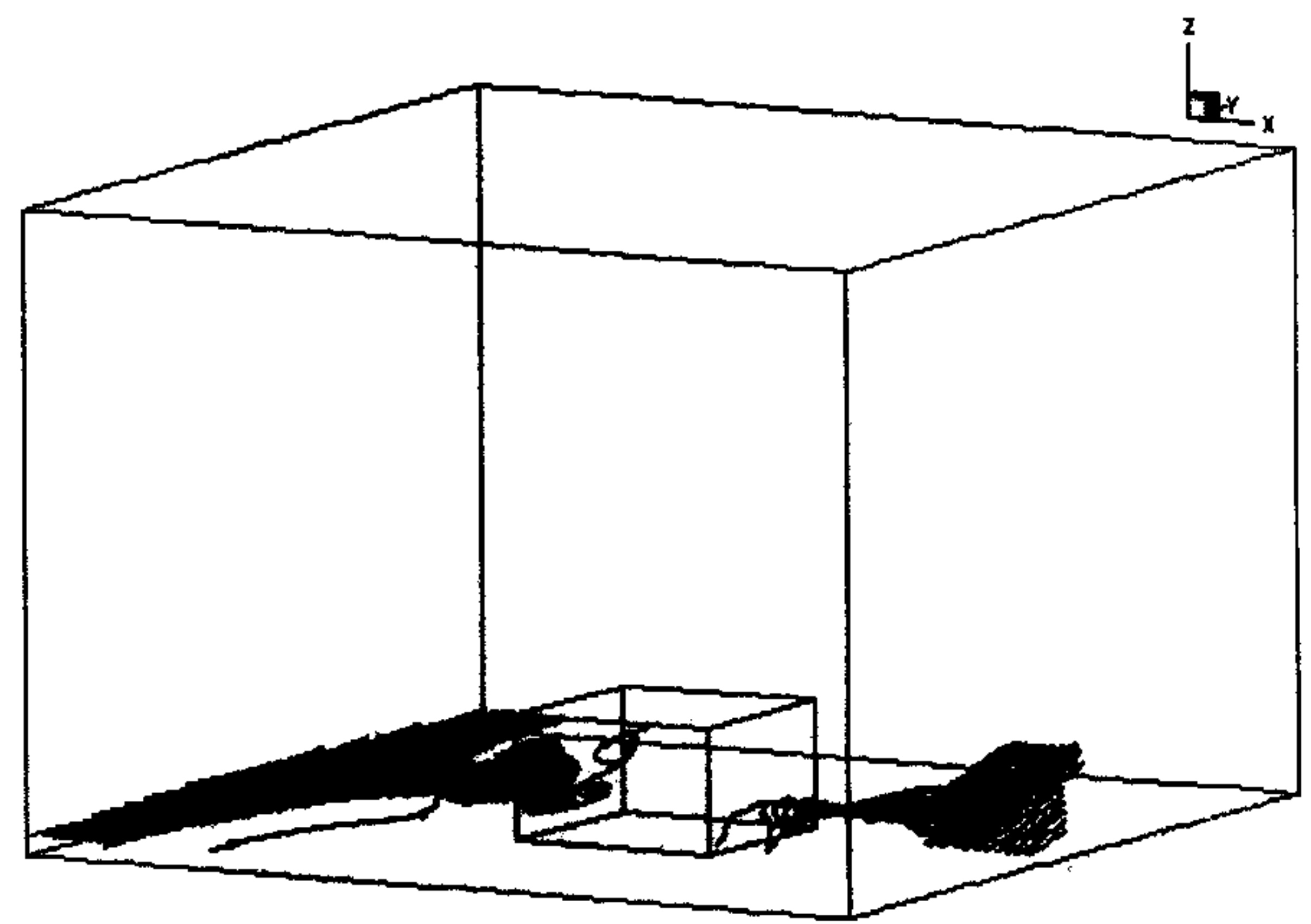


FIGURA 12. Vista general de las líneas de volumen de vorticidad en el fondo del canal.

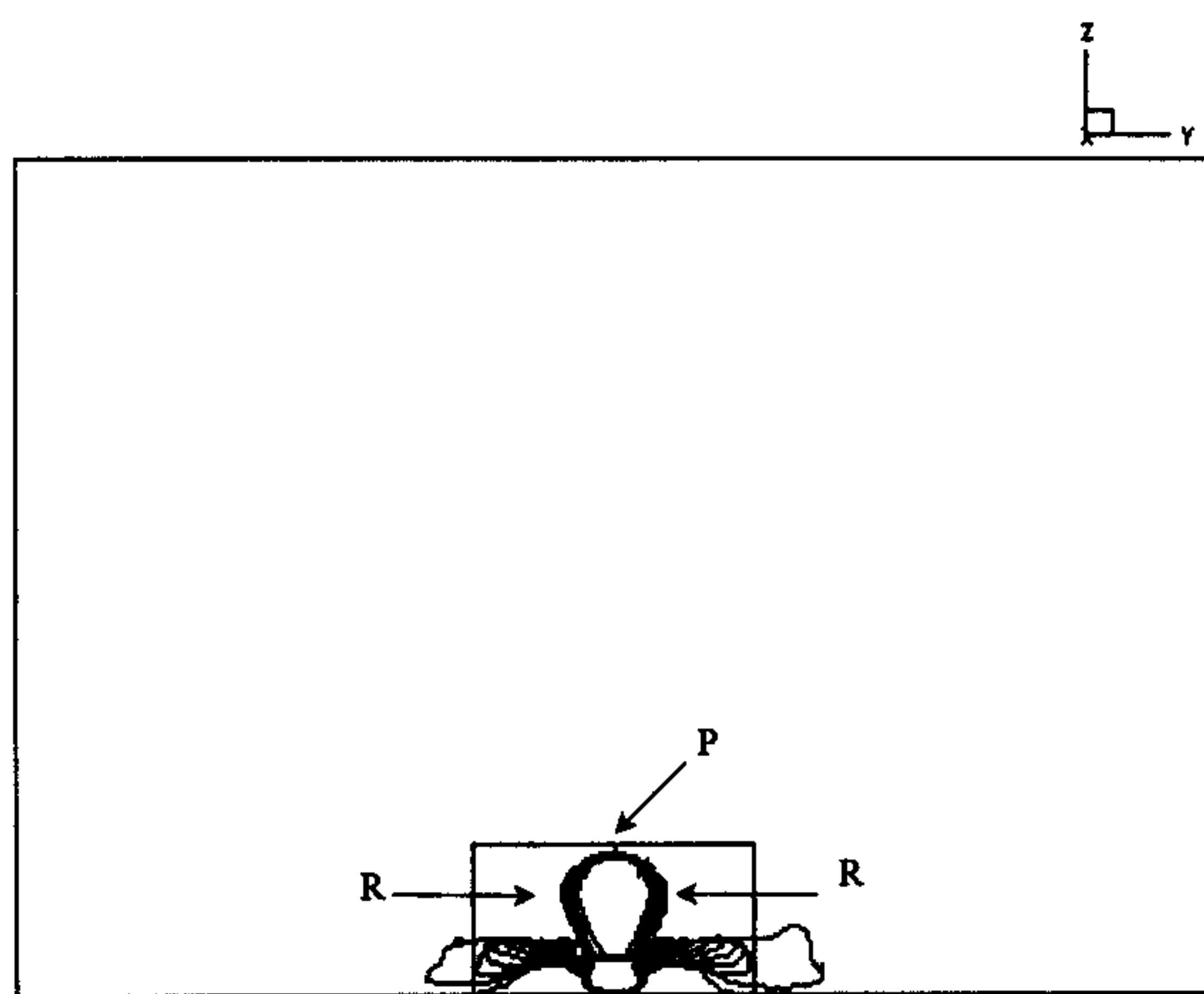


FIGURA 11. Corte A-A' de la Fig. 9.

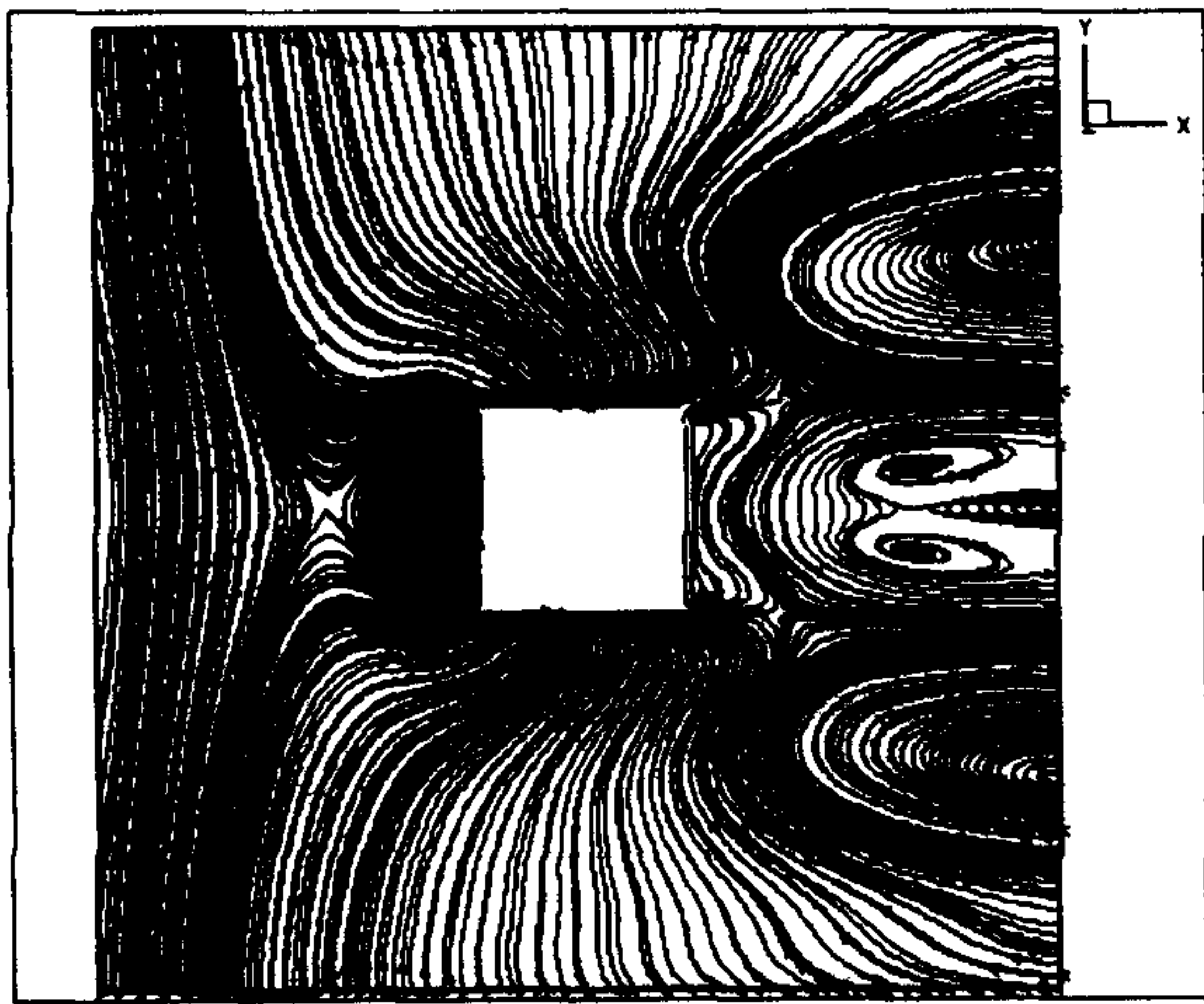
tice de fondo (VF), los vórtices de punto (VL) y la más conocida los vórtices opuestos (VO). Las Figuras mencionadas también muestran una pequeña secuencia de la evolución del flujo en el espacio, por ejemplo, como ya se anotó en la Fig. 9a es posible notar además de las estructuras turbulentas ya mencionadas otras como el vórtice de tubo (VT, que como se hará notar más adelante tiene su origen en un vórtice de horquilla, alimentado por los vórtices opuestos) que es una de las estructuras vorticosas clásicas en flujo en canales abiertos, sin embargo en la Fig. 9b, se puede ver claramente una evolución en tamaño y forma de todas éstas.

Al hacer un acercamiento a la parte central de la Fig. 9a, lo cual se presenta en las Figs. 10, 11 y 12, es posible ver de manera más clara las estructuras vorticosas más comunes en flujo sobre obstáculos. En la Fig. 10, se deduce que el flujo incidente sobre el obstáculo produce una recirculación del flujo, lo cual se refleja en la aparición del vórtice de pie o fondo. En la parte derecha de esta misma figura se notan además del vórtice par y su estela, otra estructura turbulenta; se trata del conocido vórtice de horquilla, este último se presenta en

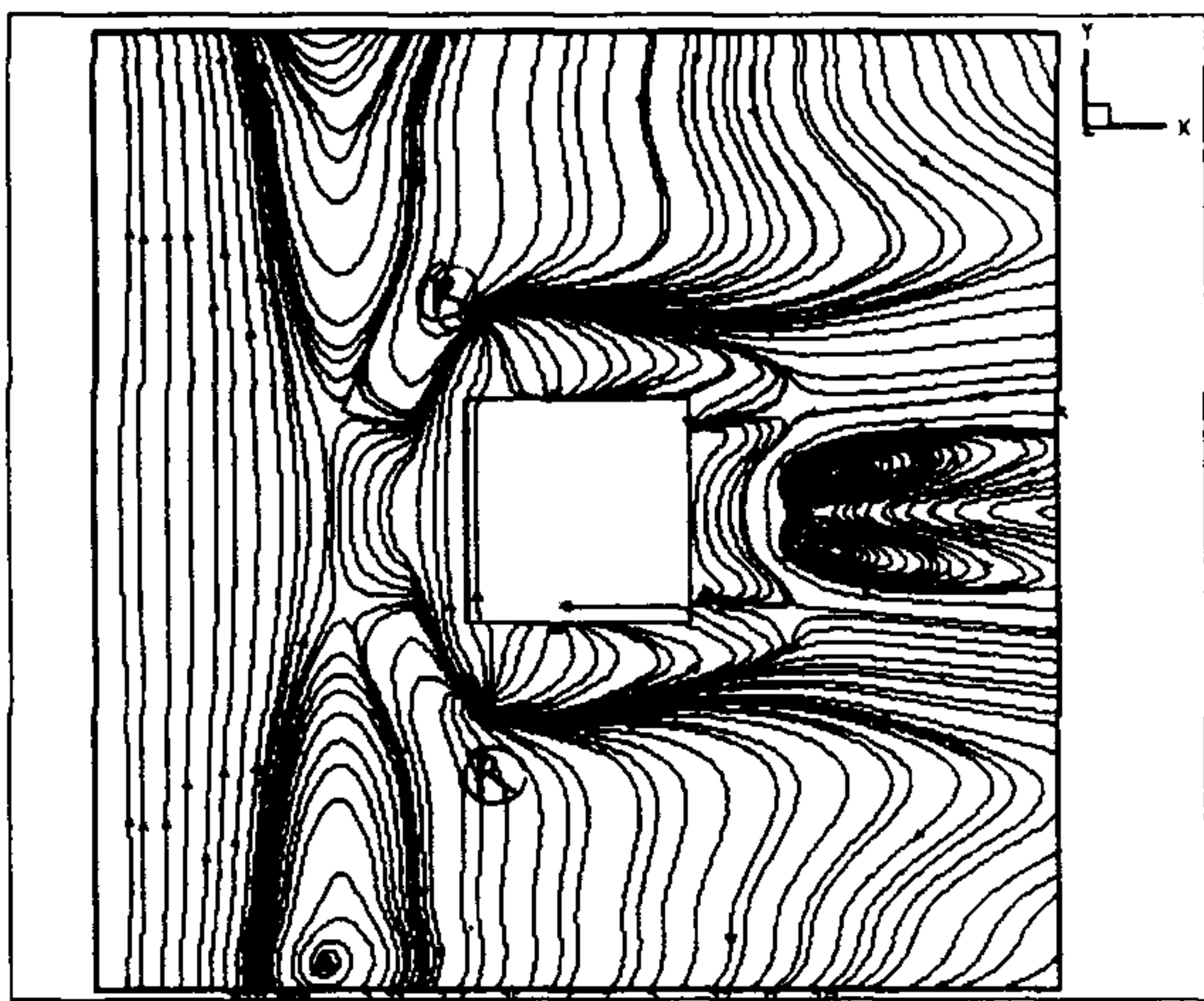
vista frontal en la Fig. 11. Observando las Figs. 10 y 11 es posible corroborar lo planteado por Acarlar y Smith [13]. Estos investigadores sugieren que los vórtices opuestos o vórtice par dan origen al vórtice de horquilla, y efectivamente, en la Fig. 10 se nota fácilmente que el flujo separado (estela) alimenta a los vórtices opuestos y a partir de estos últimos se desarrolla el vórtice de horquilla. En la Fig. 11, se muestran dos características principales de un vórtice de horquilla, la primera es que la cabeza (P) es cóncava en dirección al flujo, sin embargo, se desarrolla en dirección de este último, la segunda es que las ramas o pies del vórtice de horquilla se alimentan del vórtice par. En la Fig. 12, se muestra una vista general de las estructuras vorticosas ya mencionadas.

En las Figs. 13a, 13b y 13c se muestra una secuencia de la vorticidad existente en el canal, la secuencia abarca desde el fondo hasta $1/3$ de la altura del obstáculo, la razón para ello es que el fondo es el lugar en donde se desarrolla la mayoría de las estructuras turbulentas más importantes en canales abiertos. En la Fig. 13a, se nota además del vórtice par, dos vórtices contiguos a éste, los cuales se podrían describir como *vórtices opuestos externos*, este hecho es notable porque en la bibliografía no se hace referencia alguna a este tipo de vórtices. En la Fig. 13b, además de los vórtices opuestos se ven dos puntos de recirculación señalados con la letra R, mientras que en la Fig. 13c, los vórtices opuestos aparecen con una envolvente, lo cual quizá constituye lo que algunos llaman *tubos de vorticidad*. También aparece un vórtice central entre el vórtice par. Larousse *et al.* [3], imaginaron que el vórtice par se unía en un vórtice vertical con forma de herradura (Fig. 2), este estudio parece revelar que el flujo lateral absorbe dichos tubos de vorticidad.

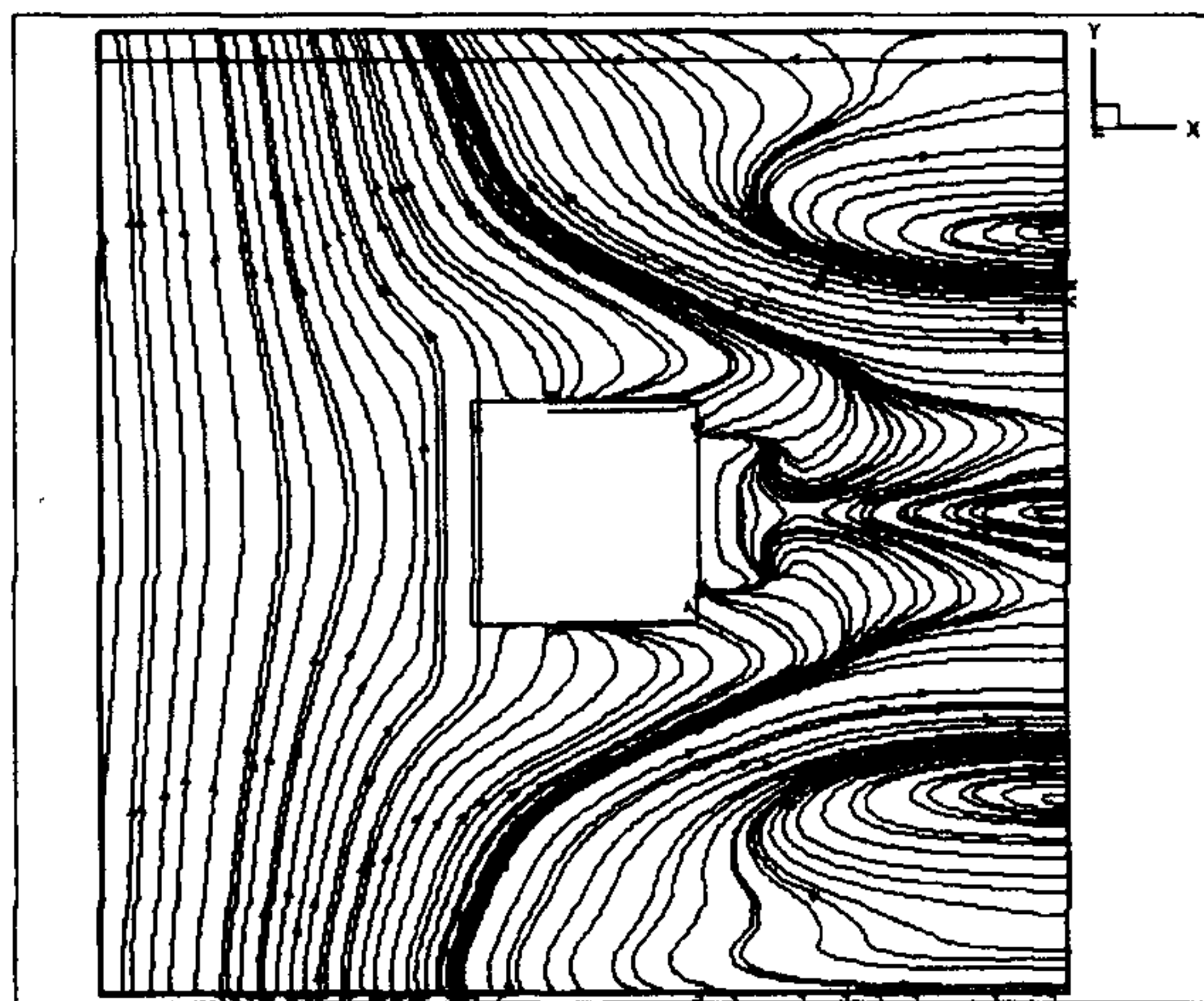
Por otra parte existe una nueva metodología para la descripción de los patrones de flujos obtenidos ya sea en forma experimental o numérica, conocida como *teoría de puntos críticos* [14]. Estos son puntos en el campo de flujo donde la pendiente de las líneas de corriente es igual a cero en relación a un observador apropiado. Dicha teoría proporciona un lenguaje o vocabulario que permite describir complicados patrones de flujo tridimensionales en forma inteligible y sin am-



(a)



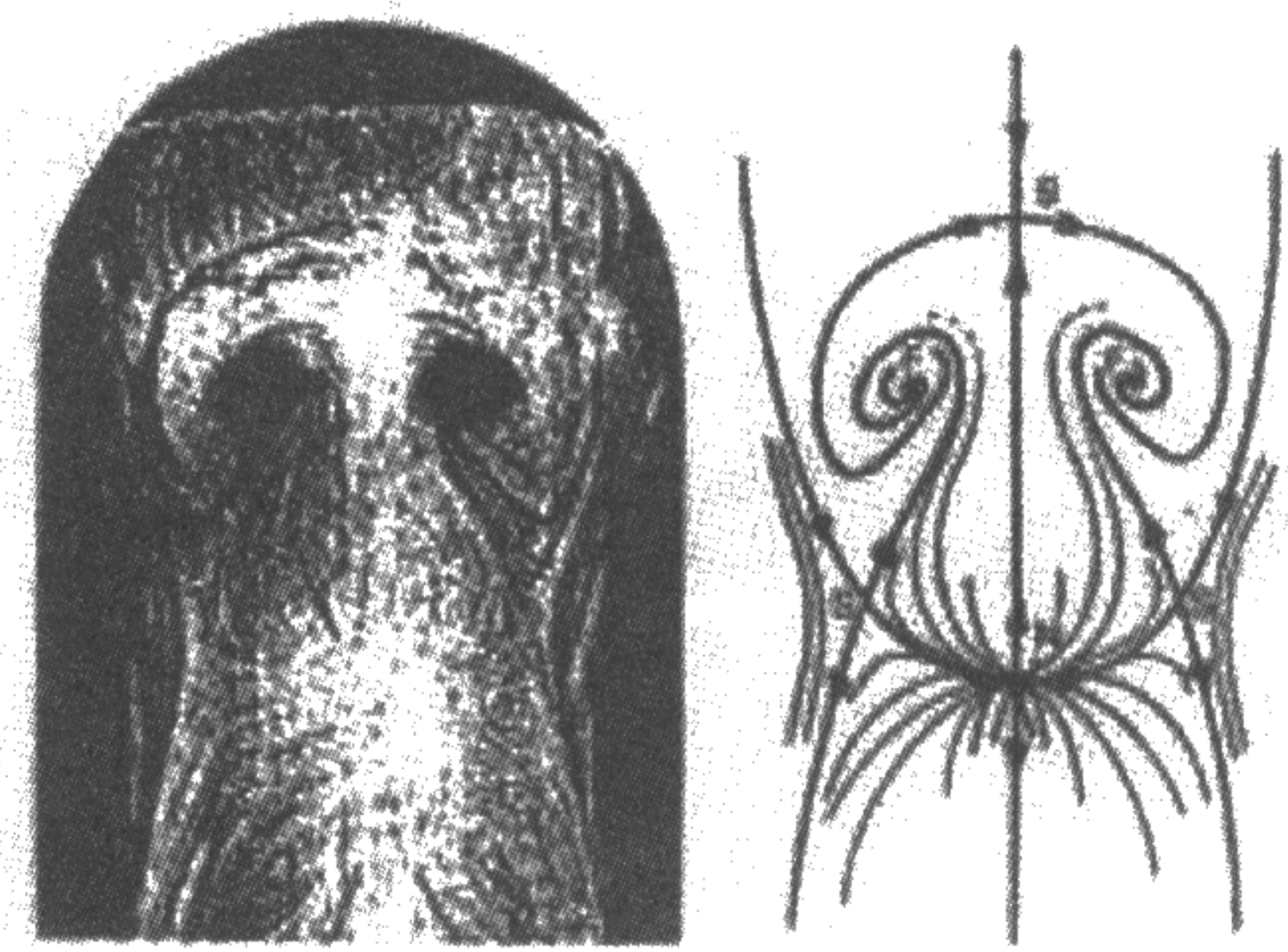
(b)



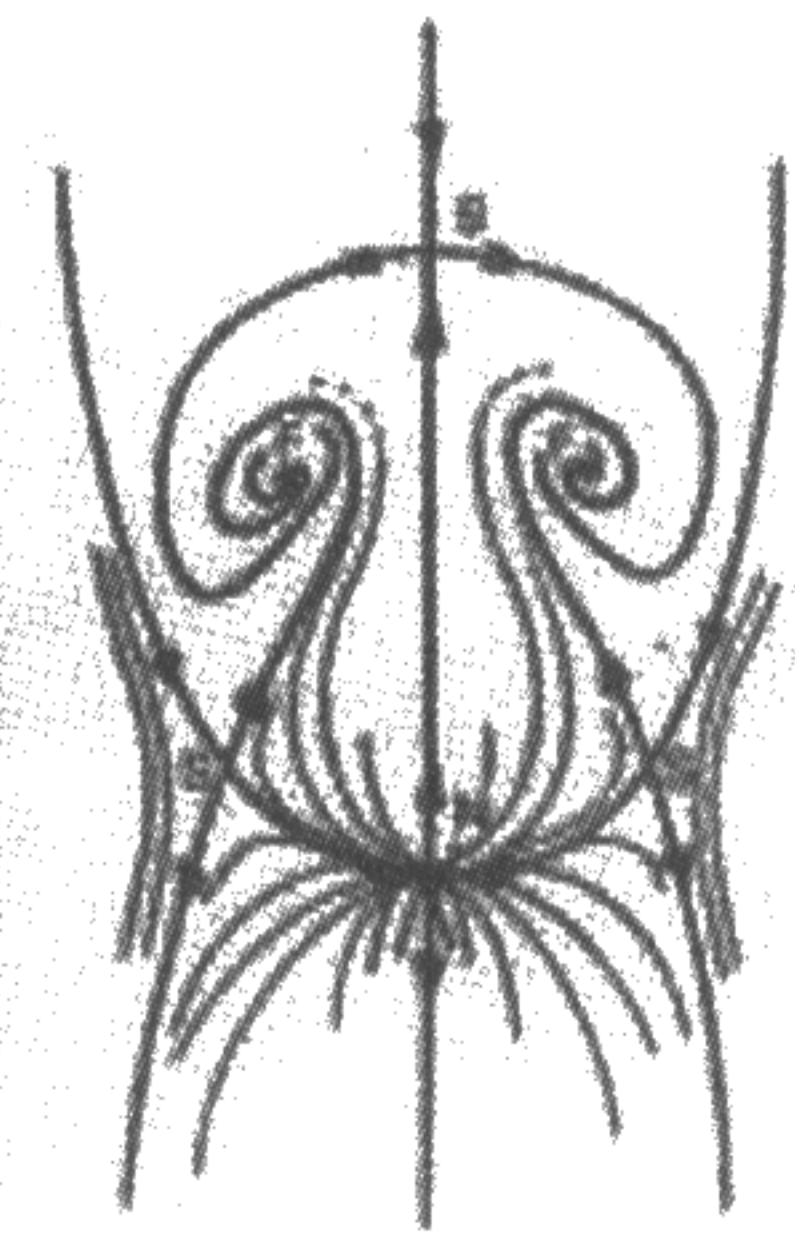
(c)

FIGURA 13. Líneas de superficie de vorticidad en planta, a) justo en el fondo de canal; b) a 0.005 m del fondo del canal; y c) a 0.0075 m del fondo del canal.

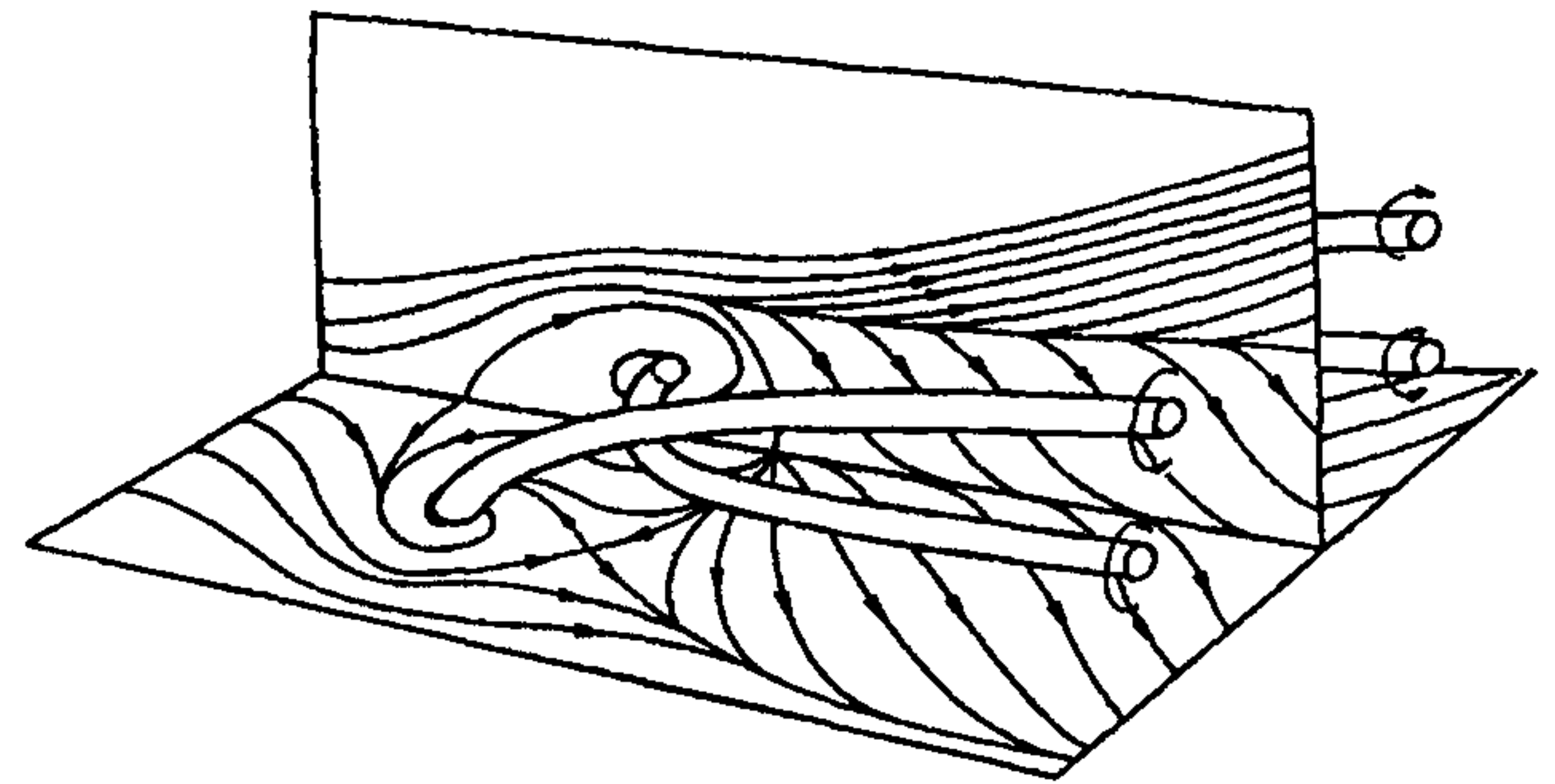
bigüedades. Por ejemplo, en la Fig. 14 se muestra la superficie de un patrón de tinta sobre el lado posterior de un cuerpo con forma de misil y con un ángulo de ataque, mediante la clasificación de los puntos críticos, el patrón topológicamente



(a)



(b)



(c)

FIGURA 14. a) Patrón de flujo superficial sobre el lado posterior de un cuerpo con forma de misil a cierto ángulo de ataque. b) Interpretación del patrón de flujo y c) bosquejo vorticial, utilizando la teoría de puntos críticos. Las imágenes de los vórtices bajo la superficie horizontal no se muestran. Perry y Chong [14].

correcto de la superficie de las líneas de corriente se pueden esquematizar como se presenta en la Fig. 14 hacia la derecha. El patrón de flujo consiste en un arreglo de nodos (N), sillas (S) y focos (F). Los puntos críticos son características salientes de un patrón de flujo; proporcionando una distribución de tales puntos y su tipo, mucho del campo de flujo prevaiente, su geometría y su topología se puede deducir, ya que existe un número limitado de formas en las que las líneas de corriente pueden ser unidas o ligadas. En la Fig. 14c, se muestra un posible bosquejo vorticoso de la Fig. 14b, este ha sido llamado *patrón cara de búho de segundo tipo*. Semejantes patrones y otros patrones tipo, de separación de flujo ya pueden ser sintetizados analíticamente.

Por comparación cualitativa con la Fig. 14, se hizo una inferencia con los resultados obtenidos en este trabajo puestos de manifiesto en las Figs. 15 y 16. Si se compara la Fig. 15 con la Fig. 14 y se toma en cuenta la clasificación de puntos críticos, se pueden identificar varias regiones de nodos, sillas y focos en la primera. A partir de lo anterior, y del trabajo desarrollado por Larousse *et al.* [3], se infiere un patrón vorticoso, el cual se muestra en la Fig. 16.

7. Conclusiones

Las estructuras turbulentas puestas de manifiesto a través de la inclusión de la ecuación del transporte de vorticidad en el

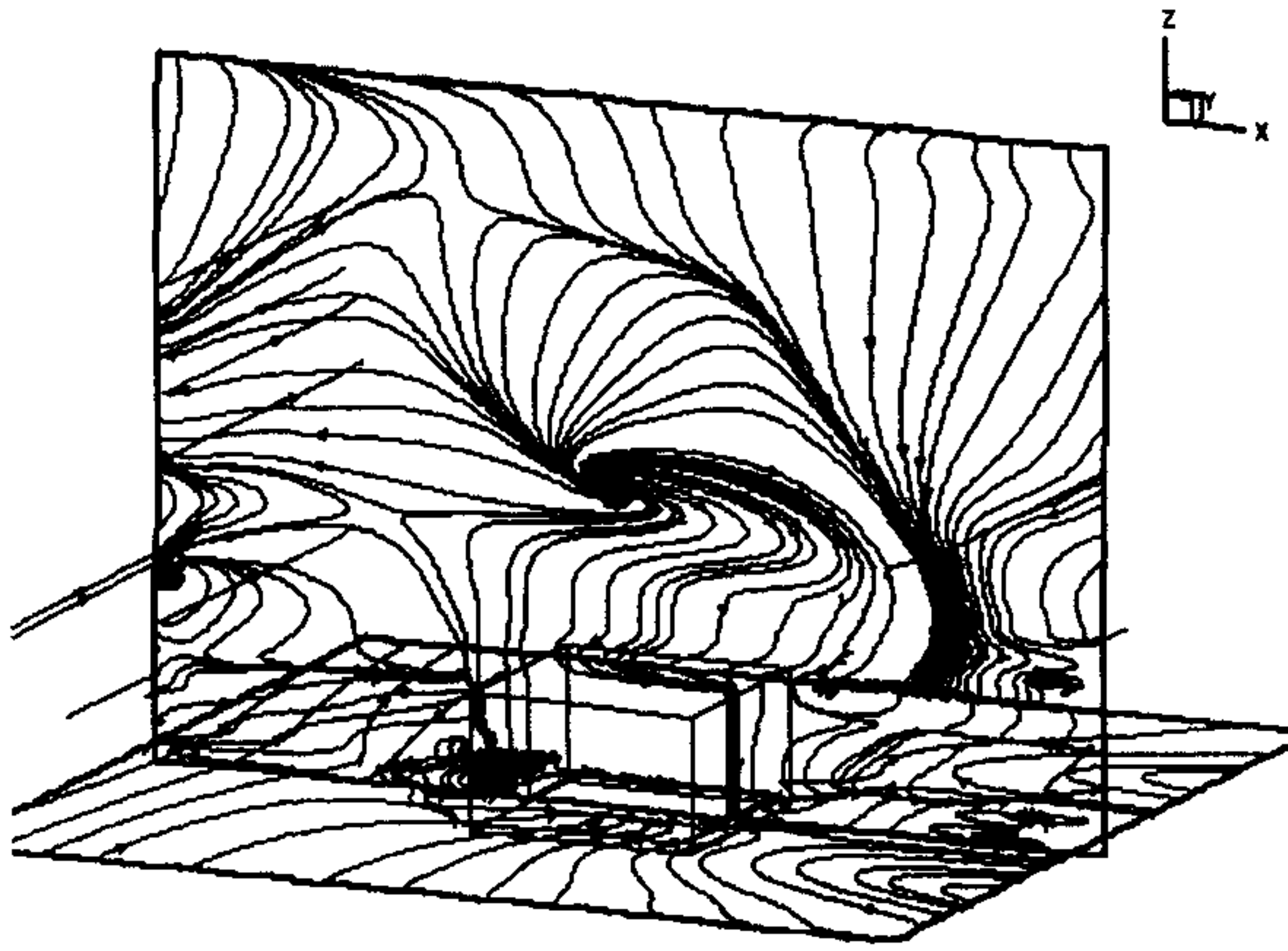


FIGURA 15. Planos $x-z$ y $x-y$ de líneas de volumen de vorticidad, al comparar ésta y las Figs. 13b y 13c, se puede deducir la posible estructura turbulenta presente en el flujo estudiado.

programa QUETZAL/3D, tienen amplia correspondencia con las del estudio de patrones de flujo hecho anteriormente [15], y con estudios experimentales. Los resultados son satisfactorios debido a que también hay correspondencia con la teoría del flujo secundario, no solamente respecto a las líneas vorticosas, sino también en cuanto a la aparición de corrientes secundarias celulares que corresponden a la formación de los vórtices opuestos que se forman a la salida del flujo. Se podría decir que este estudio reafirma los resultados obtenidos

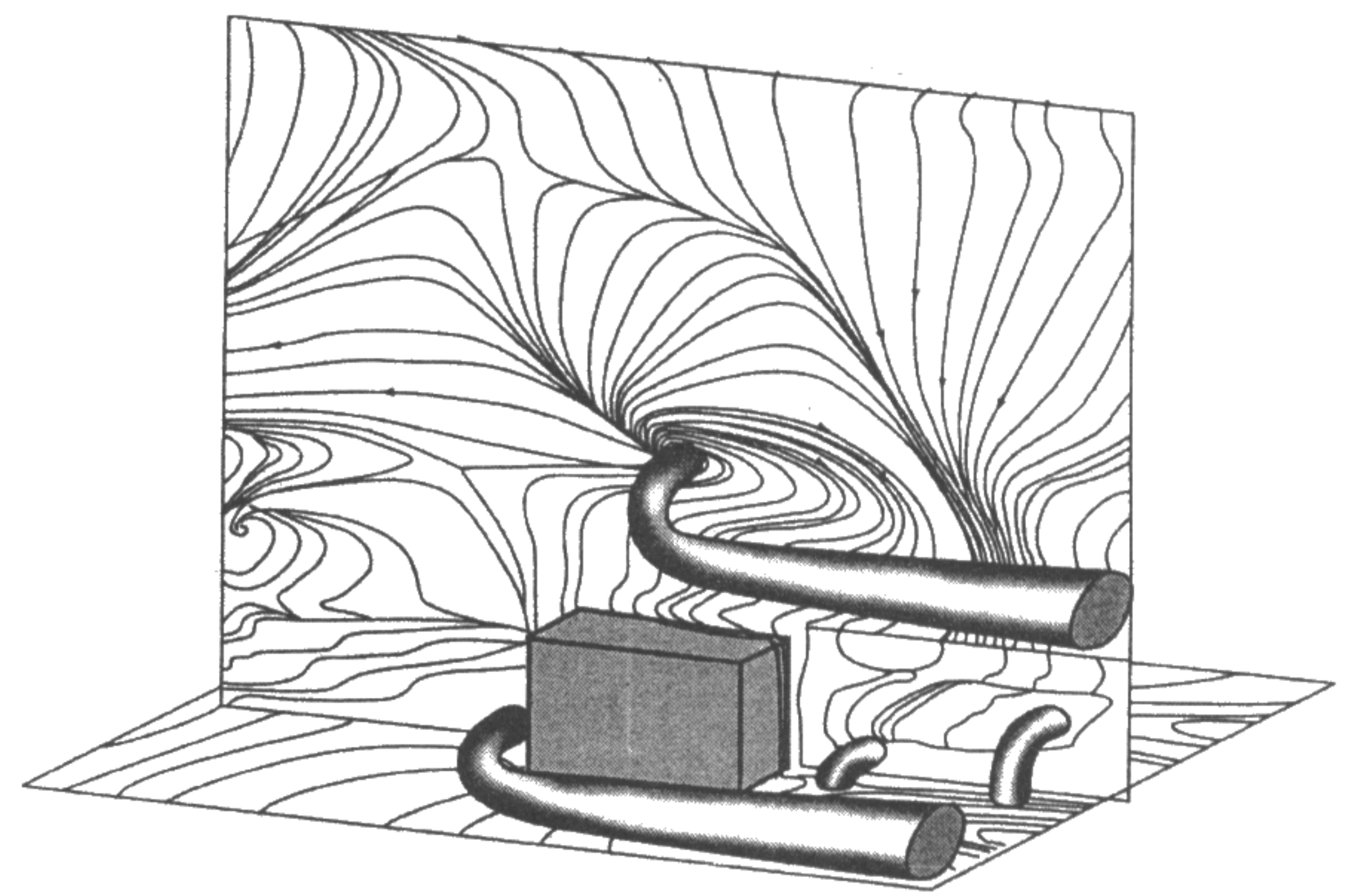


FIGURA 16. Esquemización del campo de flujo del presente estudio, y la inferencia de tubos de vorticidad.

por Larousse *et al.* (ver Fig. 2). Al incluir la ecuación de transporte de vorticidad se amplía la visualización no solamente física del problema, sino también conceptual del mismo, además contribuye al reducido acervo de estudios numéricos en tres dimensiones y servirá de base para proseguir estudios sobre la dinámica de partículas y formas de fondo. En las Figs. 7 a 11 puede corroborarse la analogía que existe entre estos resultados y los mostrados en las Figs. 1 y 2. Finalmente con este estudio es posible inferir las estructuras de vorticidad de acuerdo a la teoría de puntos críticos.

1. Kim *et al.*, *J. Fluid Mechanics* **177** (1987) 133.
2. W. Frank, "Experimental and Numerical Studies of Propagation Phenomena in Turbulent Flows around Buildings", *Transport Phenomena in Turbulent Flows*, edited by M. Hirata and N. Kasagi, (Hemisphere Publishing Corporation, USA, 1988).
3. A. Larousse, R. Martinuzzi, and C. Tropea, "Flow Around Surface-Mounted, Three-Dimensional Obstacles", *Turbulent shear Flows 8*, edited by F. Durst *et al.*, (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992).
4. J. Boussinesq, "courantes", *Mem. Pres. par div. Savants a l'Academie Sci.*, Paris, **23** (1877) 1.
5. W. Rodi, "Turbulence models and their application in hydraulics", Book Publication of International Association for Hydraulic Research. Delft, Netherlands (1984).
6. F.P. Sterns, *Trans. Of ASCE* **12** (1883) 331.
7. A.H. Gibson, *Proc., Royal Society of London, Series A* **82** (1909) 149.
8. V.A. Vanoni, *Adv. in Appl. Mech.* **15** (1975) 1.
9. I. Karcz, *J. Geophys. Research* **71** (1966) 3109.
10. R. Kinoshita, *An analysis of the movement of flood water by aerial photography; concerning characteristics of turbulence and surface flow. Photographic surveying*, 6:1-17 (1967).
11. Iehisa Nezu and Hiroji Nakagawa, *Turbulence in open channel flows*, edited by A.A. Balkema, (Rotterdam, Brookfield, 1993).
12. R. Franke and W. Rodi, "Calculation of vortex shedding past a square cylinder with various turbulence models", *Turbulent Shear flows 8*, edited by F. Durst *et al.*, (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1992).
13. M.S. Acarlar and C.R. Smith, *J. Fluid Mech.* **175** (1987) 1.
14. A.E. Perry and M.S. Chong, *Ann. Rev. Fluid Mechanics* **19** (1987) 125.
15. C. Millán y H. Ramírez, "Evaluación de la turbulencia en 3D de un flujo que se deforma alrededor de un obstáculo". En *Ingeniería Hidráulica en México* Vol. XVI, Oct.-Dic. (2001).