

# Resonancia principal generalizada en sistemas oscilatorios de segundo orden

E. Muñoz Aguirre

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Benemerita Universidad Autónoma de Puebla  
Centro de Física y Matemáticas, Universidad Tecnológica de la Mixteca  
Km 2.5, carretera a Acatlima, 69000 Huajuapán de León, Oaxaca, Mexico  
e-mail: emunoz@nuyoo.utm.mx

V.V. Alexandrov

Lomonosov de Moscu  
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Benemerita Universidad Autónoma de Puebla  
Rio Verde y Av. San Claudio s/n, San Manuel, 72570 Puebla, Pue., Mexico

Recibido el 20 de junio de 2000; aceptado el 26 de septiembre de 2000

En el presente artículo se estudia la resonancia principal generalizada para sistemas descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden y se demuestra con ayuda del principio del máximo de Pontriaguin, la coincidencia de ésta con la solución prolongada de un problema extremal para el mismo sistema. Además se verifican estos resultados en los casos particulares de resonancia general y resonancia paramétrica para la ecuación de Mathieu.

*Descriptor:* Resonancia; resonancia paramétrica; principio del máximo de Pontriaguin; ecuación de Mathieu

This paper will describe the generalized principal resonance of systems as described by the second order of ordinary differential equations and proved by the pontriaguin maximal principle to coincide with the lengthened solution of an external problem of the same system. The results are verified in special cases of general resonance and parametric resonance for the Mathieu equation.

*Keywords:* Resonance; parametric resonance; Pontriaguin maximal principle; Mathieu equation

PACS: 02.30.Hq; 02.30.Wd

## 1. Introducción

En el ámbito de la física general, son de mucha importancia los fenómenos de resonancia. Existen dos conceptos ampliamente estudiados, el de resonancia y el de resonancia paramétrica. Ambos están en función del crecimiento de la amplitud en la respuesta o solución; en el primero el crecimiento se debe a las mismas fuerzas internas del sistema físico, mientras que en el segundo se debe a fuerzas externas que actúan sobre dicho sistema [1, 2].

Además es conocido que el estudio de las oscilaciones pequeñas de un sistema dinámico descrito por ecuaciones diferenciales ordinarias es muy relevante en el plano de las aplicaciones. Por lo general se estudia la estabilidad de los puntos de reposo, pero también es de importancia cuando se estudia la inestabilidad —resonancia— por sus útiles y variados apoyos en la física y en la ingeniería. Algunos ejemplos de resonancia paramétrica pueden encontrarse en las Refs. 3 y 4.

Tomando en cuenta la trascendencia del científico Pontriaguin y la importancia del principio que lleva su nombre, en este escrito se estudia una aplicación del principio del máximo de Pontriaguin con el fin de resolver el problema sobre como encontrar la resonancia principal generalizada en un sistema apropiado. El concepto de resonancia principal generalizada surgió por vez primera a principios de la década de los noventa en un artículo de Alexandrova, esto se puede ver en la Ref. 5. Se considera a este término una generalización, puesto que en el presente trabajo se muestra como la

resonancia general y la paramétrica para el caso de la ecuación de Mathieu, son dos particularidades.

Sólo un comentario más: se recalca la importancia de este principio, así como la del genio que lo descubrió. Si se quiere conocer algunos detalles sobre la historia de este gran personaje, ver Ref. 6.

## 2. Planteamiento del problema

Nuestro objeto de estudio durante el transcurso del presente escrito es el siguiente sistema:

$$\ddot{x}_1 + 2\varepsilon\dot{x}_1 + v_1(t)x_1 = v_2(t), \quad 0 \leq \varepsilon < \sqrt{v_-}$$

$$v_1(\cdot), v_2(\cdot) \in V = \{v_1(\cdot), v_2(\cdot) \in \text{KC} | 0 < v_- \leq v_1(t) \leq v_+, |v_2(t)| \leq \nu, \nu = \text{cte.}\} \quad (1)$$

$$\text{KC} | 0 < v_- \leq v_1(t) \leq v_+, |v_2(t)| \leq \nu, \nu = \text{cte.}\}$$

La abreviatura KC significa funciones continuas a trozos;  $v_-$ ,  $v_+$  y  $\nu$  son constantes reales.

Como un ejemplo físico que es modelado por una ecuación similar a (1), se tiene el movimiento de un péndulo con longitud  $l$ , desplazamiento angular  $\theta$  muy pequeño cuyo soporte móvil tiene una aceleración externa predeterminada  $u(t)$  [7]. La ecuación que describe tal movimiento es

$$\ddot{\theta} + \left( \frac{g}{l} + \frac{\dot{u}}{l} \right) \theta = 0.$$

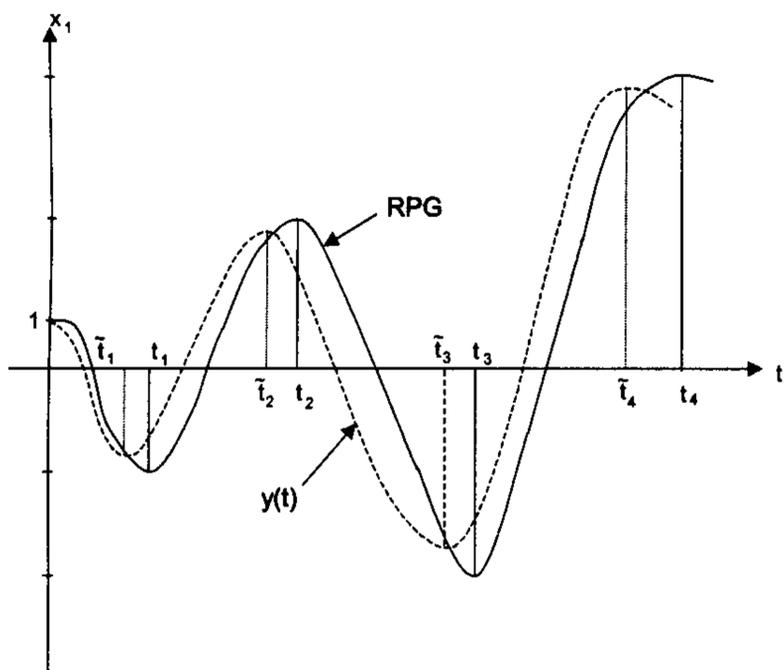


FIGURA 1. Comportamiento de la solución RPG para el sistema (1) respecto de cualquier otra solución  $y(t)$  para el mismo sistema.

En todo trabajo existen elementos primordiales, en el nuestro también los hay. Es así como a continuación escribimos dos definiciones inherentes al sistema (1).

**Definición 1.** Se dice que una solución del sistema (1) es **oscilatoria**, si cambia de signo una cantidad infinita de veces (numerable) para cualesquiera condiciones iniciales.

En nuestro tratado se eligió la condición  $\varepsilon < \sqrt{v_-}$  para garantizar que todas las soluciones sean oscilatorias, como efectivamente así sucede [8, 9].

**Definición 2.** Supongamos que se tiene el sistema (1) con las condiciones iniciales  $x_1(t_0) = 1$  y  $x_2(t_0) = \dot{x}_1(t_0) = 0$  (normalizadas en caso de ser necesario). La solución  $x_1(\cdot)$  de (1) es la **resonancia principal generalizada**, si las amplitudes de sus oscilaciones en los tiempos  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, \dots$ ; son mayores o iguales que las amplitudes de las oscilaciones de cualquier otra solución  $y(\cdot)$  del mismo sistema y mismas condiciones iniciales, en los tiempos correspondientes  $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{t}_3, \dots, \tilde{t}_n, \dots$ , cuando variamos  $v_1(\cdot)$  y  $v_2(\cdot)$  dentro del conjunto funcional  $V$  y  $\dot{x}_1(t_i) = \dot{y}_1(\tilde{t}_i) = 0$  (ver Fig. 1).

Es decir, si  $|x_1(t_i)| = \beta_i$ ,  $|y(\tilde{t}_i)| = \tilde{\beta}_i$  para  $y(\cdot)$  otra solución, entonces  $x_1(\cdot)$  es la resonancia principal generalizada si y sólo si  $\beta_i \geq \tilde{\beta}_i$ . La definición anterior la podemos encontrar en la Ref. 5.

El resultado principal de este artículo y del cual se hace un análisis para casos particulares, es el siguiente teorema.

**Teorema.** La resonancia principal generalizada del sistema bilineal (1) coincide con la solución prolongada del problema extremal

$$|x_1(t)| \longrightarrow \max_{v_1(\cdot), v_2(\cdot)}$$

en el intervalo  $[t_0, t_1]$  para el mismo sistema y las mismas condiciones iniciales.

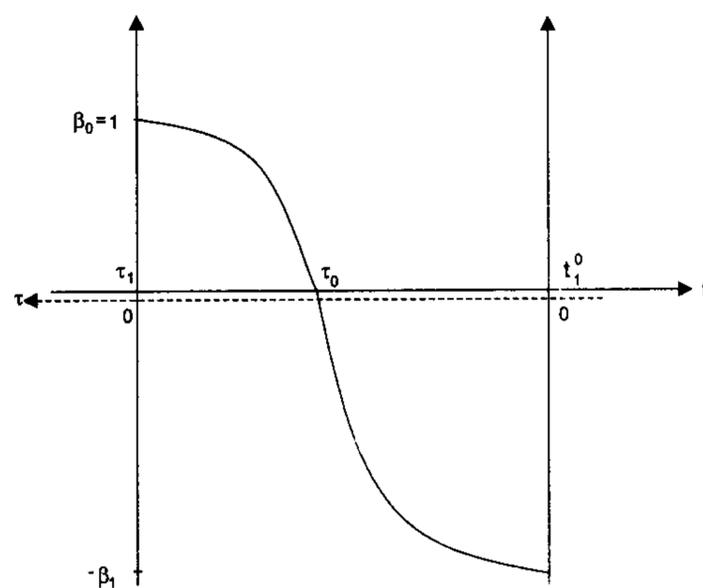


FIGURA 2. Esquema del planteamiento del problema con las condiciones iniciales  $x_1(0) = \beta_0 = 1$ ,  $\dot{x}_1(0) = 0$ . Además describe la evolución de la solución en el intervalo  $[0, t_1^0]$  del tiempo real  $t$  ó en el intervalo  $[0, \tau_1]$  del tiempo de "regreso"  $\tau$ .

### 3. Demostración del Teorema

La demostración del teorema la desarrollaremos en dos pasos, en el primero se demuestra la construcción y en el segundo probamos la coincidencia.

#### 3.1. Construcción

Por un traslado de los ejes coordenados, sin pérdida de generalidad cambiemos el intervalo  $[t_0, t_1]$  por el intervalo  $[0, t_1^0]$ . El objetivo en esta etapa es construir la resonancia principal generalizada para el sistema (1), lo que equivale a encontrar la solución oscilatoria que tenga amplitud máxima cuando variamos las perturbaciones  $v_1(\cdot)$  y  $v_2(\cdot)$  en el espacio  $V$ . Para efectuar lo explicado, se supone que se tienen las condiciones iniciales ya normalizadas  $x_1(0) = 1$ ,  $\dot{x}_1(0) = 0$ . Además, después de un tiempo  $t_1^0$  donde la derivada es cero nuevamente, ocurre que  $x_1(t_1^0) = -\beta_1$ , pero  $\dot{x}_1(t) \neq 0 \forall t \in (0, t_1^0)$  (ver la Fig. 2).

Con las condiciones estipuladas se plantea el problema de encontrar  $v_1$  y  $v_2$ , las cuales deben hacer a  $|x_1(t_1^0)|$  máximo. Esto conduce al siguiente problema extremal:

$$\beta_1 = |x_1(t_1^0)| \longrightarrow \max_{v_1(\cdot), v_2(\cdot)}$$

Como  $x_1(t_1^0)$  es negativo, se debe optimizar:

$$x_1(t_1^0) \longrightarrow \min_{v_1(\cdot), v_2(\cdot)} \quad (2)$$

en el intervalo  $[0, t_1^0]$ .

La solución a tal problema existe, según lo demuestra Filippov en la Ref. 10.

### 3.1.1. Solución al problema extremal, $\varepsilon = 0$

Con ayuda del principio del máximo de Pontriaguin (ver apéndice), el problema extremal (2) se transforma en el problema de contorno

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & x_1(t_1^0) &= -\beta_1, & x_1(0) &= 1, \\ \dot{x}_2 &= v_2^0(t) - 2\varepsilon x_2 - v_1^0(t)x_1, & x_2(t_1^0) &= 0, & x_2(0) &= 0, \\ \dot{\psi}_1 &= v_1^0 - \psi_2, & \psi_1(t_1^0) &= 0, \\ \dot{\psi}_2 &= -\psi_1 + 2\varepsilon\psi_2, & \psi_2(t_1^0) &= -1, \end{aligned} \quad (3)$$

en donde  $\psi_1$  y  $\psi_2$  son las soluciones al sistema conjugado,  $v_1^0$  y  $v_2^0$  son las perturbaciones optimales (ver apéndice); las cuales se describen a continuación.

$$v_1^0 = \begin{cases} v_+ & \text{si } \psi_2 x_1 \leq 0 \\ v_- & \text{si } \psi_2 x_1 > 0, \end{cases}$$

y

$$v_2^0 = \begin{cases} \nu & \text{si } \psi_2 x_1 > 0 \\ -\nu & \text{si } \psi_2 x_1 \leq 0. \end{cases}$$

En el sistema (3) se desconocen  $t_1^0$  y  $\beta_1$ , con lo cual es imposible resolverlo. Así que hacemos una transformación de coordenadas a un tiempo llamado de "regreso" (ver Fig. 2)  $\tau = t_1^0 - t$  y sustituyendo las perturbaciones optimales en los intervalos adecuados, (3) se transforma en el problema de Cauchy más fácilmente tratable:

$$\begin{aligned} x_1'' - 2\varepsilon x_1' + v_1^0(t)x_1 &= v_2^0; \\ x_1(0) &= -\beta_1, & x_1'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

donde ( $'$ ) significa derivada con respecto a  $\tau$ . Para esta situación y de acuerdo al comportamiento de  $\psi_2$  y el que se requiere para  $x_1$ , por el principio del máximo de Pontriaguin se encontró que  $v_1^0$  y  $v_2^0$  son

$$v_1^0 = \begin{cases} v_-, & \tau \in [0, \tau_0] \\ v_+, & \tau \in [\tau_0, \tau_1] \end{cases}$$

y

$$v_2^0 = -\nu, \quad \tau \in [0, t_1].$$

Si  $\varepsilon = 0$ , la Ec. (4) es más sencilla algebraicamente, y físicamente modela un sistema de menor complejidad. Con esta restricción y realizando algunas operaciones algebraicas elementales se encontraron las siguientes fórmulas para  $\tau_0$  y  $\tau_1$  en el tiempo de regreso  $\tau$ :

$$\tau_0 = \frac{1}{\sqrt{v_-}} \arccos \frac{\nu}{\nu - \beta_1 v_-}, \quad \text{con } \nu - \beta_1 v_- \neq 0, \quad (5)$$

$$\tau_1 = \frac{1}{\sqrt{v_+}} \arcsin \frac{\sqrt{\beta_1^2 v_- v_+ - 2\beta_1 v_+ \nu}}{\sqrt{\beta_1^2 v_- v_+ - 2\beta_1 v_+ \nu + \nu^2}} + \tau_0. \quad (6)$$

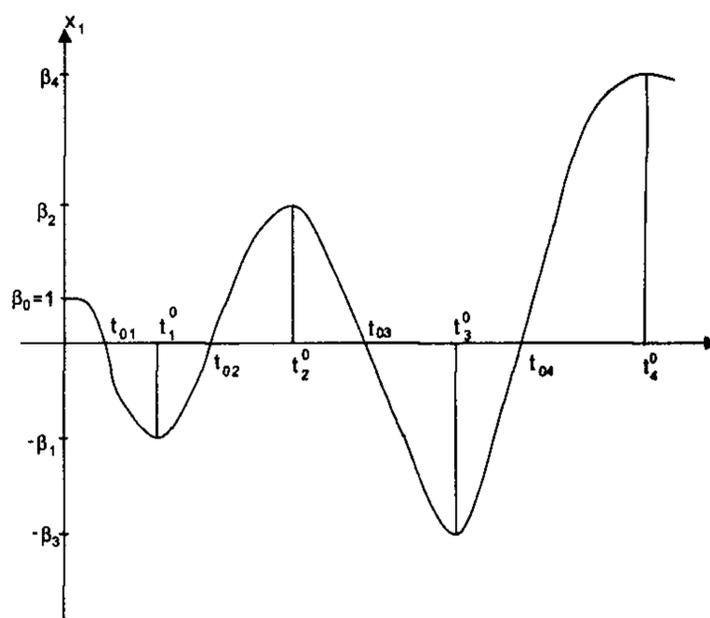


FIGURA 3. Comportamiento de la solución con sus respectivas amplitudes en cada tiempo  $t_n^0$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Utilizando los tiempos anteriores y tomando en cuenta que  $x_1(\tau_1) = 1$  (Fig. 2), se llega a la ecuación cuadrática:

$$\beta_1^2 v_- v_+ - 2\beta_1 v_+ \nu + \nu^2 = (\nu + v_+)^2, \quad (7)$$

al resolver (7) tenemos finalmente la expresión para  $\beta_1$ :

$$\beta_1 = \frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + 2\nu v_- + v_- v_+}}{v_-}. \quad (8)$$

Para el problema original se tiene que  $t_1^0 = |\tau_1|$ , como se puede apreciar en la Fig. 2.

Analizando (8) se concluye que el valor de  $\beta_1 > 1$ , lo que garantiza el objetivo deseado, la amplitud es mayor que en un tiempo inmediato anterior y además es máxima.

Con la misma restricción ( $\varepsilon = 0$ ), y realizando la transformación

$$\tilde{x}_1(t) = (-1)^{n-1} \frac{x_1(t)}{\beta_{n-1}}, \quad \beta_0 = 1, \quad n = 2, 3, 4, \dots,$$

en donde  $\beta_n$  es la amplitud (en valor absoluto) en el tiempo  $t_n^0$  y  $x(t_{0n}) = 0$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , por un proceso análogo se obtienen en el tiempo  $\tau$ , los tiempos y las amplitudes en fórmulas recurrentes:

$$\tau_{0n} = \frac{1}{\sqrt{v_-}} \arccos \frac{\nu}{\nu - \beta_n v_-}, \quad \tau_{01} = \tau_0, \quad t_{01} = |\tau_1|,$$

$$\tau_{1n} = \frac{1}{\sqrt{v_+}} \arcsin \frac{\sqrt{(\beta_n^2 v_- - 2\beta_n \nu) v_+}}{\sqrt{(\beta_n^2 v_- - 2\beta_n \nu) v_+ + \nu^2}} + \tau_{0n},$$

$$t_n^0 = t_{n-1}^0 + |\tau_{1n}|, \quad n = 2, 3, 4, \dots,$$

y

$$\beta_n = \frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + 2\beta_{n-1} \nu v_- + \beta_{n-1}^2 v_- v_+}}{v_-},$$

$$\beta_0 = 1.$$

Lo anterior lo esquematizamos en la Fig. 3.

Con lo explicado termina la demostración en su etapa de construcción para el caso  $\varepsilon = 0$ , a continuación se resuelve el mismo problema pero con  $\varepsilon \neq 0$ .

### 3.1.2. Solución del problema extremal, $\varepsilon \neq 0$

Si  $\varepsilon \neq 0$ , el proceso de la construcción es análogo al ya descrito, aunque los cálculos para los tiempos  $\tau_0, \tau_1$  y la amplitud  $\beta_1$  se complican.

Resolviendo la Ec. (4) se tiene una expresión para  $x_1(\tau_0)$ , ésta se iguala a cero para obtener la ecuación trascendental con incógnita  $\tau_0$ :

$$\cos(\omega_- \tau_0) - \frac{\varepsilon}{\omega_-} \sin(\omega_- \tau_0) - \frac{\nu e^{-\varepsilon \tau_0}}{\nu - \beta_1 v_-} = 0. \quad (9)$$

Se sabe que una ecuación trascendental no se puede resolver por métodos directos para la incógnita, y no podemos obtener una solución concreta; es por esto que su solución se encuentra en forma aproximada utilizando la condición de que  $\varepsilon \ll 1$ , lo que describimos a continuación.

La Ec. (9) es equivalente a

$$\cos(\omega_- \tau_0 + \arctan \frac{\varepsilon}{\omega_-}) = \frac{\nu e^{-\varepsilon \tau_0}}{\nu - \beta_1 v_-}. \quad (10)$$

Como el problema es despejar  $\tau_0$  y además se necesita que este valor sea el primer tiempo positivo en el cual  $x_1(\tau)$  es cero, aplicamos la función inversa del coseno en (10), resultando

$$\omega_- \tau_0 + \arctan \frac{\varepsilon}{\omega_-} - \arccos\left(\frac{\nu e^{-\varepsilon \tau_0}}{\nu - \beta_1 v_-}\right) = 0. \quad (11)$$

Aproximando linealmente el miembro izquierdo de la igualdad (11) en términos de  $\varepsilon$  y con  $\tau_0$  fijo, utilizando la función  $g(\varepsilon)$  enmarcada por el miembro izquierdo de (11) y desarrollando la fórmula de Taylor para ésta aprovechando que  $\varepsilon \ll 1$ , despejamos el valor de  $\tau_0$ :

$$\tau_0 \approx \frac{\sqrt{\beta_1^2 v_-^2 - 2\beta_1 \nu v_-}}{\sqrt{\beta_1^2 v_-^3 - 2\beta_1 \nu v_-^2 - \varepsilon \nu}} \times \left( \arccos \frac{\nu}{\nu - \beta_1 v_-} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{v_-}} \right). \quad (12)$$

Se observa que si en la expresión (12) sustituimos  $\varepsilon = 0$ ,  $\tau_0$  coincide con el encontrado en la demostración anterior.

Utilizando (12) calculamos la expresión para  $\tau_1$ , se efectúan algunos cálculos algebraicos elementales y denotando  $\alpha = [e^{\varepsilon \tau_0} (\nu - \beta_1 v_-)] / [\omega_- \sin(\omega_- \tau_0)]$ , se tiene

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{\omega_+} \arcsin \left( \frac{\omega_+ \alpha}{\sqrt{\nu^2 + 2\varepsilon \nu \alpha + v_+ \alpha^2}} \right) + \tau_0 \\ &= \tau_1^0 + \tau_0, \end{aligned}$$

con

$$\tau_1^0 = \frac{1}{\omega_+} \arcsin \left( \frac{\omega_+ \alpha}{\sqrt{\nu^2 + 2\varepsilon \nu \alpha + v_+ \alpha^2}} \right).$$

Si sustituimos  $\varepsilon = 0$  en ésta última expresión, también  $\tau_1$  se reduce al encontrado con anterioridad.

Utilizando el hecho de que  $x_1(\tau_1) = 1$  por el mismo planteamiento del problema, para  $\beta_1$  llegamos a la ecuación trascendental:

$$\frac{\nu e^{\varepsilon \tau_1^0}}{v_+} \cos(\omega_+ \tau_1^0) - \frac{(v_+ \alpha + \varepsilon \nu) e^{\varepsilon \tau_1^0}}{v_+ \omega_+} \sin(\omega_+ \tau_1^0) - \frac{\nu}{v_+} - 1 = 0. \quad (13)$$

La Ec. (13) contiene a  $\beta_1$ , puesto que  $\alpha$  y  $\tau_1^0$  la contienen.

Tomemos la función de dos variables

$$\begin{aligned} F(\varepsilon, \beta_1) &= e^{\varepsilon \tau_1^0} v_+ \cos(\omega_+ \tau_1^0) \\ &\quad - \frac{(v_+ \alpha + \varepsilon \nu) e^{\varepsilon \tau_1^0}}{v_+ \omega_+} \sin(\omega_+ \tau_1^0) - \frac{\nu}{v_+} - 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Calculando las derivadas parciales de  $\alpha$  y  $\tau_1^0$  con respecto a  $\beta_1$  y sustituyéndolas en la respectiva derivada parcial de  $F$ , además de hacer  $\beta_1 = \beta_1^0$  cuando  $\varepsilon = 0$ , se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(0, \beta_1^0)}{\partial \beta_1} &= \frac{(\beta_1^0 v_- - \nu) [3\nu^2 + \beta_1^0 v_+ (\beta_1^0 v_- - 2\nu)]}{[(\beta_1^0)^2 v_- v_+ - 2\beta_1^0 \nu v_+ + \nu^2]^{3/2}} \\ &\neq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

La desigualdad en (14) es cierta, puesto que se cumple  $\nu - \beta_1 v_- \neq 0$  para  $\varepsilon = 0$  como se observa en (5); y si el segundo factor del denominador en el segundo miembro de (14) fuera nulo, contradiría a (7) para cuando  $\varepsilon = 0$ .

Así, por el teorema de la función implícita [11],

$$\beta_1 = h(\varepsilon)$$

y como  $\partial F(\varepsilon, \beta_1) / \partial \varepsilon$  es continua en un entorno del punto  $(0, \beta_1^0)$ , por estar compuesta de sumas, restas, productos y cocientes de funciones continuas, por el mismo teorema de la función implícita se tiene finalmente

$$\beta_1 \approx \frac{1}{v_-} (\nu + \sqrt{\nu^2 + \nu v_- + v_+ v_-}) - \frac{F_\varepsilon(0, \beta_1^0)}{F_{\beta_1}(0, \beta_1^0)} \varepsilon.$$

Con lo anteriormente descrito terminamos la construcción de la solución al problema extremal, además en el desarrollo de los cálculos cuando obtenemos los tiempos y las amplitudes, conjuntamente se va construyendo la solución  $x_1(\cdot)$  del problema extremal.

### 3.2. Coincidencia

Veamos ahora la coincidencia entre la solución al problema extremal  $x_1(\cdot)$  construida en la Sec. 3.1 y la resonancia principal generalizada. Sea  $y_1(t)$  la resonancia principal generalizada para el sistema (1) con las mismas condiciones iniciales, pero supongamos que ésta no coincide con la solución encontrada. Esto es; se cumple que  $|x_1(t_i)| < |y_1(\tilde{t}_i)|$ , para al menos un  $i$ . El tiempo  $i = 1$  no puede suceder, pues se contradirían el planteamiento del problema extremal y la

definición. Luego  $|y_1(\tilde{t}_1)| = \tilde{\beta}_1 = |x_1(t_1)| = \beta_1$ . Sin pérdida de generalidad se puede suponer  $i = 2$ , esto es;  $\beta_2 = |x_1(t_2)| < |y_1(\tilde{t}_2)| = \tilde{\beta}_2$ , entonces se puede plantear para el intervalo  $[t_1^0, t_2^0]$ , el problema extremal

$$|x_1(t_2^0)| \rightarrow \max_{v_1(\cdot), v_2(\cdot)},$$

y el problema extremal para  $y_1$

$$|y_1(\tilde{t}_2^0)| \rightarrow \max_{v_1(\cdot), v_2(\cdot)}.$$

De acuerdo a 3.1, la solución a estos problemas extremales darán

$$\beta_2 = \frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + 2\beta_1\nu v_- + \beta_1^2 v_- v_+}}{v_-}$$

y

$$\tilde{\beta}_2 = \frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + 2\tilde{\beta}_1\nu v_- + \tilde{\beta}_1^2 v_- v_+}}{v_-}. \quad (16)$$

Como  $\tilde{\beta}_1 = \beta_1$  claramente se tendrá  $\tilde{\beta}_2 = \beta_2$ , contradiciendo la suposición de que  $\beta_2 < \tilde{\beta}_2$ . Luego  $x_1(t)$  coincide con  $y_1(t)$  en los puntos extremos de los intervalos. Entonces por el teorema de existencia y unicidad para soluciones de ecuaciones diferenciales, ambas soluciones coinciden en el intervalo.

Hasta aquí se tiene la demostración del teorema. A continuación se describen las particularidades del mismo.

## 4. Casos particulares

### 4.1. Resonancia general

Los resultados que se obtuvieron coinciden con algunos clásicos tales como la resonancia general, en el sentido de que la sucesión de amplitudes para la solución, crece como una sucesión aritmética y la diferencia entre dos tiempos contiguos cuando  $t$  tiende a infinito, tiende a un periodo igual a  $\pi/\sqrt{\nu}$ . Además se tiene que el quasi-periodo de la solución  $x_1(t)$  es igual al quasi-periodo de la perturbación  $v_2^0$ . (Ver la Fig. 4).

Si se sustituye a  $v_1(t) = \text{cte.} = \nu$  en la fórmula para  $\beta_n$  encontrada en 3.1.1, se tiene las amplitudes:

$$\beta_n = \frac{2\nu}{v}n + \beta_0, \quad \text{con } \beta_0 = 1$$

que efectivamente forman una sucesión aritmética.

### 4.2. Resonancia paramétrica

De forma análoga como el caso anterior, se encontró para la resonancia paramétrica una sucesión de las amplitudes como una sucesión geométrica

$$\beta_n = \beta_{n-1} \sqrt{\frac{v_+}{v_-}} = \left(\sqrt{\frac{v_+}{v_-}}\right)^n \beta_0; \quad \text{con } \beta_0 = 1.$$

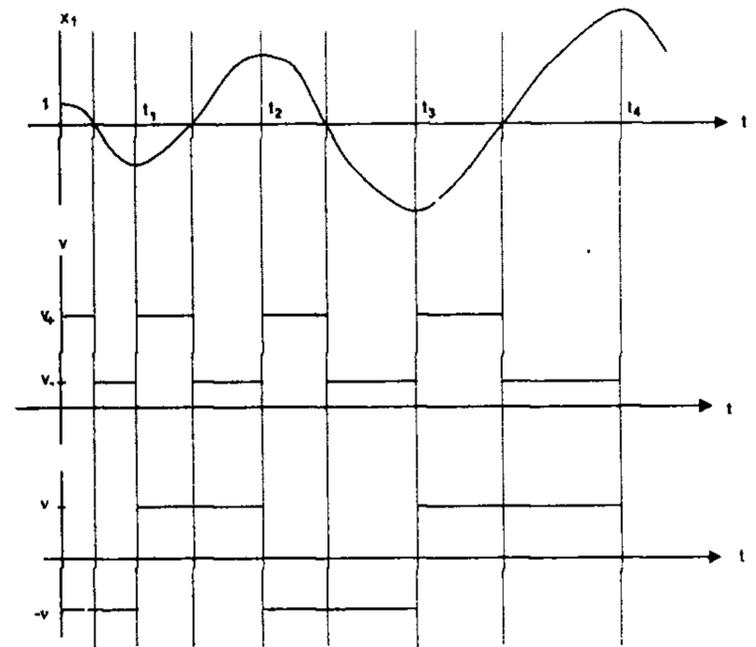


FIGURA 4. Relación de quasi-periodos entre la solución  $x_1(t)$  (primera gráfica) con las perturbaciones óptimas  $v_1^0(t)$  (segunda gráfica) y  $v_2^0(t)$  (tercera gráfica). El orden de las gráficas es descendente.

Esta última igualdad coincide con la obtenida por Mathieu para la ecuación que lleva su nombre. Otra similitud con la mencionada ecuación es que el quasi-periodo de la perturbación  $v_1^0$  y el quasi-periodo de la solución  $x_1(\cdot)$  del sistema, están en relación dos a uno [4], como lo muestra la Fig. 4.

Para encontrar las amplitudes en la resonancia paramétrica se sustituyeron las condiciones  $\varepsilon = 0$ ,  $v_2(t) \equiv 0$  y  $v_1(t) \neq 0$  en la misma fórmula mencionada para la resonancia general.

## Apéndice

### Procesos controlables óptimos

Se supondrá a las ecuaciones que describen el movimiento de un objeto controlable como las siguientes:

$$\dot{y} = f(y, u)$$

donde  $y$  es un vector columna  $n$ -dimensional de coordenadas que describe el movimiento del objeto;  $u$  es un vector  $s$ -dimensional de control,  $f(y, u)$  es una función vectorial dos veces continuamente diferenciable respecto de sus coordenadas. Los controles  $u_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) pueden tener distinta naturaleza física. Se considerará que estos controles pueden ser cualesquiera funciones vectoriales continuas a trozos, éstas en cada instante de tiempo toman sus valores en un conjunto convexo y cerrado  $\Omega$ , del espacio real  $s$ -dimensional

$$u(\cdot) \in U = \{u : u(t) \in \Omega \subset E_s\}.$$

Supongamos que está dado el trío  $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot), t_1^0\}$ , donde  $y^0(t)$  es el movimiento deseado y  $u^0(t)$  es el control que produce este movimiento. Al trío mencionado le llamaremos **proceso controlable óptimo**.

Muchas veces el movimiento deseado del objeto no se describe en forma explícita, sino que consiste en la solución de un problema extremal. Veamos como plantear el problema.

Sea una variedad suave  $M$  en el espacio de coordenadas  $y_1, \dots, y_n$ . El tiempo  $t_1 - t_0$  se define como el tiempo necesario para arribar a esta variedad. Supongamos que existen controles  $u(t) \in \Omega_0 \subseteq \Omega$ , que llevan al objeto hasta la variedad  $M$  y que existe entre ellos un control optimal  $u_0(t)$  que minimiza el correspondiente criterio de calidad del movimiento  $\varphi_0 = u(t)$ :

$$\varphi_0[y^0(t_1)] \longrightarrow \min_{u \in U_0} \text{ donde } U_0 = \{u : u(t) \in \Omega_0\}.$$

La manera mas apropiada para resolver este problema es el:

**Teorema** (principio del máximo de L.S. Pontriaguin)

Sea  $\{y^0(\cdot); u^0(\cdot); t_1^0\}$  un proceso controlable optimal. Entonces existe un par  $\{\psi(\cdot), \lambda_0\}$  no nulos simultáneamente ( $\lambda_0 = 0 \Rightarrow \psi(t) \neq 0$ ) tales que:

1)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t) &= H[\psi(t), y^0(t), u^0(t)] \\ &= \max_{u \in U_0} H[\psi(t), y^0(t), u] \end{aligned}$$

para los valores de  $t \in [t_0, t_1^0]$ , donde  $u^0(t-0) = u^0(t+0)$ .

2)  $\psi(t)$  es solución del sistema conjugado y satisface la condición de que el vector:

$$\psi(t_1^0) + \left\{ \lambda_0 \frac{\partial \varphi_0(y^0(t_1^0))}{\partial y} \right\}^T$$

es ortogonal a la variedad  $M$  en el punto  $y^0(t_1^0)$ .

3)  $\mathcal{H}(t) \equiv 0 \forall t \in (t_0, t_1^0)$ .

En el teorema,  $\psi(t)$  es solución del sistema conjugado:

$$\dot{\psi} = - \left[ \frac{\partial f(y_0(t), u_1^0(t))}{\partial y} \right]^T \psi$$

y  $H$  es la función de Pontriaguin, la cual se obtiene de la forma:

$$H = \psi^T \cdot f(y, u), u \in \Omega_0.$$

A  $\mathcal{H}$  se le llama Hamiltoniano.

El contenido del apéndice y algunos temas relacionados se pueden encontrar en las Refs. 12–15.

- 
1. R.R. Mohler, *Non-linear Systems, Applications to Bilinear Control*, Vol. II. (Prentice Hall, Oregon State University, 1991).
  2. A.N. Tikhonov, A.H. Vasieleva, and Sueshinikov, *Differential Equations*, (Publisher Navea, Moscú, 1982).
  3. Ali H. Nagafen and Dean T. Mook, *Non-Linear Oscillations*, (Wiley-Intercience Publication, New York, 1979).
  4. Hagerdon, *Non-Linear Oscillations*, (Clarendon Press, Oxford, 1981).
  5. Q.V. Alexandrova, *Boull. Univ. Mos. N2* (1991).
  6. P.S. Alexandrov, V.F. Boltiansky, R.V. Gamkrelidze y E.F. Mishchenko, *Rev. Mat.*, segunda serie, **n10** (1971) 67.
  7. C.J. Harris and J.F. Miles, *Stability of Linear Systems: Some Aspects of Kinematic Similarity*, (Academic Press, New York, 1980).
  8. V.V. Alexandrov, Corton R. Hing, and M. Betancourt Mariño, *Inv. Op. N2* (1977) 21.
  9. V.V. Alexandrov and V.N. Zhermolenco, *Viestnik MGU N5* (1972) 102.
  10. A.F. Fillipov, *Boull. Univ. Mos. N2* (1962).
  11. L.D. Kudriavsev, *Curso de Análisis Matemático*, Tomo 2, (Mir, Moscú, 1988).
  12. V.V. Alexandrov, J.A. Gómez Fernández y A. Castro Figueroa, *Modelación Matemática de los Sistemas Dinámicos Controlables*, (Pueblo y Educación, La Habana, 1970).
  13. C. Imaz, *Teoría de Control*, (Notas). Cinvestav Mexico, 1962.
  14. Lee-Marcus, *Foundations of Optimal Control Theory*. The SIAM. Series in Applied Mathematics, (Wiley, New York, 1967).
  15. L.S. Pontryaguin, V.G. Boltiansky, R.V. Gamkrelidze, and E.F. Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, (John Wiley and Sons, Inc., New York, 1962).