

# Análisis de la birrefringencia de forma en una rejilla mediante la teoría modal

G. Martínez-Ponce y Cristina Solano

Centro de Investigaciones en Óptica A.C.

Loma del Bosque 115, Lomas del Campestre, 37150 León, Guanajuato, Mexico

Recibido el 3 de mayo de 2000; aceptado el 21 de julio de 2000

En este trabajo se analiza la propagación de una onda electromagnética plana a través de una rejilla utilizando la teoría modal. Estableciendo el problema de valor característico se determina que la solución es dependiente de la razón longitud de onda de iluminación ( $\lambda$ ) y el periodo de la rejilla ( $d$ ). En el caso  $\lambda/d \gg 1$ , conocido como el límite cuasiestático, la rejilla se comporta como una película uniaxial, obteniéndose los índices ordinario y extraordinario a partir de una aproximación a la ecuación característica. Este fenómeno, llamado birrefringencia de forma, puede emplearse para diseñar elementos birrefringentes.

*Descriptores:* Difracción; birrefringencia de forma; rejilla sub-longitud de onda

The propagation of a plane electromagnetic wave through a grating using the modal theory is analyzed. The eigenproblem is solved in function of the ratio illumination wavelength ( $\lambda$ ) to grating period ( $d$ ). When this ratio is much greater than one (quasi-static limit), the grating shows a response similar to an uniaxial film. It is possible to approximate the eigenfunction for calculating the effective refractive indices of the birefringent element. This effect is called form birefringence and can be used to design retardation plates.

*Keywords:* Diffraction; birefringence; sub-wavelength grating

PACS: 42.79.Ci; 42.79.Dj; 42.79.Gn

## 1. Introducción

La propagación de las ondas electromagnéticas a través de medios estratificados da por resultado lo que conocemos por difracción. La difracción modifica los parámetros de la luz incidente en el medio dispersor tales como amplitud, fase y polarización. Para una rejilla estos cambios estarán en función de la geometría que presente la misma, esto es, del factor de forma, de la profundidad de relieve, de la periodicidad, etc. No es fácil apreciar todas las modificaciones en las características de las ondas electromagnéticas por reflexión o transmisión, sobre todo cuando las dimensiones de la rejilla son mayores a la longitud de onda de iluminación. Uno de los procedimientos que se realizan para estudiar el efecto del medio difractor sobre la perturbación luminosa es el de reducir algunas de sus características geométricas.

Supongamos que una onda plana con longitud de onda  $\lambda$  incide en una rejilla de tipo laminar con periodo  $d$  y cuyo vector de propagación hace un ángulo  $\theta_i$  con respecto a la normal de la interfase. Al atravesar la rejilla se generarán varios órdenes de difracción, los cuales tendrán una distribución dada por la ecuación de la rejilla [1],

$$d(\sin \theta_m - \sin \theta_i) = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1)$$

donde  $\theta_m$  es el ángulo que forma el vector de propagación del orden  $m$ -ésimo difractado con respecto a la normal de la interfase. Cuando  $m\lambda/d > 1$  se da un caso especial de difracción, esto debido a que se producen ondas evanescentes, las cuales viajan perpendicularmente a la dirección de propagación del orden central ( $m = 0$ ) y se atenúan a una distancia muy cercana a la rejilla.

Uno de los parámetros que pueden variarse al momento de fabricar una rejilla es el periodo. Cuando el periodo de la

rejilla es igual o menor que la longitud de onda de la luz incidente, la onda difractada que corresponde al orden central presenta un cambio en su polarización con respecto a la primera. Este fenómeno es conocido como *birrefringencia de forma* [2] y se deriva del hecho que el medio se comporta como una película anisótropa que presenta dos índices de refracción, uno para cuando el vector de campo eléctrico de la onda incidente se encuentra contenido en el plano de incidencia (modo TM) y otro cuando es perpendicular (modo TE). Este fenómeno se presenta con mayor énfasis cuando la razón  $\lambda/d \gg 1$ , también llamado *límite cuasi-estático* [3]. A las rejillas con tales características se les denomina *rejillas sub-longitud de onda*.

A continuación se presenta la manera en que la luz que incide sobre la rejilla se distribuye espacialmente después de ser difractada a través del medio incidente (ondas reflejadas), así como a través del medio que se encuentra después del medio dispersor (ondas transmitidas). Posteriormente se hará un análisis del comportamiento de la onda dentro de la rejilla y se establecerán las condiciones para la solución del problema. Este análisis se lleva a cabo mediante la teoría modal dada a conocer por Rytov [4].

## 2. Difracción por una rejilla

La función de propagación compleja de una onda plana monocromática dependiente del tiempo, polarizada linealmente y con longitud de onda  $\lambda$  en el vacío, a través de un medio con permitividad constante  $\epsilon_I$ , se expresa como

$$\begin{aligned} \vec{E}_i(x, y, z; t) &= \exp[j(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)]\vec{u} \\ &= \exp[j(\alpha x - \beta y - \omega t)]\vec{u}, \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $\vec{u}$  es el vector de polarización,  $\alpha = k_1 \sin \theta$  y  $\beta = k_1 \cos \theta$ ;  $\theta$  es el ángulo que hace el vector de onda  $\vec{k}_1$  de la onda incidente con respecto al eje coordenado  $y$  (Fig. 1),  $k_1 = |\vec{k}_1| = 2\pi\epsilon_I^{1/2}/\lambda$  y  $\omega$  es la frecuencia de la luz incidente.

Supongamos que esta onda incide sobre una rejilla de grosor  $h$ , la cual tiene las caras paralelas al plano  $x$ - $z$  y que además presenta una distribución periódica de su permitividad dada por,

$$\epsilon(x) = \begin{cases} \epsilon_{rd} & 0 < x < c \\ \epsilon_{gr} & c < x < d \end{cases}, \quad (3)$$

donde  $\epsilon_{rd}$  y  $\epsilon_{gr}$  son las permitividades en la región de la rejilla. La luz al viajar a través de esta estructura periódica se descompondrá en ondas reflejadas y/o transmitidas, de tal forma que al llegar a las interfaces, es decir la cara anterior y posterior de la rejilla, habrá ciertas distribuciones de ondas difractadas tanto en la región I como en la región III. Estas ondas se pueden expresar, eliminando por simplicidad la dependencia del tiempo, mediante una expansión de Rayleigh como [5],

$$\vec{E}_I = \vec{E}_i + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{R}_n \exp[i\alpha_n x + i\beta_{1n}(y-h)], \quad y > h \quad (4)$$

y

$$\vec{E}_{III} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{T}_n \exp(i\alpha_n x - i\beta_{3n}y), \quad y < 0, \quad (5)$$

donde  $\vec{R}_n$  es el vector de amplitud de la  $n$ -ésima onda reflejada y  $\vec{T}_n$  es el vector de amplitud de la  $n$ -ésima onda transmitida. Además,

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \alpha + nK, \\ \beta_{1n} &= k_1^2 - \alpha_n^2, \\ \beta_{3n} &= k_3^2 - \alpha_n^2, \end{aligned} \quad (6)$$

donde  $k_3 = 2\pi(\epsilon_{III})^{1/2}/\lambda$  es la amplitud del vector de propagación  $\vec{k}_3$  del orden central en la región III, cuya permitividad es  $\epsilon_{III}$ .  $\alpha_n$  resulta de la aplicación de las condiciones de Floquet [6], siendo  $K = 2\pi/d$ .

Si  $\alpha_n > k_{1n}$  ó  $\alpha_n > k_{3n}$  se generan ondas evanescentes, por lo que las expresiones para  $\beta_{1n}$  y  $\beta_{3n}$  corresponden a la ecuación de la rejilla para el caso de ondas reflejadas y ondas transmitidas, respectivamente. En el intervalo  $0 < y < h$  es posible describir el comportamiento de las ondas suponiendo que la rejilla actúa como una guía de ondas.

### 3. Solución de la ecuación de Helmholtz dentro de la rejilla

Una forma de describir el comportamiento de las ondas electromagnéticas dentro de la rejilla es la descomposición en modos de la onda incidente, donde cada uno de estos modos cumple con la ecuación de Helmholtz en forma independiente.

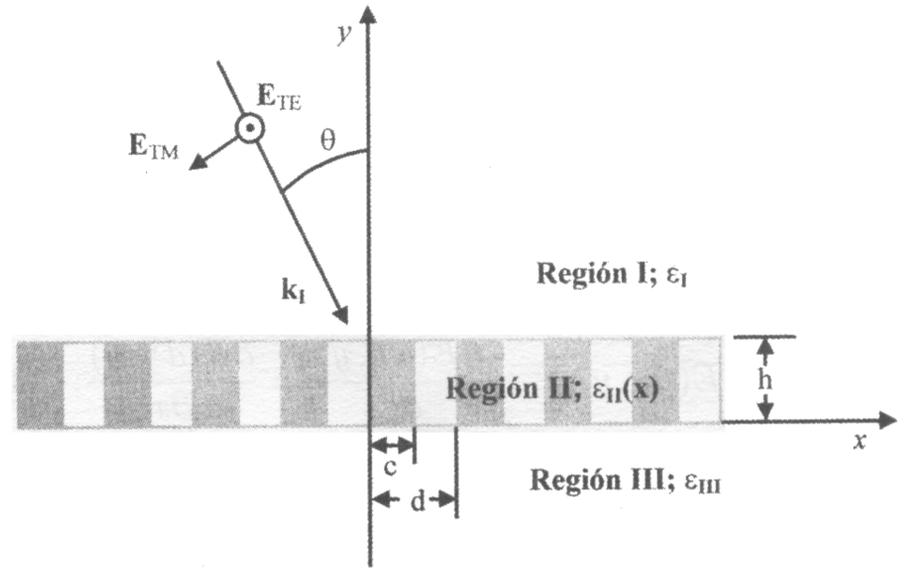


FIGURA 1. Representación esquemática de la incidencia de una onda electromagnética sobre una rejilla.

Ahora bien, cualquier onda polarizada linealmente puede descomponerse en sus componentes transversal y longitudinal, por lo que el vector de polarización  $\vec{u}$  en la Ec. (2) estará contenido en el plano  $x$ - $y$  o en dirección del eje  $z$ , respectivamente. El primer caso se denomina polarización transversal TM y el segundo polarización transversal TE. Cada una de estas ondas polarizadas dentro de la rejilla tiene un comportamiento diferente, por lo que es necesario considerarlas por separado. Además, la modulación en la región II sólo tiene componentes en dirección del eje coordenado  $x$ , esto es, las franjas no tienen inclinación con respecto a los ejes  $y$  o  $z$ .

### 3.1. Teoría modal

#### 3.1.1. Polarización TE

Consideremos la onda plana de la Ec. (2), la cual incide sobre la rejilla de la Fig. 1. Si la polarización de la luz es del modo TE, es decir, el campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia, puede expresarse como

$$\vec{E}_i(x, y) = \exp[j(\alpha x + \beta y)]\hat{z}. \quad (7)$$

Debido a que el campo eléctrico total  $\vec{E}$  tiene la misma polarización que el campo incidente es posible omitir la notación vectorial. En cada región el campo eléctrico,  $E$  debe satisfacer la ecuación de Helmholtz,

$$\nabla^2 E + k_i^2 E = 0, \quad k_i^2 = \omega^2 \epsilon_i \mu_i. \quad (8)$$

En la mayoría de los problemas ópticos se asume que la permeabilidad magnética  $\mu_i$  es constante e igual a la permeabilidad en el vacío en cada una de las regiones.

La ecuación de Helmholtz a resolver en la región II es de la forma [7]

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + k_2^2(x)E = 0, \quad (9)$$

donde

$$k_2(x) = \begin{cases} k_{rd}, & 0 < x < c \\ k_{gr}, & c < x < d \end{cases} \quad (10)$$

donde  $k_{rd}^2 = k^2 \varepsilon_{rd} = k^2 n_{rd}^2$  y  $k_{gr}^2 = k^2 \varepsilon_{gr} = k^2 n_{gr}^2$ ,  $n_{rd}$  y  $n_{gr}$  son los índices de refracción mayor y menor, respectivamente, dentro de la región II. Además, el campo eléctrico debe satisfacer las siguientes condiciones a la frontera:

$$E(c^-, y) = E(c^+, y), \quad \frac{\partial E(c^-, y)}{\partial x} = \frac{\partial E(c^+, y)}{\partial x},$$

$$E(d^-, y) = E(d^+, y), \quad \frac{\partial E(d^-, y)}{\partial x} = \frac{\partial E(d^+, y)}{\partial x}; \quad (11)$$

donde  $c^-$ ,  $c^+$ ,  $d^-$  y  $d^+$  solo los límites izquierdo y derecho, respectivamente, para la función evaluada en  $x = c$  y  $x = d$ . Al mismo tiempo, deben cumplirse las condiciones de pseudo-periodicidad [8]

$$E(d^+, y) = \exp(j\alpha d) E(0^-, y);$$

$$\frac{\partial E(d^+, y)}{\partial x} = \exp(j\alpha d) \frac{\partial E(0^+, y)}{\partial x}, \quad (12)$$

donde  $\alpha d$  es el cambio de fase del campo incidente a lo largo de un periodo.

La geometría del problema nos permite proponer una solución de variables separables, esto es,

$$E(x, y) = u(x)v(y), \quad (13)$$

de donde se obtiene para  $u$

$$u'' + k_{rd}u = \xi^2 u, \quad 0 < x < c,$$

$$u'' + k_{gr}u = \xi^2 u, \quad c < x < d, \quad (14)$$

y para  $v$

$$v'' + \xi^2 v = 0. \quad (15)$$

La Ec. (14) puede ser reescrita en forma más concisa de la siguiente manera:

$$u'' + \zeta^2 S(x - c)u = -\beta^2 u, \quad (16)$$

donde

$$\zeta^2 = k_{gr}^2 - k_{rd}^2,$$

$$\beta^2 = k_{rd}^2 - \zeta^2 \quad (17)$$

y  $S(x)$  es la función escalón definida como

$$S(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x < 0 \\ 1, & \text{para } x \geq 0. \end{cases} \quad (18)$$

La Ec. (16) es un problema de valor característico para el cual existen sólo ciertas soluciones en función de  $\beta$ . Sean  $\theta$  y  $\psi$  dos soluciones linealmente independientes del problema de valor característico, las cuales son continuas y diferenciables en  $x = c$ , tales que

$$\theta(0) = 1, \quad \psi(0) = 0,$$

$$\theta'(0) = 0, \quad \psi'(0) = 1. \quad (19)$$

Luego

$$\theta = \begin{cases} \cos(\beta x), & 0 \leq x \leq c \\ \cos(\beta c) \cos[\gamma(x - c)] \\ -\frac{\beta}{\gamma} \sin[\gamma(x - c)], & c \leq x \leq d \end{cases} \quad (20)$$

y

$$\psi = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \sin(\beta x), & 0 \leq x \leq c \\ \frac{1}{\beta} \sin(\beta c) \cos[\gamma(x - c)] \\ + \frac{1}{\gamma} \cos(\beta c) \sin[\gamma(x - c)], & c \leq x \leq d \end{cases} \quad (21)$$

donde  $\gamma^2 = \beta^2 + \zeta^2$ .

Debido a que  $\theta$ ,  $\psi$  satisfacen la Ec. (16), el wronskiano es constante y de las condiciones dadas en la Ec. (19)

$$W(\theta, \psi) = \theta\psi' - \theta'\psi = 1. \quad (22)$$

Ahora escribimos la solución como

$$u(x) = A\theta(x) + B\psi(x) \quad (23)$$

y se aplican las restricciones de pseudo-periodicidad, Ec. (12). Esto es,

$$\exp(j\alpha d)A = A\theta(d) + B\psi(d),$$

$$\exp(j\alpha d)B = A\theta'(d) + B\psi'(d). \quad (24)$$

Para que este sistema de ecuaciones tenga una solución no-trivial se requiere que

$$[\theta(d) - \exp(j\alpha d)][\psi'(d) - \exp(j\alpha d)] - \theta'(d)\psi(d) = 0. \quad (25)$$

Usando la Ec. (22) este último resultado se reduce a

$$e^{i\alpha d}[\theta(d) + \psi'(d)] = 1 + e^{2i\alpha d},$$

$$\theta(d) + \psi'(d) = 2 \cos(\alpha d). \quad (26)$$

Sustituyendo la Ec. (20) y la derivada de la Ec. (21) en la Ec. (26) llegamos a la siguiente igualdad:

$$\cos(\beta c) \cos[\gamma(d - c)] - \frac{1}{2} \frac{(\beta^2 + \gamma^2)}{\beta\gamma} \sin(\beta c) \sin[\gamma(d - c)] = \cos(\alpha d). \quad (27)$$

La solución de esta ecuación trascendental nos dará todos los posibles valores característicos  $\beta$  que determinarán cada uno de los modos existentes dentro de la rejilla.

La solución de la Ec. (15) es

$$v(y) = a \cos(\xi y) + b \sin(\xi y), \quad (28)$$

por lo que la solución general de la Ec. (9) se expresa como la superposición de todos los modos permitidos dentro de la rejilla [9], esto es

$$E(x, y) = \sum_m C_m u_m(x) \exp(\xi_m y), \quad (29)$$

donde  $m$  es el índice de modo y  $C_m$  se determina a partir de la aplicación de las condiciones a la frontera del campo eléctrico en la región I y III. Para que la onda que se propaga a través de la rejilla no sea evanescente se debe cumplir que  $\beta$  sea un número complejo.  $\xi_m$  se obtiene a partir de la solución  $\beta_m$  y de la Ec. (17). Posteriormente, para la aplicación de las condiciones de continuidad del campo magnético  $B(x, y)$ , se aplica la ecuación de Maxwell,

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{B}, \quad (30)$$

a la Ec. (29).

### 3.1.2. Polarización TM

En este caso el vector magnético  $\vec{H}$  es el que está en dirección del eje  $z$  y, nuevamente debido a la independencia de la polarización, podremos escribir la representación del campo en forma escalar. Como consecuencia de las discontinuidades de la constante de permitividad a lo largo del eje  $x$ , la ecuación de Helmholtz adecuada se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{k_2(x)^2} \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{k_2(x)^2} \frac{\partial H}{\partial y} \right] + H = 0, \quad (31)$$

la cual puede reescribirse como

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + k_2(x)^2 H = \frac{1}{k_2(x)^2} \frac{\partial H}{\partial x} \zeta^2 \delta(x - c). \quad (32)$$

La función  $\delta(x)$  evaluada en el punto  $x = c$  representa la discontinuidad de la derivada de la función de propagación del campo electromagnético.  $\zeta$  está definida como en la igualdad (17) y  $k_2(x)$  como en la Ec. (10). Nuevamente se propone una solución de variables separables de la forma

$$H(x, y) = u(x)v(y). \quad (33)$$

Al sustituir la Ec. (33) en la ecuación de Helmholtz se obtienen dos expresiones que representan el problema de valor característico, una para la dependencia en  $x$  y otra para la dependencia en  $y$ ,

$$k_2(x)^2 \left[ \frac{u'}{k_2(x)^2} \right]' + \zeta^2 S(x - c)u = -\beta^2 u, \quad (34)$$

$$v'' + \xi^2 v = 0, \quad (35)$$

donde

$$\xi^2 = k_1^2 - \beta^2. \quad (36)$$

Las condiciones a la frontera para el caso de polarización TM con respecto a la variable  $x$  se expresan como

$$\begin{aligned} u(c^-) &= u(c^+), & \frac{1}{\epsilon_{rd}} u'(c^-) &= \frac{1}{\epsilon_{gr}} u'(c^+), \\ u(d^-) &= u(d^+), & \frac{1}{\epsilon_{gr}} u'(d^-) &= \frac{1}{\epsilon_{rd}} u'(d^+); \end{aligned} \quad (37)$$

mientras que las condiciones de pseudo-periodicidad están dadas por

$$\begin{aligned} \exp(j\alpha d)u(0^-) &= u(d^+), \\ \frac{1}{\epsilon_{rd}} \exp(j\alpha d)u'(0^-) &= \frac{1}{\epsilon_{gr}} u'(d^+). \end{aligned} \quad (38)$$

Al igual que para el caso de polarización TE, se definen dos soluciones linealmente independientes para el caso de la ecuación diferencial de segundo grado dependiente de la variable  $x$  las cuales se definen como  $\theta$  y  $\psi$ . Al aplicar las condiciones (38) y las condiciones de continuidad dadas por la expresión (37), se obtiene que

$$\theta(x) = \begin{cases} \cos(\beta x), & 0 \leq x \leq c \\ \cos(\beta c) \cos[\gamma(x - c)] \\ -\frac{\epsilon_{gr}}{\epsilon_{rd}} \frac{\beta}{\gamma} \sin[\gamma(x - c)], & c \leq x \leq d, \end{cases} \quad (39)$$

y

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \sin(\beta x), & 0 \leq x \leq c \\ \frac{1}{\beta} \sin(\beta c) \cos[\gamma(x - c)] \\ + \frac{\epsilon_{gr}}{\epsilon_{rd}} \frac{1}{\gamma} \cos(\beta c) \sin[\gamma(x - c)], & c \leq x \leq d, \end{cases} \quad (40)$$

donde  $\gamma^2 = \beta^2 + \zeta^2$ .

El wronskiano apropiado está dado por

$$W(\theta, \psi) = \frac{1}{\epsilon(x)} (\theta\psi' - \theta'\psi) = \frac{1}{\epsilon_{rd}}, \quad (41)$$

el cual es constante, luego  $\theta$  y  $\psi$  cumplen con la Ec. (34) y la solución puede escribirse como la superposición de estas funciones,

$$u(x) = A\theta(x) + B\psi(x). \quad (42)$$

Al aplicar las condiciones de pseudo-periodicidad (38) a la expresión anterior, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas,

$$\begin{aligned} \exp(j\alpha d)A &= A\theta(d) + B\psi(d), \\ \frac{1}{\epsilon_{rd}} \exp(j\alpha d)B &= \frac{1}{\epsilon_{gr}} [A\theta'(d) + B\psi'(d)], \end{aligned} \quad (43)$$

el cual tendrá una solución no-trivial siempre y cuando se cumpla que

$$[\theta(d) - \exp(j\alpha d)] \left[ \frac{1}{\epsilon_{gr}} \psi(d) - \frac{1}{\epsilon_{rd}} \exp(j\alpha d) \right] - \psi(d) \frac{1}{\epsilon_{gr}} \theta'(d) = 0, \quad (44)$$

la cual se reduce, después de aplicar el resultado obtenido en (41), a

$$\theta(d) + \frac{\epsilon_{rd}}{\epsilon_{gr}} \psi'(d) = 2 \cos(\alpha d). \quad (45)$$

Sustituyendo las expresiones para  $\theta(x)$  y la derivada de  $\psi(x)$  en el intervalo  $(c, d)$  en la Ec. (45) se llega a la ecuación trascendental

$$\cos(\beta c) \cos[\gamma(d-c)] - \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_{gr}\beta}{\epsilon_{rd}\gamma} + \frac{\epsilon_{rd}\gamma}{\epsilon_{gr}\beta} \right) \times \sin(\beta c) \sin[\gamma(d-c)] = \cos(\alpha d). \quad (46)$$

Esta ecuación característica se cumple para un número infinito de valores de  $\beta$ , valores propios, por lo que existe un número infinito de modos propagándose a través de la rejilla, los cuales serán diferentes a los obtenidos para la polarización TE. La solución para la parte dependiente de  $y$  tiene la misma forma que la Ec. (28), por lo que la solución para los modos propagándose en la región II tiene la forma general

$$H(x, y) = \sum_m D_m u_m(x) \exp(\zeta_m y), \quad (47)$$

donde el subíndice  $m$  corresponde al  $m$ -ésimo modo dentro de la rejilla y  $D_m$  se determina a partir de las condiciones de continuidad del campo eléctrico a través de las interfaces. Para que la Ec. (47) corresponda a una onda electromagnética propagándose se debe cumplir que  $\beta$  sea compleja. El campo eléctrico  $E(x, y)$  se deriva de la aplicación de la ecuación de Maxwell,

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E}, \quad (48)$$

a la Ec (47).

### 3.2. Limite cuasiestático

Las soluciones de las ecuaciones trascendentales (27) y (46) para ordenes de propagación corresponderán a los valores de  $\beta^2 < 0$  en ambos casos. En la Fig. 2 se muestra el comportamiento en función de la razón  $\lambda/d$  de las funciones  $\theta(d) - \psi(d) - 2 \cos(\alpha d)$  y  $\theta(d) - (\epsilon_{rd}/\epsilon_{gr})\psi'(d) - 2 \cos(\alpha d)$  cuando la rejilla se ilumina en forma normal y  $\lambda_0 = 632.8$  nm,  $d = 0.625 \lambda_0$ ,  $c = 0.5d$ ,  $\epsilon_{rd} = (1.27)^2$  y  $\epsilon_{gr} = (1.54)^2$ . Las curvas cruzan el eje horizontal sólo una vez cuando  $\beta^2 < 0$ , lo que indicá que existe sólo un orden de propagación siendo el resto de los ordenes, los cuales suman un número infinito, evanescentes. La solución del problema de valor caracterís-

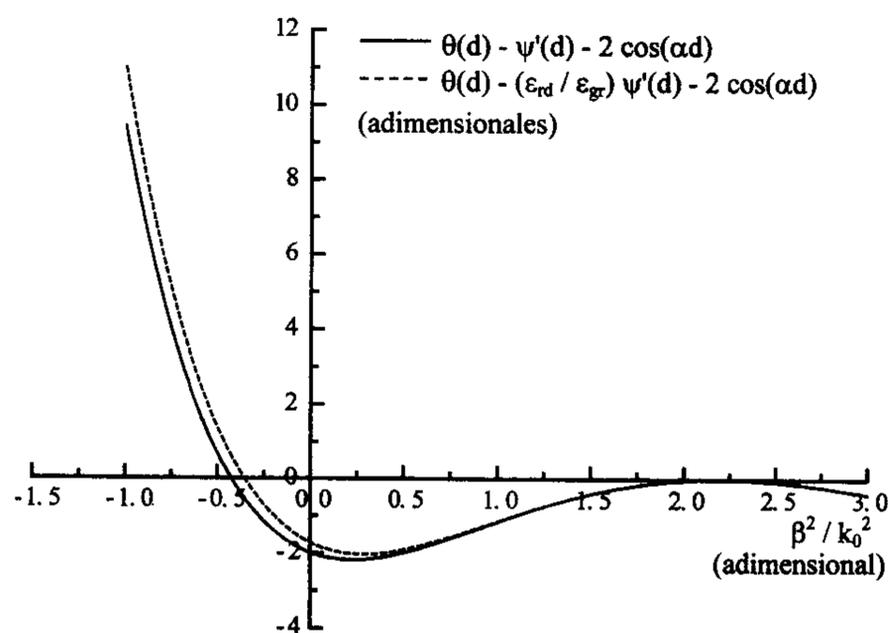


FIGURA 2. Curvas resultantes de la evaluación de las funciones características para los modos de polarización TE y TM propagándose a través de una rejilla sub-longitud de onda.

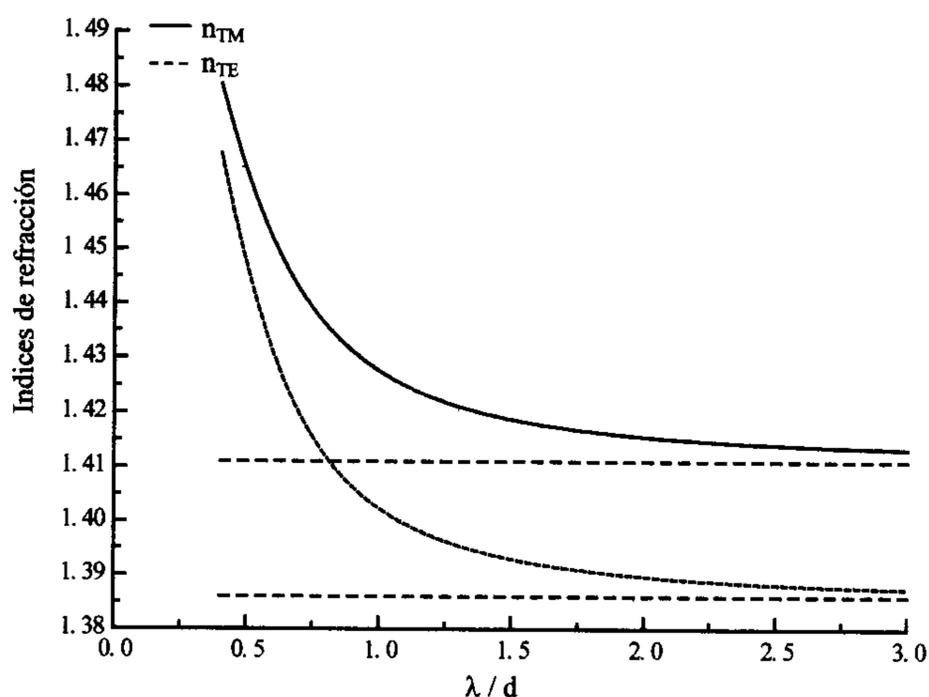


FIGURA 3. Indices de refracción efectivos para el orden cero transmitido obtenidos a partir de las soluciones del problema de valor característico para los modos de polarización TE y TM.

tico para cada polarización corresponde a un valor diferente de  $\beta$  y, por lo tanto, a un índice de refracción efectivo diferente también.

Cuando la razón longitud de onda de iluminación a periodo de la rejilla  $\lambda/d > 1$  los ordenes de difracción disminuyen en número debido a la generación de ondas evanescentes. Sin embargo, el estado de polarización de los ordenes difractados cambia debido a un comportamiento similar a un cristal anisotrópico. El efecto de anisotropía es mayor cuando sólo existe un orden de propagación, el orden cero. En la Fig. 3 se muestra la tendencia de las soluciones de las Ecs. (27) y (46) a un valor constante en función de  $\beta^2$  cuando  $\lambda/d \gg 1$ . El valor al cual tienden estas dos ecuaciones es diferente, por lo que se obtendrá un índice de refracción efectivo diferente para cada caso. De lo anterior concluimos que la llamada *birrefringencia de forma* del medio será independiente de la longitud de onda cuando se trabaja en el límite cuasiestático.

Los índices de refracción artificiales ordinario y extraordinario se encuentran en una dirección perpendicular y paralela a la de la modulación del índice de refracción, respectivamente. Estos índices de refracción que posee la rejilla sub-longitud de onda están en función de su geometría y de la longitud de onda incidente. Existen varios criterios en las aproximaciones para la obtención del valor de la birrefringencia [10]. De cada criterio surge una teoría llamada de orden cero debido a que sólo existe un orden de propagación, el cero. Una de estas teorías propone la expansión en series de las soluciones del problema de valor característico, Ecs. (27) y (46), tomando sólo los términos de primer orden del periodo, que para  $\beta^2$  puede expresarse como,

$$\beta_{\text{TE}}^2 = (k_{\text{gr}}^2 - k_{\text{rd}}^2) D + k_{\text{rd}}^2,$$

$$\beta_{\text{TM}}^2 = \frac{(k_{\text{gr}}^2 - k_{\text{rd}}^2) \epsilon_{\text{rd}} D}{(1 - D) \epsilon_{\text{gr}} + D \epsilon_{\text{rd}}} + k_{\text{rd}}^2, \quad (49)$$

donde podemos definir

$$k_0^2 n_o^2 = \beta_{\text{TE}}^2 \Rightarrow n_o^2 = \epsilon_{\text{rd}}(1 - D) + \epsilon_{\text{gr}} D,$$

$$k_0^2 n_e^2 = \beta_{\text{TM}}^2 \Rightarrow n_e^2 = \frac{\epsilon_{\text{rd}} \epsilon_{\text{gr}}}{\epsilon_{\text{gr}}(1 - D) + \epsilon_{\text{rd}} D}, \quad (50)$$

siendo  $n_o$  y  $n_e$  los índices de refracción ordinario y extraordinario, respectivamente, de un cristal uniaxial equivalente y  $D = c/d$ .

El resultado expresado en la Ec. (50) permite el diseño de elementos birrefringentes basados en rejillas sub-longitud de onda. El retraso de fase de la componente TM con respecto a la TE obtenido estará dado por el producto  $k(n_e - n_o)h$ , el cual es función de la longitud de onda, periodo, el grosor de la rejilla y de los índices de refracción, lo cual puede utilizarse para el diseño de placas retardadoras de fase [11–14]. En la Fig. 4 se muestra la dependencia de la birrefringencia  $\Delta n = n_e - n_o$  en función de la longitud de onda de iluminación para  $\epsilon_{\text{rd}} = (1.27)^2$ ,  $\epsilon_{\text{gr}} = (1.54)^2$ ,  $d = 0.625 \lambda_0$ ,  $\lambda_0 = 632.8 \text{ nm}$ , y  $h = 10 \mu\text{m}$ . Utilizando la Ec. (50) se encuentra un valor de índices de refracción artificiales  $n_o = 1.411$  y  $n_e = 1.386$ , que son los mismos valores hacia los que tiende la solución exacta cuando  $\lambda/d > 1$ .

#### 4. Diseño de elementos retardadores de fase

Una de las aplicaciones de la birrefringencia de forma es el diseño de elementos ópticos que modifiquen la fase de un haz de luz polarizada. El cambio en la fase de las componentes TE y TM esta en función de la diferencia de índice de refracción efectivo que muestra la rejilla sub-longitud de onda. Como consecuencia de la diferencia de fase, la rejilla puede provocar un cambio en el estado de polarización de la luz incidente. De esta forma es posible emplear la rejilla sub-longitud de onda como placas retardadoras  $\lambda/4$ ,  $\lambda/2$  y retrasadores de fase, éstos últimos no alteran el estado de polarización del haz incidente.

Con el propósito de analizar la región espectral en la cual la rejilla proporciona un retraso de fase de la componente TM

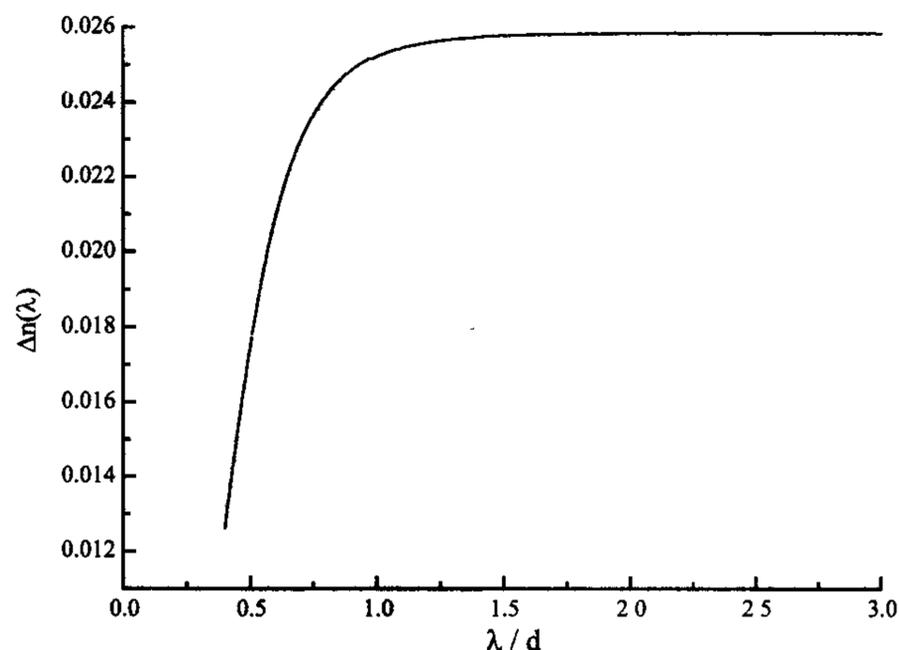


FIGURA 4. Valores de la birrefringencia artificial de una rejilla en función de la razón longitud de onda de iluminación/periodo de la rejilla.

con respecto a la TE constante, se calcula la elipticidad  $e$  del haz transmitido al orden cero en función de la longitud de onda incidente y del ángulo  $\eta$  de polarización del mismo, Fig. 5. Para este cálculo se utilizan los índices de refracción resultantes de la solución exacta de los problemas de valor característico previamente analizado y un haz incidiendo normalmente a la rejilla con polarización  $\eta$ .

Para lograr que la rejilla funcione como una placa retardadora  $\lambda/4$  puede considerarse los valores de elipticidad en el intervalo  $0.9 < e < 1$  para el haz transmitido. El rango espectral que cumple con esta condición en la Fig. 5 se encuentra en  $1.4 < \lambda/d < 2$ , mientras que existe también una tolerancia para el ángulo de polarización incidente. El rango angular de polarización es  $35^\circ < \eta < 55^\circ$ .

#### 5. Discusión

La teoría modal demuestra que el efecto de difracción por una rejilla puede analizarse como la propagación de una onda electromagnética a través de una guía de ondas. Además, establece que los modos que se propagan a través de esta estructura (soluciones del problema de valor característico) son los ordenes de difracción observados. Es más, esta teoría puede utilizarse para la descripción del comportamiento de las rejillas de alta frecuencia, las cuales muestran una respuesta semejante a un cristal uniaxial. Mediante una aproximación a primer orden es posible calcular los índices de refracción ordinario y extraordinario del medio birrefringente equivalente. Cuando se aplica este caso especial, la teoría modal se reduce a una teoría de orden cero, pues es el único orden que se propaga. De esta manera, se determina que las dimensiones geométricas de la rejilla sub-longitud de onda pueden modificarse para utilizarlas en el diseño de elementos retardadores de fase.

Una de las ventajas que ofrecen los elementos birrefringentes basados en rejillas es el hecho de que pueden ampliar el ancho espectral en el cual los retardadores de fase produ-

## Elipticidad $e$

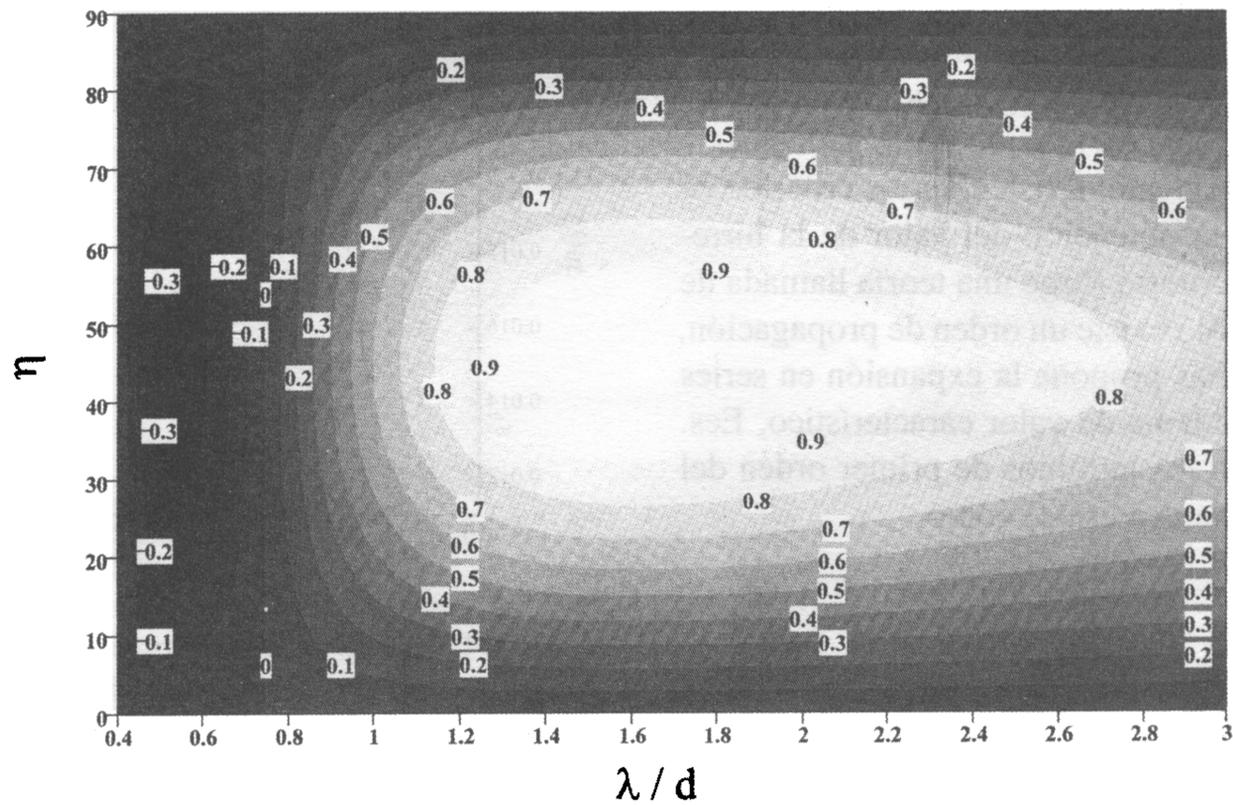


FIGURA 5. Valores de la elipticidad del orden cero transmitido por una rejilla sub-longitud de onda en función de la razón longitud de onda/periodo y del ángulo de polarización incidente.

cen una respuesta aceptable, además de permitir una tolerancia en el ángulo del vector de campo eléctrico. Esta propiedad puede ser empleada para solucionar el problema de cambio de longitud de onda central de emisión o variación del ángulo de polarización por calentamiento de algunas fuentes de luz.

## Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo de CONACyT para la realización de la presente investigación bajo el proyecto 33793-E, además de la beca de posgrado para G. Martínez-Ponce.

1. E. Hecht, *Optics*, (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1987) Cap. 10.
2. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, (Pergamon Press, Oxford, 1975) Cap. 14.
3. R.C. McPhedran *et al.*, *Opt. Acta* **29** (1982) 289.
4. S.M. Rytov, *Sov. Phys. JEPT* **2** (1956) 466.
5. R. Petit, *Electromagnetic Theory of Gratings*, edited by R. Petit, (Springer-Verlag, Berlín, 1980) Cap. 4.
6. A. Yariv and P. Yeh, *Optical Waves in Crystals*, (John Wiley & Sons, New York, 1984) Cap. 6.
7. L.C. Botten, *Opt. Acta* **28** (1981) 413.
8. L. Li, *J. Mod. Opt.* **40** (1993) 553.
9. J.K. Gaylord and M.G. Moharam, *Appl. Phys. B* **28** (1982) 1.
10. H. Kikuta, H. Yoshida, and K. Iwata, *Opt. Rev.* **2** (1995) 92.
11. H. Kikuta, Y. Ohira, and K. Iwata, *App. Opt.* **36** (1997) 1566.
12. C.R.A. Lima, L.L. Soares, L. Cescato, and A.L. Gobbi, *Opt. Lett.* **22** (1997) 203.
13. R. Tyan, P. Sun, and Y. Fainman, *SPIE* **2689** (1996) 82.
14. L. Cescato, E. Gluch, and N. Streibl, *Appl. Opt.* **29** (1990) 3286.