

¿Es no separable la mecánica cuántica?

Erick Leonardo Patiño Jáidar

*Departamento de Física Teórica, Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México
Circuito de la Investigación Científica, Cd. Univesitaria 04510, México, D.F., México
email: leonardo@ft.ifisicacu.unam.mx*

Recibido el 7 de julio de 2000; aceptado el 29 de noviembre de 2000

Desde sus inicios, la mecánica cuántica se ha postulado como una teoría no separable, sin embargo éste ha sido siempre un punto generador de gran polémica. Los argumentos a favor o en contra del carácter no local de la teoría cuántica han estado siempre vinculados de manera estrecha con sus fundamentos. La tendencia generalizada a la fecha es pensar que los efectos no separables han sido verificados y que la “muerte” del realismo como visión filosófica es inevitable. Aún así, la discusión no ha sido cerrada, puesto que los experimentos realizados se apoyan en hipótesis experimentales muy fuertes no verificadas, lo cual da buenas razones para dudar de ellos. De hecho existen modelos realistas y locales que reproducen los resultados de los experimentos realizados. El principal objetivo de este artículo es exponer algunas de las críticas que demuestran que el realismo no ha sido descartado y que, muy por el contrario, existen teorías realistas alternativas que permiten un entendimiento mucho más amplio de los fenómenos cuánticos.

Descriptor: No local; EPR; desigualdad de Bell; estados enlazados

Since its beginning, quantum mechanics has been proposed as a non-separable theory, however, this has been a controversial issue. The arguments with or against the non-local character of the quantum theory has always been closely related to its foundations. Nowadays the general opinion is that non-local effects had been verified and the “dead” of realism as a philosophical point of view is unavoidable. Nevertheless, the discussion stills open, since the performed experiments rely on very strong and unverified experimental hypothesis. Actually there are realistic and local models which reproduce the experimental results. The main goal of this paper is to expose some of the critics which show that realism has not been rejected, but in fact there are alternative realistic theories which allow deep understanding of the quantum behavior.

Keywords: Nonlocality; EPR; Bell inequalities; quantum entanglement

PACS: 03.65.Bz

1. Antecedentes

1.1. Definición de no separable y estados enlazados

En la construcción de la física se parte del principio de que cuando se experimenta con un sistema dado, el experimentador es capaz, en principio, de aislarlo de toda interacción con su entorno. De esta forma, las propiedades del sistema bajo estudio *deberían* depender solamente de las condiciones del mismo y no ser afectado por nada externo a él. Las interacciones que se bloquean para conseguir tal aislamiento son de diferente naturaleza.

Si después de haber logrado un aislamiento “total” nos damos cuenta de que las propiedades del sistema aún pueden ser afectadas por factores externos a él, decimos que el sistema es no separable. Es importante entender que si la causa de esta vinculación es alguna interacción física que no fue bloqueada, entonces no se trata de un comportamiento no separable, sino sólo de una incapacidad técnica.

Como ilustración de un efecto no separable en la mecánica cuántica está la “paradoja de de Broglie”. Pensemos en un electrón libre dentro de una caja cúbica, cuyo estado está descrito por una función de onda. Si se inserta de manera suave una pared que divida la caja por la mitad, y separamos las dos mitades resultantes, la función de onda se acomodará de tal

manera que la probabilidad de que el electrón esté en alguna de las mitades es de un medio. Desde luego que si después de esto observamos dentro de una de las mitades y encontramos ahí al electrón, sabremos que la otra mitad está vacía. Esto es evidente, pero planteemos la situación desde el punto de vista del formalismo de la mecánica cuántica. En términos de la presencia o ausencia del electrón en cada una de las mitades, la función de onda se puede escribir (salvo factores de fase) como la combinación lineal de dos términos

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (|p\rangle_1 |a\rangle_2 + |a\rangle_1 |p\rangle_2) \quad (1)$$

donde $|p\rangle_i$ se refiere al electrón presente en la mitad i y $|a\rangle_i$ al electrón ausente de tal mitad.

Supongamos que se realiza una observación sobre la mitad 1, y se encuentra que el electrón está presente, así que 1 (la mitad 1) está en el estado $|p\rangle_1$. Como consecuencia de esta observación la función de onda (1) se proyecta sobre el primero de los términos; $\Psi \rightarrow |p\rangle_1 |a\rangle_2$, y podemos afirmar con certeza que 2 (la mitad 2) se encuentra en el estado $|a\rangle_2$. Como esperábamos, es posible por medio de una observación sobre 1 deducir propiedades de 2.

Cuando la situación anterior es analizada desde el punto de vista de la interpretación ortodoxa de la mecánica cuántica se agudiza el carácter paradójico. En principio la función de

onda determina, tanto como se puede, el estado de los sistemas involucrados. No es que el electrón esté en una de las mitades, y la función de onda sólo describa nuestro conocimiento al respecto, sino que el electrón no está presente ni ausente en ninguna de las dos mitades. Así que antes de la observación, el estado de 2, en particular, está completamente indeterminado, es decir que en potencia *el electrón está presente y ausente al mismo tiempo* con probabilidad un medio. Cuando realizamos la observación sobre 1, esto es modificado —el electrón estará o no, en esta mitad— de tal manera que el estado de 2 se ve alterado por la observación realizada en 1, de forma instantánea y sin una interacción que justifique el efecto.

El estado descrito por (1) es un ejemplo de estado enlazado^(a) muy simple, puesto que sólo cuenta con dos términos. En general las funciones de estados enlazados pueden contar con más términos e involucrar más subsistemas, pero siempre es necesario que sean no factorizables. Por ejemplo en (1) no hay ningún ket que pueda factorizar la función de onda, por lo que si este ket es el resultado de una medición, el estado es proyectado sobre *un sólo* término de la función, y a esto debemos la característica *sui generis* de poder determinar las propiedades de otro subsistema involucrado. Es muy importante notar que el estado descrito por (1) no es solamente una mezcla de estados puros, donde una medición sobre un sistema proporciona información sólo de este sistema. Un estado enlazado correlaciona propiedades de entidades físicas distantes, es decir, una medición sobre un sistema puede aportar información respecto a otro sistema sobre el cual no se haya realizado medición alguna. Esta particularidad es la que da lugar a fenómenos de interferencia y muchos otros que analizaremos en este artículo.

Para resolver la paradoja de de Broglie es evidente que basta con cambiar de interpretación. Si suponemos que el electrón siempre estuvo en una de las mitades, y que lo único que se modificó fue nuestro conocimiento al respecto, el fenómeno mágico desaparece. El problema real es que hay muchos otros planteamientos que destacan el comportamiento no separable, y que no son fácilmente llevables a un modelo separable.^(b)

1.2. Relación entre los fundamentos de la mecánica cuántica y la no separabilidad

1.2.1. El teorema de EPR

En la sección anterior ya comienza a ser evidente que la no separabilidad tiene un profundo vínculo con los fundamentos de la mecánica cuántica. Para hacer esto más claro, se analizará a continuación el teorema de Einstein, Podolsky y Rosen.

Antes de entrar al cuerpo del teorema, hay que enunciar lo que los autores consideran un criterio de realidad, el cual plantea que: *Si el valor de una cantidad física para un sistema puede ser predicho con certeza (es decir con probabilidad igual a 1) sin perturbarlo en ninguna forma, entonces existe*

un elemento de realidad física correspondiente a esta cantidad. Hay que aclarar que este criterio no es absoluto; por un lado es el planteamiento personal de los autores EPR, y aun para ellos no agota todas las maneras de reconocer un elemento de realidad. Lo que cierto es que al menos nos provee de una.

En el formalismo de la mecánica cuántica, los resultados de mediciones asociadas a dos operadores que no conmutan no pueden ser predichos simultáneamente, puesto que la función de onda no puede ser propia de ambos operadores. Nos encontramos con dos alternativas mutuamente excluyentes: i) La descripción aportada por la función de onda es incompleta, o ii) dos cantidades asociadas a operadores que no conmutan, no pueden ser elementos de realidad simultáneos. El teorema de EPR justamente trata de descartar alguna de las alternativas anteriores.

El desarrollo original del teorema hace uso de momentos y posiciones [2], pero aquí plantearé la versión propuesta por Bohm, que involucra espines correlacionados. Esta versión es más clara y corta, por lo que se ha convertido en la forma tradicional de presentar el teorema, e incluso de llevarlo al plano experimental.

Pensemos en un sistema formado por dos partículas de espín 1/2, acopladas de tal forma que el espín total es cero. Supongamos que el sistema se desintegra y las partículas se alejan entre sí, permitiendo realizar mediciones sobre cada una de ellas, en principio, sin alterar a la otra. Si decidimos medir el espín en la dirección x de la partícula 1, podemos deducir *con certeza* el valor del espín en esta misma dirección para la partícula 2, puesto que debe ser antiparalelo, ya que el espín total es cero. Si decidiéramos medir el espín de la partícula 1 en la dirección y pasaría lo mismo.^(c) Así que al parecer podemos determinar con certeza tanto el espín en la dirección x como en la dirección y de la partícula 2 *sin alterarla*, puesto que las mediciones se están realizando sobre la partícula 1, de lo cual deducimos que ambos espines son elementos de realidad. Por medio del argumento anterior hemos asignado elementos de realidad simultáneos a dos observables que no conmutan. De esta forma los autores del teorema descartan la opción de que dos observables que no conmutan *no puedan* ser elementos de realidad simultáneos, optando por decir que la descripción proporcionada por la función de onda es incompleta.

En el artículo original de Einstein, Podolsky y Rosen, se advierte que esta conclusión no sería alcanzada si se partiera de que para que dos o más cantidades físicas fueran consideradas elementos de realidad *simultáneas* fuera necesario poder medirlas o predecirlas *simultáneamente*. Desde este punto de vista y dado que las cantidades involucradas se pueden predecir sólo una o la otra en la misma ocasión, esto llevaría a que no son simultáneamente reales.

El teorema EPR es solamente el principio de una gran discusión, lo que resta del presente artículo se abocará a seguir el desarrollo e implicaciones de este teorema. Selleri dedica todo un libro a ver este desarrollo con detalle [3].

1.2.2. La respuesta de Bohr

Poco tiempo después de publicado el teorema EPR, Bohr publicó una respuesta [4]. La lectura de este artículo no es fácil, y tiene una escritura un tanto obscura, pero fundamentalmente se refiere al “principio de complementariedad”, el cual no cuenta con una formulación concreta, y generalmente se intenta explicar con ejemplos de su aplicación. De alguna forma el principio de complementariedad plantea que existen cantidades físicas u observables que *no pueden* ser determinadas de manera simultánea. No es sólo un impedimento tecnológico, sino una imposibilidad natural. Así dos cantidades asociadas a observables conjugados están sujetas a este principio, siendo complementarias, puesto que completan la descripción del sistema u objeto bajo estudio. En algún momento se intentó explicar como la imposibilidad de ver un cuerpo desde todos los ángulos, si se ve por un lado no se puede ver por el lado opuesto, pero ambas vistas completarían la descripción del cuerpo. Bohr plantea que de alguna manera incomprensible, una observación de alguna cantidad física, afectará en conjunto al sistema bajo observación así como al sistema de medición u otros subsistemas involucrados en el proceso experimental. Así que, para Bohr, el criterio de realidad propuesto por EPR no puede ser usado, por que no es posible predecir una cantidad física de un sistema *sin afectarlo en ninguna forma*. Esta aseveración carece de un soporte sólido, puesto que no se proporciona una explicación de la manera en que debería de operar la interacción entre las observaciones.

1.2.3. Teorías de variables ocultas

Dada la conclusión del teorema de EPR, se pensaba en completar la descripción aportada por la función de onda. Lo que se buscaba eran variables que pudieran determinar los valores de todos los observables, y que las predicciones estadísticas de la mecánica cuántica fueran una consecuencia de las distribuciones de probabilidad de tales variables. A las teorías de este tipo se les llamó de “variables ocultas”, ya que estas variables no se encontraban presentes en el formalismo existente.

El primer teorema que intenta demostrar la imposibilidad de la existencia de variables ocultas es propuesto en 1955 por von Neumann [5]. Lo que asegura demostrar von Neumann es que no pueden existir ensembles cuánticos libres de dispersión para todos los observables, con lo cual descarta la posibilidad de la existencia de variables ocultas que determinen por completo los estados cuánticos, ya que éstas permitirían formar ensembles sin dispersión al agrupar sistemas con variables ocultas idénticas. Este teorema es de gran valor histórico, pero su demostración es larga, por lo que se refiere al lector interesado a la bibliografía correspondiente. Lo que es importante mencionar aquí es que en 1966 John Bell [6] hizo notar que una de las hipótesis del teorema es demasiado restrictiva. Von Neumann supone que la suma de los prome-

dios de los valores de varios observables es igual al promedio de la suma,

$$\langle aA + bB + \dots \rangle = a \langle A \rangle + b \langle B \rangle + \dots, \quad (2)$$

sin importar si los observables conmutan o no.

La falla de esta hipótesis se puede ver en un ejemplo concreto. Usando un aparato Stern-Gerlach orientado correctamente es posible medir σ_x para un sistema; para medir σ_y o $(\sigma_x + \sigma_y)$ haría falta reorientar el aparato. Para cada una de las mediciones el resultado será un valor propio del observable en cuestión, ya sea σ_x , σ_y o $(\sigma_x + \sigma_y)$. Lo que hay que notar es que *para cada uno* de los sistemas es imposible relacionar los resultados de σ_x y σ_y al resultado que tendría $(\sigma_x + \sigma_y)$, es decir, que el resultado que tendría el último no se puede escribir como una combinación lineal de los dos primeros. Esta imposibilidad se extiende a los promedios de los observables; todos los sistemas de un ensemble hipotético libre de dispersión tendrán el mismo valor para cada observable, así que el promedio de un observable será igual al valor del observable mismo *para cada uno* de los sistemas. Con esto se muestra que si existen ensembles libres de dispersión, (2) no se cumple; así que imponer tal hipótesis elimina de antemano la posibilidad de que haya variables ocultas que completen la teoría. Cuando se hace un promedio sobre un ensemble cuántico $\langle \sigma_x + \sigma_y \rangle$ sí se puede escribir en función de $\langle \sigma_x \rangle$ y de $\langle \sigma_y \rangle$ como lo indica (2), pero esto es una propiedad inherente a la estadística cuántica.^(d)

Después de que la hipótesis de von Neumann demostró ser injustificada, fue publicado lo que se conoce como el teorema de Bell-Kochen-Specker [9]. Se parte del supuesto de que todo observable puede ser representado por un operador. Lo que se demuestra es que no hay manera consistente de asignar valores simultáneos a todos los operadores (y por lo tanto a todos los observables) relacionados a un sistema. Si existiera alguna manera realista de completar la descripción de la mecánica cuántica, entonces el resultado de la medición de cada uno de los observables, estaría determinado por una función de un grupo de variables (ocultas) inherentes al sistema bajo observación, y por lo tanto estos valores deberían de ser consistentes entre sí. Lo que se pretende concluir es que no hay variables ocultas que completen la descripción cuántica, es decir, que los valores de los observables están indeterminados hasta antes de la medición. Un ejemplo moderno del teorema es el siguiente.

Se consideran dos partículas de espín 1/2. Los observables a considerar son los espines en las tres direcciones ortogonales convencionales (x, y, z) . Los operadores que representan a estos observables son las matrices de Pauli y sus características generales son una consecuencia directa de las propiedades de éstas. Toda matriz de Pauli referente a una de las partículas conmuta con las de la otra partícula, es decir,^(e) $[\sigma_i^1, \sigma_j^2] = 0$. De las propiedades de las matrices se sigue que $\sigma_i^n \sigma_j^n = \epsilon_{ijk} \sigma_k^n$, para $n = 1, 2$. Una vez recordado esto considérense los observables acomodados en el arreglo (3):

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^1 & \sigma_x^2 & \sigma_x^1 \sigma_x^2 \\ \sigma_y^1 & \sigma_y^2 & \sigma_y^1 \sigma_y^2 \\ \sigma_x^1 \sigma_y^2 & \sigma_x^2 \sigma_y^1 & \sigma_z^1 \sigma_z^2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Sólo falta hacer notar tres propiedades de estos conjuntos de operadores para encontrar la imposibilidad deseada.

- Cada uno* de los renglones o columnas (líneas en general) en el arreglo está formado por operadores que conmutan por pares (la validez de esta afirmación resulta inmediata construyendo el conmutador de cualquier par y usando las propiedades mencionadas de las matrices de Pauli).
- El producto de los operadores en cualquiera de las líneas es 1, excepto para el renglón de hasta abajo cuyo valor es -1 .
- Dado que los valores asignados a observables representados por operadores que conmutan deben de cumplir con las identidades que cumplan los operadores mismos, b) implica que el producto de los *valores mismos* de los observables en cada columna y los primeros dos renglones debe de ser 1, y, -1 para el último renglón.

Dado c) la multiplicación de los valores de los nueve observables debe de ser 1 si se considera la multiplicación de las tres columnas, y contradictoriamente debe de ser -1 si se multiplican los tres renglones.

De lo anterior se concluye que por lo menos un observable tiene valores diferentes dependiendo de cómo se realizó la medición, por lo que este valor no puede estar predeterminado (por variables ocultas inherentes al sistema). Lo que se infiere es que el resultado de la medición de un observable depende del grupo de observables que se midan de manera conjunta a éste, o en cierta forma, del contexto de la medición. O bien: que no todas las variables pueden tener valores predeterminados.

La relación entre los resultados de las mediciones no sorprendería si éstas se realizaran sobre el mismo sistema; pues no se está hablando de medir A (por ejemplo) en conjunto con otros observables B o C, sino de la medición AB comparada con la medición AC, etc. Al tipo de teorías que sostienen una postura similar a la anterior se les llama *teorías contextuales*. En estos términos la posibilidad de la existencia de las variables ocultas no está erradicada, sólo que éstas se ven afectadas por las mediciones que se realicen sobre el sistema bajo estudio, es decir, por el contexto.

Fue el mismo John Bell quien formuló otro argumento que pretende demostrar que la contextualidad no basta, sino que las teorías de variables ocultas necesitarían ser no separables para reproducir las predicciones estadísticas de la *mecánica cuántica*. Llegamos ahora al momento de analizar este teorema, donde se introduce la no separabilidad como una consecuencia del teorema EPR.

1.3. Teorema de Bell

La hipótesis de que las mediciones sobre *un sistema* se afectan entre sí en sus resultados no es descabellada, lo cual llevó a Bell a proponer que estas mediciones se realizaran en sistemas diferentes [10], desde luego haciendo uso de estados enlazados. Pensemos nuevamente en un sistema descrito por una función de onda del tipo (53) formado por dos partículas de espín un medio, acopladas de tal manera que el espín total sea cero. Si el sistema se desintegra y las partículas se alejan entre sí, podemos realizar mediciones sobre cada una de ellas, en principio sin afectar a la otra. Denotemos por $\sigma_1 \cdot \mathbf{a}$ ($\sigma_2 \cdot \mathbf{b}$), al observable asociado al espín de la partícula 1 (2) en la dirección \mathbf{a} (\mathbf{b}), estos observables pueden ser medidos haciendo uso de aparatos de Stern-Gerlach colocados en las trayectorias de cada una de las partículas después de separarse. Un resultado bien conocido de la mecánica cuántica^(f) es que para el sistema que estamos considerando, el valor esperado del producto de estas dos cantidades está dado por

$$\langle \sigma_1 \cdot \mathbf{a} \quad \sigma_2 \cdot \mathbf{b} \rangle = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (4)$$

Supongamos ahora que el resultado de la medición del espín de cada una de las partículas está *totalmente determinado* por la dirección de medición y por un parámetro oculto^(g) que llamaremos λ . Entonces es posible escribir los resultados de estas mediciones como funciones A y B , con posibles valores ± 1 ,

$$A(\lambda, \mathbf{a}) = \pm 1, \quad B(\lambda, \mathbf{b}) = \pm 1.$$

Esta forma de escribir las funciones implica la suposición de separabilidad y localidad, puesto que, por ejemplo, no se permite que el resultado de A dependa de la dirección \mathbf{b} .

El parámetro λ debe tener una densidad de probabilidad $\rho(\lambda)$ tal que reproduzca las predicciones estadísticas usuales de la mecánica cuántica. En particular podemos escribir

$$\begin{aligned} P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &\equiv \langle A(\lambda, \mathbf{a}) B(\lambda, \mathbf{b}) \rangle \\ &= \int A(\lambda, \mathbf{a}) B(\lambda, \mathbf{b}) \rho(\lambda) d\lambda, \end{aligned} \quad (5)$$

resultado que debe de satisfacer (4).

Dada la correlación entre los espines, sabemos que si las funciones A y B son evaluadas en *la misma* dirección, deben de cumplir

$$A(\lambda, \mathbf{a}) = -B(\lambda, \mathbf{a}),$$

lo cual permite reescribir (5) en la forma

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = - \int A(\lambda, \mathbf{a}) A(\lambda, \mathbf{b}) \rho(\lambda) d\lambda.$$

Si consideramos ahora otra dirección de medición podemos

escribir

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = - \int [A(\lambda, \mathbf{a}) A(\lambda, \mathbf{b}) - A(\lambda, \mathbf{a}) A(\lambda, \mathbf{c})] \rho(\lambda) d\lambda \\ = \int A(\lambda, \mathbf{a}) A(\lambda, \mathbf{b}) \times [A(\lambda, \mathbf{b}) A(\lambda, \mathbf{c}) - 1] \rho(\lambda) d\lambda;$$

para la última igualdad ha sido usado el hecho de que $A^2 = 1$. Dado que $A \leq 1$, podemos concluir

$$|P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \leq \int [1 - A(\lambda, \mathbf{b}) A(\lambda, \mathbf{c})] \rho(\lambda) d\lambda,$$

donde notamos de inmediato que la segunda parte de la integral es $P(\mathbf{b}, \mathbf{c})$, así que considerando que $\rho(\lambda)$ es una distribución normalizada se obtiene

$$|P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \leq 1 + P(\mathbf{b}, \mathbf{c}). \quad (6)$$

Ésta es una de las desigualdades de Bell, que es solamente una conclusión matemática basada en la forma que deben de tener las funciones y distribuciones involucradas. Sin embargo las predicciones cuánticas estipulan que $P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, con lo que debería cumplirse que

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq 1 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}. \quad (7)$$

Pero es fácil ver que existen direcciones que violan (7). Por ejemplo, considérese \mathbf{a} perpendicular a \mathbf{c} , y \mathbf{b} a un ángulo de $\pi/4$ respecto a ambos; en este caso $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$ y $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = 1/\sqrt{2}$, valores que llevan a la violación predicha.

La conclusión a la que llega Bell, y lo que es en realidad su teorema, es que no existe ningún modelo de variables ocultas que reproduzca las predicciones cuánticas, a menos que se permita que el resultado de la medición sobre una partícula dependa no sólo de la dirección en que ésta se realiza, sino también de la dirección en que se lleva a cabo la medición sobre la otra partícula —sin importar qué tan lejos estén entre sí—, lo que claramente lleva a un comportamiento no local, descrito por una función no separable. Las funciones $A(\lambda, \mathbf{a})$ y $B(\lambda, \mathbf{b})$ deberían de ser reemplazadas por funciones $A(\lambda, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ y $B(\lambda, \mathbf{b}, \mathbf{a})$, con las que la deducción de (6) pierde validez, ya que en ella se involucran tres direcciones diferentes y, por lo tanto, más de un arreglo experimental.

La dependencia de A en la dirección \mathbf{b} puede ser introducida incluso como condicionalidad, es decir que $A(\lambda, \mathbf{a})$ tomará un valor *dado que* se mide en la dirección \mathbf{b} para la otra partícula. Este punto es discutido por Szabó [11].

El principal cuestionamiento al respecto de expresiones como $A(\lambda, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ y $B(\lambda, \mathbf{b}, \mathbf{a})$ es respecto a cómo se da la transmisión de información de una partícula a otra, o de un aparato de medición al otro. Dentro de una teoría radicalmente determinista, tal objeción no aparece, ya que las propias direcciones de medición aparecerían determinadas por un pasado común, y deben expresarse como funciones del parámetro λ . De tal manera $A(\lambda, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ y

$B(\lambda, \mathbf{b}, \mathbf{a})$ se tendrían que expresar como $A[\lambda, \mathbf{a}(\lambda), \mathbf{b}(\lambda)]$ y $B[\lambda, \mathbf{b}(\lambda), \mathbf{a}(\lambda)]$, es decir $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$, expresiones que pierden todo el carácter no separable. Lo que no es un gran consuelo, puesto que si la selección de las direcciones de medición fue hecha por una persona, ésta carecería de libre albedrío dentro de tal contexto radical determinista.

Para terminar con la discusión del teorema de Bell, es conveniente puntualizar que él no consideró su teorema como una prueba de que las teorías de variables ocultas fueran imposibles, sino más bien como una aclaración de las condiciones que debería de cumplir una teoría de este tipo, es decir, que él pretendía encaminar la búsqueda, y no darla por terminada. Para una discusión extensa sobre distintos aspectos del teorema de Bell veáanse los trabajos de T.A. Brody [12–15].

1.4. Otros teoremas de no separabilidad

Después de que Bell publicó su teorema se desarrollaron otros argumentos, en los cuales también se hacía uso de estados enlazados y se planteó la manera de llevarlos a la práctica. A continuación expondré de manera breve dos pruebas que no hacen uso de desigualdades.

La primera que expondré [16] involucra un sistema de cuatro partículas, las que son el resultado del decaimiento de un sistema compuesto cuyo espín total es uno y tiene componente cero en la dirección z . El sistema original decae en dos subsistemas I y II, ambos con espín uno, después tanto I como II decaen en dos partículas de espín un medio. Una vez creadas las cuatro partículas, numeradas del uno al cuatro, el estado del sistema queda descrito por el vector de estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle_1 |+\rangle_2 |-\rangle_3 |-\rangle_4 + |-\rangle_1 |-\rangle_2 |+\rangle_3 |+\rangle_4], \quad (8)$$

donde por ejemplo $|+\rangle_1$ representa a la partícula 1 con espín un medio positivo en la dirección z . Si para este estado se mide el espín de cada partícula i en la dirección \hat{n}_i , el valor esperado del producto de estos resultados está dado por

$$E^\psi(\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3, \hat{n}_4) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 \cos\theta_4 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4 \cos(\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4). \quad (9)$$

Si tomamos los vectores \hat{n}_i sobre el plano x - y , es decir $\theta = \pi/2$, (9) se reduce a

$$E^\psi(\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3, \hat{n}_4) = -\cos(\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4). \quad (10)$$

Consideremos los siguientes casos particulares:

$$\begin{aligned} \text{Si } \phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4 = 0, \\ \text{entonces } E^\psi(\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3, \hat{n}_4) = -1, \\ \text{Si } \phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4 = \pi, \\ \text{entonces } E^\psi(\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3, \hat{n}_4) = +1. \end{aligned} \quad (11)$$

Según el enfoque realista, debería haber funciones del tipo $A_\lambda(\phi_1)$ que predijeran el resultado de la observación del espín de la partícula 1 en función de ϕ_1 y de parámetros (o

variables ocultas) λ . Si esto es cierto (11) se puede reescribir como

Si $\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4 = 0$
 entonces $A_\lambda(\phi_1)B_\lambda(\phi_2)C_\lambda(\phi_3)D_\lambda(\phi_4) = -1,$ (12)

Si $\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4 = \pi$
 entonces $A_\lambda(\phi_1)B_\lambda(\phi_2)C_\lambda(\phi_3)D_\lambda(\phi_4) = +1.$

Algunas implicaciones de la primera parte de (12) son

$A_\lambda(0)B_\lambda(0)C_\lambda(0)D_\lambda(0) = -1,$ (13)

$A_\lambda(\phi)B_\lambda(0)C_\lambda(\phi)D_\lambda(0) = -1,$ (14)

$A_\lambda(\phi)B_\lambda(0)C_\lambda(0)D_\lambda(\phi) = -1,$ (15)

$A_\lambda(2\phi)B_\lambda(0)C_\lambda(\phi)D_\lambda(\phi) = -1.$ (16)

Utilizando (13) y (14) obtenemos

$A_\lambda(0)C_\lambda(0) = A_\lambda(\phi)B_\lambda(\phi),$

de (13) y (15)

$A_\lambda(0)D_\lambda(0) = A_\lambda(\phi)D_\lambda(\phi).$

Consecuentemente

$\frac{C_\lambda(0)}{D_\lambda(0)} = \frac{C_\lambda(\phi)}{D_\lambda(\phi)},$

que se puede reescribir como

$C_\lambda(0)D_\lambda(0) = C_\lambda(\phi)D_\lambda(\phi),$ (17)

dado que cualquiera de estas funciones sólo toma los valores +1 y -1, por lo que es lo mismo dividir entre ellas que multiplicar por ellas. Usando este último resultado en (16) se llega a

$A_\lambda(2\phi)B_\lambda(0)C_\lambda(0)D_\lambda(0) = -1,$

que en combinación con (13) implica

$A_\lambda(2\phi) = A_\lambda(0) = \text{constante para toda } \phi.$

A pesar que aún no se ha llegado a una contradicción matemática, el que $A_\lambda(\phi)$ sea independiente de ϕ ya resulta sorprendente, puesto que si esperamos que esta función represente el valor de la medición del espín en la dirección dada por ϕ , esperaríamos que esta función evaluada en 0 fuera justamente el negativo de su evaluación en π . Para corroborar que el resultado es inaceptable desde el punto de vista matemático, basta con usar (12) para concluir que

$A_\lambda(\theta + \pi)B_\lambda(0)C_\lambda(\theta)D_\lambda(0) = +1,$

que al combinarse con (14) da

$A_\lambda(\theta + \pi) = -A_\lambda(\theta),$

lo que confirma la contradicción predicha. El resultado nos lleva a pensar en una contradicción en las suposiciones hechas sobre las funciones que consideramos que determinarían el valor de las mediciones del espín de las partículas.

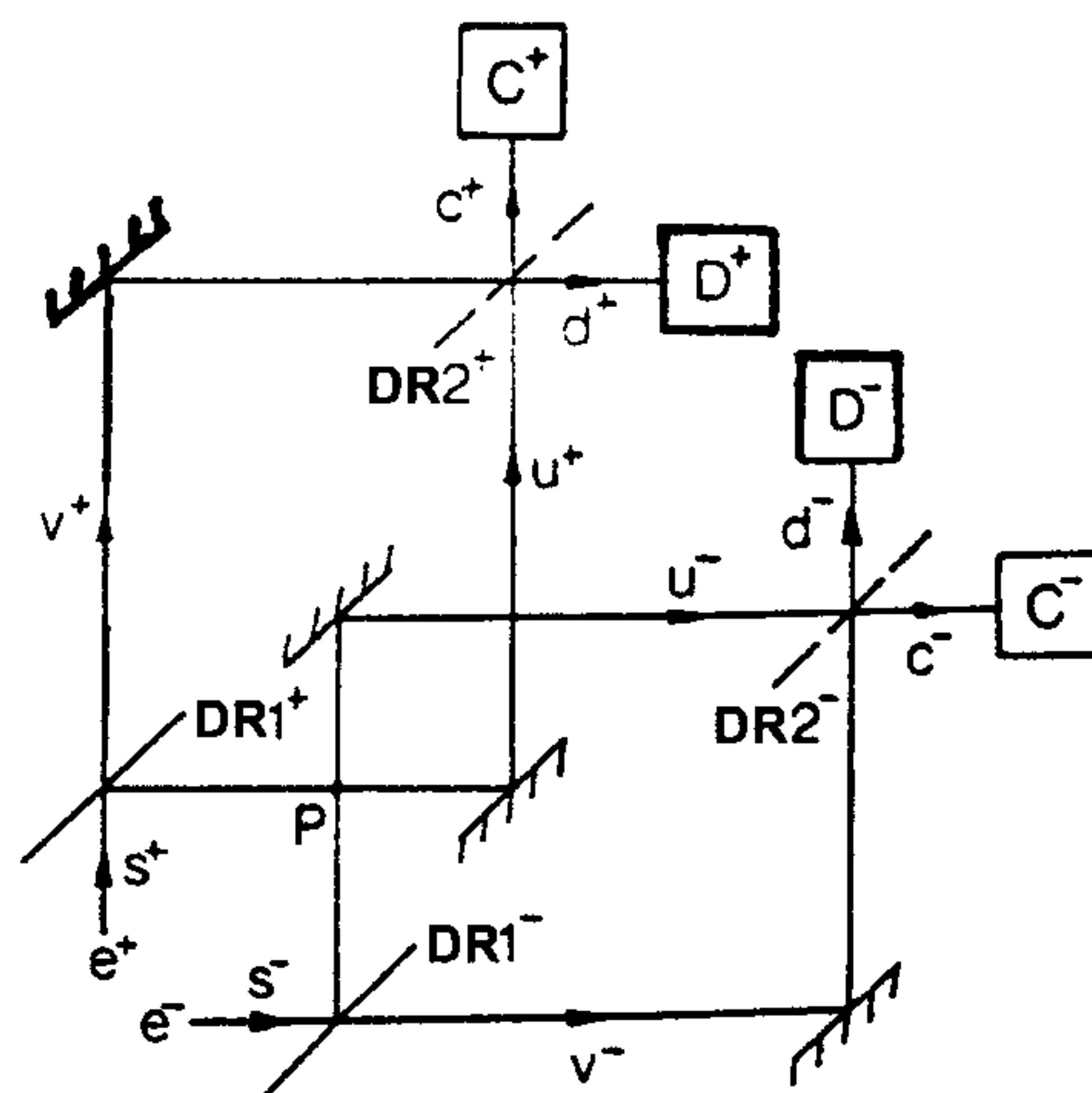


FIGURA 1. Interferómetros sobrepuestos para el experimento realizado por Hardy.

La segunda prueba que deseamos analizar es la propuesta por Lucien Hardy [17], y hace uso de dos interferómetros de partículas, uno para electrones y otro para positrones. Cada uno de ellos está ajustado para que al funcionar por separado se produzca interferencia totalmente destructiva, y en consecuencia no se produzca ninguna detección en D^\pm o en C^\pm (ver Fig. 1).

El arreglo experimental consiste en sobreponer los aparatos como se muestra en la Fig. 1, donde los divisores de rayos $DR2^\pm$ son removibles. Analizando el funcionamiento de cada interferómetro vemos que al pasar por $DR1^\pm$ el estado $|S^\pm\rangle$ se modifica, es decir,

$|S^\pm\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (i|u^\pm\rangle + |v^\pm\rangle);$ (18)

y posteriormente en $DR2^\pm$

$|u^\pm\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|c^\pm\rangle + i|d^\pm\rangle),$ (19)

$|v^\pm\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (i|c^\pm\rangle + |d^\pm\rangle).$ (20)

Los factores i que corresponden a cambios de fase son consecuencia de las reflexiones. En caso de que los divisores de rayos $DR2^\pm$ no se encuentren en su lugar tenemos

$|u^\pm\rangle \rightarrow |c^\pm\rangle,$ (21)

$|v^\pm\rangle \rightarrow |d^\pm\rangle.$ (22)

Para el funcionamiento del dispositivo se produce un par electrón-positrón a la entrada de ambos interferómetros, así cada partícula entra de manera simultánea en el aparato correspondiente. El estado inicial está dado por $|S^+\rangle |S^-\rangle$, el cual sufre una evolución en consecuencia de (18), esto es,

$|S^+\rangle |S^-\rangle \rightarrow \frac{1}{2} (i|u^+\rangle + |v^+\rangle) (i|u^-\rangle + |v^-\rangle).$ (23)

Parte de este estado indica que las partículas coincidirán y se aniquilarán en el punto P produciendo un fotón, es decir que $|u^+\rangle|u^-\rangle \rightarrow |\gamma\rangle$, con lo que

$$|S^+\rangle|S^-\rangle \rightarrow \frac{1}{2} (-|\gamma\rangle + i|u^+\rangle|v^-\rangle + i|v^+\rangle|u^-\rangle + |v^+\rangle|v^-\rangle). \quad (24)$$

Ante la posibilidad de remover los divisores de rayos DR2 $^\pm$ debemos analizar los distintos casos que se pueden presentar a partir de este punto, lo que hacemos a continuación.

- a) Si ambos divisores de rayos están ausentes el estado evoluciona a

$$\frac{1}{2} (-|\gamma\rangle + i|c^+\rangle|d^-\rangle + i|d^+\rangle|c^-\rangle + |d^+\rangle|d^-\rangle). \quad (25)$$

- b) Colocando solamente DR2 $^+$:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} (-\sqrt{2}|\gamma\rangle - |c^+\rangle|c^-\rangle + 2i|c^+\rangle|d^-\rangle + i|d^+\rangle|c^-\rangle). \quad (26)$$

- c) Colocando solamente DR2 $^-$:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} (-\sqrt{2}|\gamma\rangle - |c^+\rangle|c^-\rangle + i|c^+\rangle|d^-\rangle + 2i|d^+\rangle|c^-\rangle). \quad (27)$$

- d) Colocando tanto DR2 $^+$ como DR2 $^-$ obtenemos

$$\frac{1}{4} (-\sqrt{2}|\gamma\rangle - 3|c^+\rangle|c^-\rangle + i|c^+\rangle|d^-\rangle + i|d^+\rangle|c^-\rangle - |d^+\rangle|d^-\rangle). \quad (28)$$

Como de costumbre, la noción de realismo^(h) se introduce al considerar que existen funciones que dependen tanto de variables ocultas como de la situación de los divisores DR2 $^\pm$, y que pueden indicar con certeza si habrá o no detecciones en D $^\pm$ o C $^\pm$. Denotaremos tales funciones con $D^+(0, \lambda)$, con posibles valores +1 y -1. En esta notación el 0 indica que el divisor DR2 $^+$ se encuentra colocado; la manera de indicar que este divisor está ausente será colocando ∞ en lugar del 0. Además del enfoque realista se está introduciendo el principio de localidad, puesto que, por ejemplo, el valor de la función $C^-(\infty, \lambda)$ no depende de si el divisor de rayos DR2 $^-$ está en su lugar o no. A continuación veremos cómo es que estas hipótesis llevan a una contradicción con las predicciones cuánticas.

Dado que en (25) no existe el término $|c^+\rangle|c^-\rangle$, podemos deducir que para todo experimento que cumpla con las condiciones supuestas se tiene que

$$C^+(\infty, \lambda)C^-(\infty, \lambda) = 0. \quad (29)$$

Dada (26) vemos que

$$D^+(0, \lambda) = 1 \Rightarrow C^-(\infty, \lambda) = 1, \quad (30)$$

puesto que la función de onda se colapsa en un solo término. Así mismo, tomando (27),

$$D^-(0, \lambda) = 1 \Rightarrow C^+(\infty, \lambda) = 1. \quad (31)$$

Al revisar (28) notamos que $D^+(0, \lambda)D^-(0, \lambda) = 1$ para 1/16 de los experimentos, lo cual implica en consecuencia de (30) y (31) que $C^+(\infty, \lambda)C^-(\infty, \lambda) = 1$ para el mismo número de experimentos. Sin embargo esto es contradictorio con (29). Con esto Hardy concluye que la hipótesis de realismo local se contradice con las predicciones cuánticas.

Es importante notar aquí que entre líneas está la hipótesis de que

$$D^+(0, \lambda)D^-(0, \lambda) = 1 \Rightarrow C^+(\infty, \lambda)C^-(\infty, \lambda) = 1. \quad (32)$$

Esto es inadmisibles desde cierto punto de vista, puesto que la parte izquierda de la implicación se refiere a una situación experimental en la que ambos divisores de rayos están presentes, situación muy diferente a la que valida la parte derecha, para la cual ambos divisores están ausentes. A esto se le llama "argumento contrafactual": se realiza un experimento y se infiere lo que hubiera pasado si se hubiera realizado el experimento en condiciones distintas.

Existen muchos otros "teoremas de no localidad", que es como se ha llamado a las derivaciones de contradicciones entre las predicciones cuánticas y los postulados de realismo y localidad, la mayor parte de los cuales son argumentos análogos a los ya presentados. Como ya se mencionó antes, uno de los aspectos más importantes de todas estas deducciones teóricas, es que permiten llevar al plano experimental el cuestionamiento al respecto de la localidad y el realismo. Así que llega el momento de analizar los experimentos que se han llevado a cabo hasta la fecha.

2. Realización experimental

2.1. Tipos de experimentos

En el campo experimental relacionado con localidad y realismo hay dos tipos de realizaciones que difieren de manera sustancial.

El primer tipo comprende los experimentos cuyos dispositivos no se modifican durante cada corrida experimental, es decir, que las direcciones de medición, las fuentes, etc., no cambian mientras se están llevando a cabo las mediciones. Esto es importante, puesto que los experimentos tratan de ver cómo es que las mediciones sobre diferentes partes del sistema pueden afectarse entre sí.

Por ejemplo, una pregunta es cómo afecta a la medición C realizada sobre una parte I del sistema, el que sobre otra parte II de éste se efectúe la medición A o la medición B.

Supongamos que el experimento verifica que la medición sobre I depende de cuál fue la medición realizada sobre II, aunque éstas se hagan a gran distancia una de otra.⁽²⁾ Dado el tipo de experimento *es posible* afirmar que cada medición es afectada por todo el dispositivo experimental, ya que toda parte de éste ha estado en su posición correspondiente el tiempo suficiente para repercutir en todas ellas. Entonces, el que se disponga todo para que la medición A sea realizada podría afectar la medición C.

El otro tipo de experimento comprende los dispositivos que sí cambian durante la corrida experimental. Retomando las mediciones mencionadas en el párrafo anterior, supongamos que la decisión de medir A o de medir B se toma un tiempo t antes de medir C, y t es tal que $ct \leq d$, donde d es la separación espacial entre los lugares donde se localizan I y II. Vemos que, para que la elección de medir A o B afecte a C, es necesario que algún tipo de interacción se propague con velocidad mayor que la de la luz, lo que queda prohibido por la teoría de la relatividad. De tal suerte que si un experimento de este tipo confirma que las mediciones realizadas en partes remotas del sistema se afectan entre sí, esto implica una violación de la localidad.

2.2. Experimentos del primer tipo

A continuación discutiremos un tipo de experimento que se ha realizado en diversas ocasiones con mínimas variantes [18] y que fue el primero en llevarse a cabo. Las partículas usadas en estos experimentos fueron fotones (con todas las implicaciones de asumirlos como partículas), y los observables correlacionados fueron las polarizaciones en lugar de los espines.

Producir pares de fotones con polarizaciones correlacionadas es simple. Por ejemplo un pion, que es una partícula de espín cero y paridad negativa, decae espontáneamente en dos fotones, cuyo estado puede ser descrito por

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x\rangle_{-z} |y\rangle_z + |y\rangle_{-z} |x\rangle_z), \quad (33)$$

donde, por ejemplo, $|x\rangle_{-z}$ se refiere a un fotón polarizado en la dirección x y viajando en la dirección $-z$. De esta manera si se mide la polarización de uno de los fotones y se encuentra paralela a x , se puede deducir de (33) que la polarización del otro fotón será paralela a y .

La manera de determinar la polarización de un fotón es haciéndolo incidir sobre un polarizador; si lo atraviesa se considera que su polarización es paralela al eje del polarizador (a este resultado se le asigna el valor +1); si no lo hace se deduce que la polarización era perpendicular (a este resultado se le asigna el valor -1). Para el estado (33) si uno de los fotones atraviesa un polarizador P_I con su eje en la dirección x , el otro fotón del par atravesará con certeza un polarizador P_{II} que sea colocado con su eje en la dirección y . Un resultado simple de la mecánica cuántica es que para orientaciones diferentes a y del eje de P_{II} , la probabilidad de que el fotón lo

atraviere (dado que el otro fotón atravesó P_I) está dada por

$$p = \cos^2 \theta, \quad (34)$$

donde θ es el ángulo entre el eje y y el eje de P_{II} .

En muchos de los métodos de producción de pares de fotones éstos no viajan en dirección opuesta, pero sí mantienen la correlación entre sus polarizaciones, así que en general hablaremos de los fotones I y II en lugar de z y $-z$.

Denotamos como $p_{\pm\pm}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ la probabilidad de obtener *conjuntamente* el valor ± 1 al medir la polarización del fotón I en la dirección \mathbf{a} (escribiremos esto como $A = \pm 1$) y el valor ± 1 al medir la polarización del fotón II en la dirección \mathbf{b} (escribiremos esto como $B = \pm 1$). A partir de esta cantidad definimos la siguiente función:

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = p_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + p_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - p_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - p_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad (35)$$

que es claramente el valor esperado del producto AB , y cumple con todas las características necesarias para ser analizado partiendo de (5). En este caso la predicción cuántica para $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta, \quad (36)$$

donde θ es el ángulo entre las direcciones \mathbf{a} y \mathbf{b} .

A continuación definimos la cantidad

$$S = P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + P(\mathbf{b}', \mathbf{b}) + P(\mathbf{b}', \mathbf{c}), \quad (37)$$

que involucra la medición en cuatro direcciones distintas. El resultado de hacer una generalización [19] de la desigualdad (6) para que involucre una dirección más es

$$-2 \leq S \leq 2. \quad (38)$$

Sin embargo, para algunas orientaciones la predicción cuántica viola esta desigualdad. Por ejemplo, para $\mathbf{a} \angle \mathbf{b} = \mathbf{b}' \angle \mathbf{b} = \mathbf{b}' \angle \mathbf{c} = 22.5^\circ$ y $\mathbf{a} \angle \mathbf{c} = 67.5^\circ$ se obtiene $S = 2\sqrt{2}$, que es el valor máximo que alcanza S según la predicción cuántica.

En principio bastaría con determinar S por medios experimentales para establecer si se da o no una violación de (38), pero para esto se requiere medir P para los diferentes pares de direcciones, lo que no es posible directamente por la naturaleza estadística de P . Para obtener P se precisa conocer cuántos pares *totales* de fotones fueron emitidos por la fuente durante el experimento, además de cuántos fotones atravesaron cada polarizador y cuántos fueron absorbidos; con estas cantidades es fácil calcular los cocientes involucrados y conseguir el resultado para P . Pero justamente el problema es que *ninguna* de estas cantidades se conoce, ya que la eficiencia cuántica de los detectores es muy baja (aproximadamente 40% para los detectores más desarrollados, y mucho menos en los detectores usados en los primeros experimentos).

El siguiente paso es encontrar P en función de conteos que sí se puedan realizar.

En la mayor parte de los experimentos el dispositivo para realizar los conteos consta de polarizadores seguidos por detectores, de tal manera que lo único que podemos contar en cada corrida experimental son detecciones en coincidencia para un juego de polarizaciones. Por ejemplo, cuántas detecciones en coincidencia se registran en un tiempo t (el mismo para todos los conteos) cuando ambos polarizadores están en su lugar con orientaciones \mathbf{a} y \mathbf{b} , cantidad denotada como $N(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ o, en otro caso, cuando un polarizador está en su lugar con una dirección \mathbf{a} y el otro está ausente, cantidad denotada como $N(\mathbf{a}, \infty)$, etc. La hipótesis que se suele hacer es

$$p_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \approx \frac{N(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{N(\infty, \infty)},$$

$$p_{++}(\infty, \mathbf{b}) \approx \frac{N(\infty, \mathbf{b})}{N(\infty, \infty)}. \quad (39)$$

Para las demás cantidades involucradas en (35) se hace uso de fórmulas como

$$p_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = p_{++}(\mathbf{a}, \infty) - p_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad (40)$$

y otras similares, donde cabe notar que ambas cantidades en el lado derecho son calculables a partir de conteos de coincidencias, mientras que la cantidad del lado izquierdo no. Usando lo anterior es fácil ver que

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \approx \frac{4N(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{N(\infty, \infty)} - \frac{2N(\mathbf{a}, \infty)}{N(\infty, \infty)} - \frac{N(\infty, \mathbf{b})}{N(\infty, \infty)} + 1. \quad (41)$$

$P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ha quedado expresada en términos de cantidades medibles.

Un buen número de experimentos se han llevado a cabo con estas aproximaciones, y se ha corroborado la violación de (38) y confirmado las predicciones cuánticas. Sin embargo, los resultados de estos experimentos son dudosos dada la naturaleza de las hipótesis adicionales, en torno a lo cual se discutirá más adelante.

Un primer punto débil del planteamiento anterior es que no hay manera de realizar directamente conteos para polarizaciones perpendiculares a los ejes de los polarizadores, lo

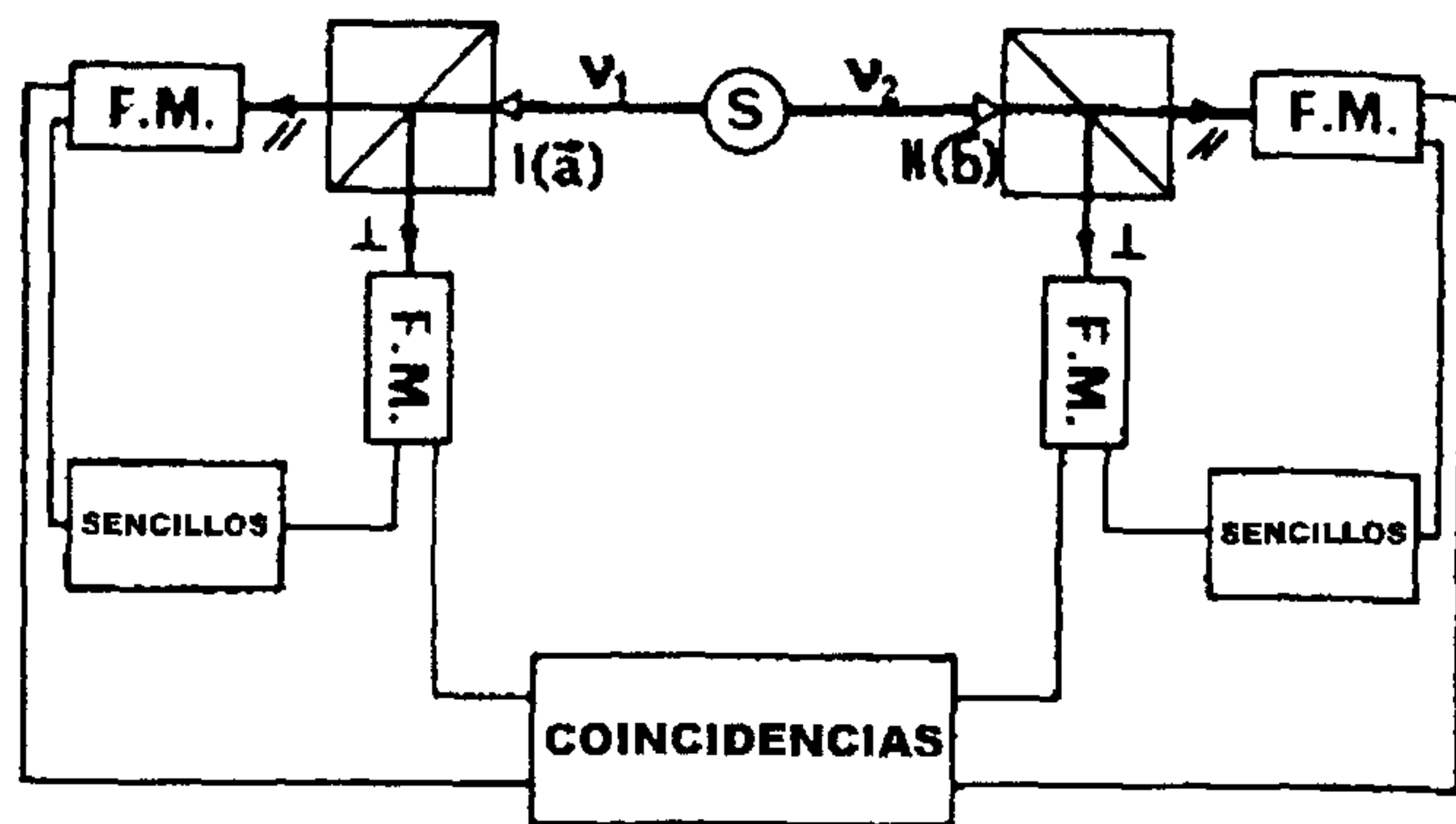


FIGURA 2. Dispositivo para realizar mediciones dicotómicas.

cual podría causar polémica sobre el cálculo de $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, ya que en las identidades tipo que se utilizan están involucradas cantidades referentes a contextos experimentales diferentes, como es notorio en (40). Para evitar esto, en julio de 1982 Alain Aspect y su grupo llevaron a cabo un experimento [20] también del primer tipo, cuyo esquema se muestra en la Fig. 2, donde afirman que realizan mediciones verdaderamente dicotómicas.

La diferencia fundamental es que en este experimento en lugar de usar polarizadores seguidos de detectores, se colocan "cubos polarizadores", cada uno formado por dos prismas unidos, y una capa de material dieléctrico entre ellos. Lo que se desea es obtener coeficientes de reflexión y transmisión perfectos, es decir $T^{\parallel} = R^{\perp} = 1$ y $T^{\perp} = R^{\parallel} = 0$, de tal manera que toda radiación electromagnética con polarización paralela sea transmitida y la que tenga polarización perpendicular sea reflejada. Cada cubo tendrá entonces dos direcciones de emisión (correspondientes a cada polarización) y cada una es monitoriada por un detector, como se muestra en la Fig. 2.

Todo esto está montado sobre un mecanismo que puede girar sobre el eje de incidencia de la fuente, por lo que se pueden elegir polarizaciones en las direcciones \mathbf{a} y \mathbf{b} con las que se ha estado trabajando con anterioridad. Con este arreglo es posible realizar cualquier conteo de coincidencias, por lo que se puede *aproximar*

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \approx \frac{N_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + N_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - N_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - N_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{N_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + N_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + N_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + N_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b})}, \quad (42)$$

donde los subíndices indican la polarización paralela o perpendicular a las direcciones en el argumento. Esta expresión es intrínsecamente aproximada por que no es posible garantizar que el denominador sea el número total de pares que arribó a los cubos polarizadores, dada, nuevamente, la baja eficiencia de los detectores.

En la práctica este experimento fue realizado con un proceso de cascada; se excita una muestra de calcio-40 por absorción fotónica, que se deja en un estado con $J = 0$, el cual decae emitiendo un fotón ($\lambda_1 = 551.3$ nm) a un estado intermedio con $J = 1$ y vida media de 5 ns, que a su vez decae

emitiendo otro fotón ($\lambda_2 = 422.7$ nm) a un estado con $J = 0$. Claramente la polarización de los fotones está correlacionada por la conservación de momento angular. Los coeficientes de los cubos polarizadores fueron: para λ_1 , $T^{\parallel} = R^{\parallel} = 0.950$ y $T^{\perp} = R^{\perp} = 0.007$, mientras que para λ_2 , $T^{\perp} = R^{\parallel} = 0.930$ y $T^{\parallel} = R^{\perp} = 0.007$, todos los valores con una incertidumbre de ± 0.005 . Para obtener la misma eficiencia de detección en los conteos, es necesario ajustar las ganancias de los detectores en 2×10^{-3} para λ_1 y 10^{-3} para λ_2 . Frente a cada

detector se coloca un filtro de longitud de onda de 422 nm ó 551 nm. Dos detecciones se consideran en coincidencia si se presentan con una diferencia de menos de 20 ns una de la otra; a este intervalo se le llama “ventana de coincidencia”.

Con todas estas especificaciones el valor de S encontrado para $\mathbf{a}\angle\mathbf{b} = \mathbf{b}'\angle\mathbf{b} = \mathbf{b}'\angle\mathbf{c} = 22.5^\circ$ y $\mathbf{a}\angle\mathbf{c} = 67.5^\circ$ es de 2.697 ± 0.015 , que viola claramente la desigualdad (38) y concuerda con bastante precisión con la predicción cuántica apropiada al experimento, $S = 2.70 \pm 0.05$ (ver Ref. 20).

Aún en este experimento hay muchas hipótesis cuestionables, pero este análisis se hará más adelante.

2.3. Segundo tipo de experimentos

En diciembre de 1982 Alain Aspect y su grupo llevaron a cabo otro experimento [21], en el cual se hacía uso de analizadores que varían en el tiempo; sin embargo no empleó los medidores dicotómicos del experimento del mes de julio del mismo año.

Pensemos en un estado enlazado de dos fotones y consideremos dos eventos: uno de ellos es fijar la dirección en la que se medirá la polarización de uno de los fotones y realizar dicha medición; el segundo evento es fijar la dirección en la que se medirá la polarización del otro fotón y medirla. Si se logra imponer una separación de tipo espacial entre estos dos eventos, en principio no hay manera de que la dirección en que se mida la polarización de uno de los fotones del par afecte la medición sobre el otro, puesto que, según el principio de relatividad, no hay información que se transmita más rápido que la velocidad de la luz.

El reto tecnológico es claro; los tiempos en que se debe de cambiar la dirección de medición son muy cortos, ya que la distancia entre los lugares donde se realizan las mediciones son del orden de unos cuantos metros (en la mayoría de los experimentos). Rotar un polarizador en cuestión de nanosegundos es muy difícil, por lo que Aspect usó conmutadores ópticos. Por medio de interacción óptico-acústica entre una onda electromagnética y una onda estacionaria ultrasónica en agua, se consigue desviar un cierto ángulo el rayo óptico incidente. La desviación ocurre solamente cuando la amplitud de la onda estacionaria es máxima, lo que pasa dos veces por cada periodo acústico. Un cuarto de periodo después de que la amplitud es máxima, ésta se hace nula, por lo que el rayo no se desvía y es totalmente transmitido, así que un cambio de dirección se presenta cuatro veces por periodo. La frecuencia de la onda ultrasónica es de 25 MHz, con lo que es posible realizar cambios de dirección del rayo en tiempos de nanosegundos.

Para completar el dispositivo se coloca un conmutador en la trayectoria de los fotones correlacionados, C_I para el fotón I y C_{II} para el fotón II. Se colocan polarizadores a lo largo de cada “canal” de salida del conmutador C_I (C_{II}) con sus ejes alineados en las direcciones \mathbf{a} y \mathbf{a}' (\mathbf{b} y \mathbf{b}'); cada polarizador está seguido por un fotomultiplicador. Para obtener los fotones correlacionados se usa una vez más el proceso de cascada en calcio-40.

Para este experimento se hace una generalización de las desigualdades de Bell un tanto diferente [22]. No se parte del principio de que la medición sobre un fotón no puede afectar la medición sobre el otro; en este caso *se deduce* tal afirmación, haciendo uso de la separación de tipo espacial entre los eventos y suponiendo que los cambios de dirección en los diferentes conmutadores son eventos no correlacionados. La deducción es un poco larga, y no aporta elementos nuevos, así que me limitaré a dar el resultado final —para los detalles ver Ref. 22.

Se obtiene

$$-1 \leq S \leq 0, \quad (43)$$

con

$$S = \frac{N(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{N(\infty, \infty)} - \frac{N(\mathbf{a}, \mathbf{b}')}{N(\infty, \infty')} + \frac{N(\mathbf{a}', \mathbf{b})}{N(\infty', \infty)} + \frac{N(\mathbf{a}', \mathbf{b}')}{N(\infty', \infty')} - \frac{N(\mathbf{a}', \infty)}{N(\infty', \infty)} - \frac{N(\infty, \mathbf{b})}{N(\infty, \infty)}, \quad (44)$$

desde luego el símbolo de infinito primado se refiere a la ausencia del polarizador en el canal primado correspondiente.

Los numeradores de los primeros cuatro términos son medidos en una sola corrida experimental, mientras que los dos numeradores restantes, así como todos los denominadores tienen que ser medidos en corridas auxiliares independientes.

El experimento se efectuó dos veces para valores de los ángulos: $\mathbf{a}\angle\mathbf{b} = \mathbf{a}'\angle\mathbf{b} = \mathbf{a}'\angle\mathbf{b}' = 22.5^\circ$ y $\mathbf{a}\angle\mathbf{b}' = 67.5^\circ$, y el promedio resultó, después de un intrincado proceso de reelaboración de los datos estadísticos, en un valor para S de 0.101 ± 0.020 , que viola la desigualdad (43) por cinco desviaciones estándar. La predicción cuántica para este experimento es de $S = 0.112$.

Llega el momento de analizar la validez de estos resultados. En el único sentido en que se puede dudar de ellos es analizando las hipótesis experimentales, puesto que todos estos experimentos han sido realizados con gran cuidado y repetidamente. En todos ellos hay muchas consideraciones que se están pasando por alto y que deben ser discutidas con detalle.

3. Críticas a la realización experimental

Los problemas de los experimentos realizados provienen de las hipótesis adicionales que se usan para superar las imperfecciones de los dispositivos, tales como detectores con baja eficiencia, polarizadores no perfectos, etc. Así que se hará un listado de tales hipótesis, señalando en cada caso las dificultades. Estas hipótesis han sido recolectadas de diversos trabajos en los cuales se les analizan [23–25].

3.1. Hipótesis experimentales

3.1.1. Ausencia de reforzamiento de la señal por parte de los polarizadores

Esta es una de las hipótesis de mayor polémica, ya que en todos los experimentos se considera que las tasas de detec-

ción sólo pueden ser disminuidas por la presencia de los polarizadores. A primera vista parece razonable, pero es cierto que los polarizadores podrían producir un efecto de interferencia *constructiva* entre la señal proveniente de la fuente y la radiación de fondo, la cual debe de ser tomada en cuenta. Ninguno de los experimentos realizados a la fecha está libre de este cuestionamiento, ya que por el carácter estocástico de la radiación de fondo es muy difícil su análisis.

3.1.2. Eficiencia de detección independiente de las variables ocultas

Para el análisis experimental es necesario considerar que la eficiencia de detección no depende de la variable oculta. Si algunos valores de las variables ocultas fueran favorecidos al momento de la detección, el número de conteos en coincidencia no aumentaría o disminuiría proporcionalmente al número de fotones que atravesaran los polarizadores simultáneamente, dado que el conteo se vería aumentado o disminuido también dependiendo de si sus variables ocultas tienen valores que son favorecidos o no al momento de la detección. La violación de esta hipótesis invalidaría el tratamiento estadístico de los experimentos.

3.1.3. Invarianza rotacional

Se supone que cada posible valor de la variable oculta es igualmente frecuente. Esto implicaría que por parte de la fuente no hay ninguna dirección de polarización preferencial, pero dado que la fuentes son de tamaños macroscópicos, éste podría no ser el caso. Esto tiene gran trascendencia, ya que para todos los experimentos se supone que lo único relevante para los conteos es la orientación relativa de los polarizadores, suposición que fallaría en caso de que hubiera una dirección de polarización con mayor tasa de emisión.

3.1.4. Los detectores están caracterizados del todo por sus eficiencias cuánticas

Se parte del principio de que todas las señales tienen la misma probabilidad de ser detectadas. En caso de que esto no se cumpliera, sino que las señales fueran favorecidas dependiendo de características que varían caso a caso y no están incluidas entre las variables ocultas, nuevamente los resultados no serían representativos. La mecánica cuántica no incluye estas posibles "características" en su descripción, ya que todas las señales (en estos experimentos) son fotones, idénticos entre ellos. Sin embargo si se considera la posibilidad de que sean campos electromagnéticos, esta suposición no tiene por qué ser válida. En la búsqueda legítima de explicaciones ésta es una puerta que no debe de ser cerrada, de lo contrario se parte con un prejuicio a cuestas.

3.1.5. Ausencia de problemas de sincronización

Se supone que todos los fotones toman el mismo tiempo entre su emisión y su detección, excepto por variaciones meramen-

te aleatorias. Un tratamiento sistemático y detallado del proceso de detección podría indicar que las señales "pequeñas" toman más tiempo en ser detectadas, por lo que tendrían un retraso adicional que podría llevar a que estos conteos no se consideraran en coincidencia, modificando los resultados. Nuevamente el análisis cuántico descarta esto, puesto que todas las señales son fotones.

3.1.6. Ley de Malus

Se supone que la probabilidad de detección de una señal con polarización a un ángulo η del eje del polarizador es proporcional a $\cos^2 \eta$. Esta es una hipótesis de la teoría cuántica de la detección basada en el resultado empírico que involucra la detección de ondas electromagnéticas completas, por lo que los detectores de fotones simples se diseñan para que las frecuencias de detección sigan esta ley. El verificar el cumplimiento de la ley de Malus no es otra cosa más que corroborar que los detectores se diseñaron con tal propósito. Esto hace pensar que se podrían estar forzando los resultados a ser lo que creemos que deben de ser.

3.1.7. Muestreo representativo

Esta hipótesis es central y se refiere al hecho de que se considera que la muestra de pares analizados es representativa del comportamiento general, lo cual fallaría si alguna de las seis hipótesis anteriores fuera violada. Por otro lado, todo experimento que involucre la detección de partículas se ve afectado por la presencia de "ruido", el cual dispara los detectores generando conteos accidentales que no pueden ser distinguidos de los originados por la fuente. En corridas experimentales auxiliares se cuenta el número de detecciones en coincidencia cuando la fuente no está en su lugar, se obtiene un promedio, y este se considera el número de conteos accidentales que deben de sustraerse de los demás conteos. Para verificar parte del análisis estadístico también se determinan los conteos sencillos en cada detector cuando la fuente no está presente, cantidad que deberá de ser sustraída de los conteos sencillos totales cuando la fuente esté presente. Se supone que estos números serán los mismos durante todas las corridas experimentales.

Si el ruido pudiera tener algún tipo de interferencia, constructiva o destructiva, con la emisiones de la fuente, el número de detecciones accidentales podría ser modificado por la presencia de ésta. Por otro lado hay que considerar que la fuente está constituida por muchos átomos. Sólo una fracción de los pares de fotones son emitidos en direcciones exactamente opuestas, por lo que los conteos en coincidencia pueden ser causados por un fotón proveniente de un átomo, cuya pareja salió por ejemplo a un ángulo de $\pi/2$ y no entró en el otro detector, y otro fotón proveniente de otro átomo cuya pareja se perdió también. Esto claramente aumenta los conteos accidentales en coincidencia cuando la fuente está presente. Dadas estas consideraciones la manera en que se determinó el número de conteos accidentales en coincidencia podría perder validez.

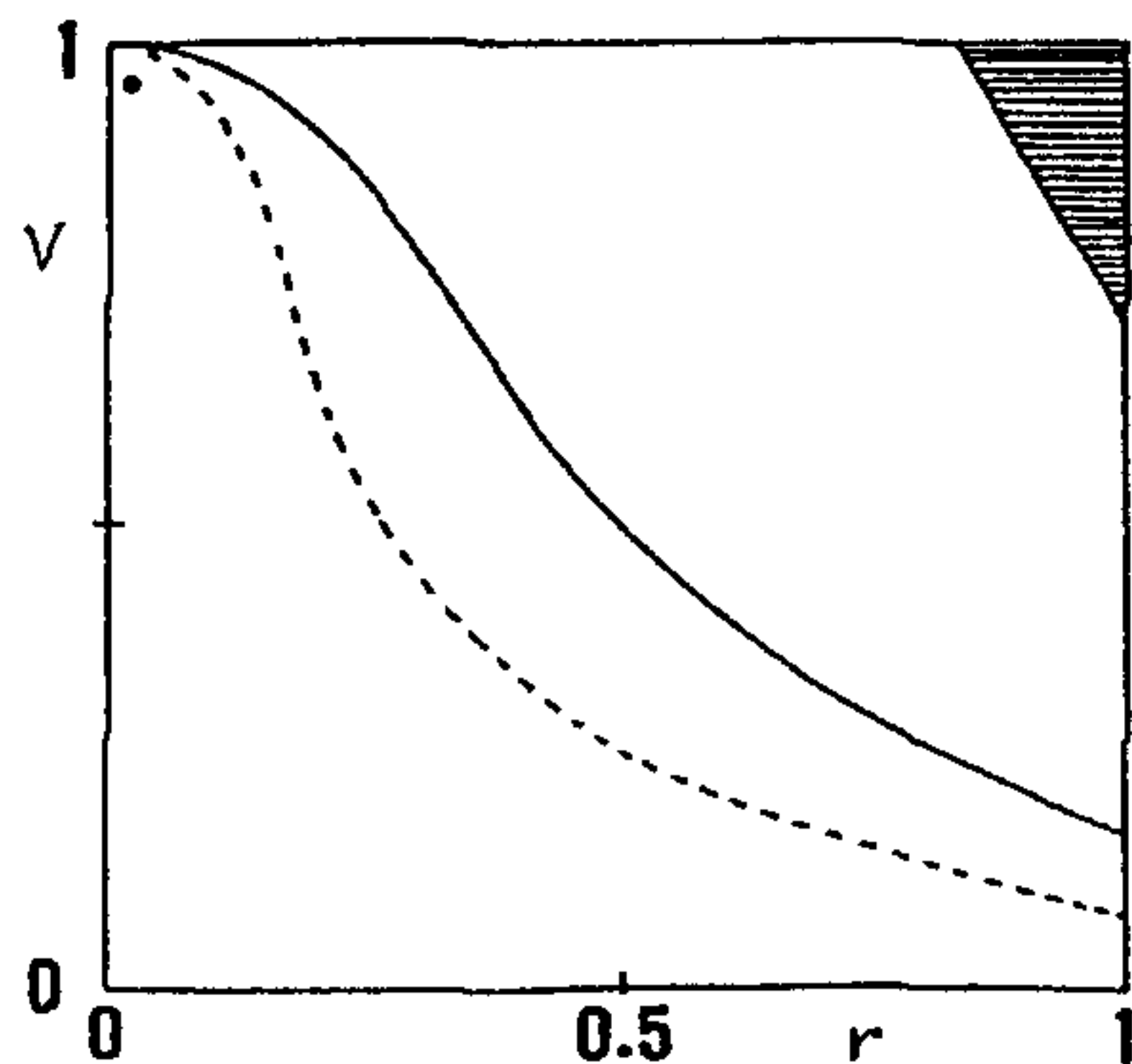


FIGURA 3. La zona hachurada es la prohibida por las desigualdades de Bell. Los experimentos se han realizado en la zona señalada con un punto negro.

La trascendencia de este punto se ve en que los resultados directos (sin sustracciones) de la mayor parte de los experimentos *no* violan las desigualdades de Bell, es decir, que al introducir estos datos en las fórmulas de las desigualdades, éstas no resultan violadas. Este punto se discutirá al final de la siguiente sección.

3.2. Consecuencias de las hipótesis experimentales

Emilio Santos ha hecho ver que, como consecuencia de la posible falla de las hipótesis citadas en la sección anterior, los resultados experimentales obtenidos no contradicen la localidad y el realismo [23], ya que para que esto pasara serían necesarias dos cosas;

- 1) Que $N(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ fuera una función senoidal del ángulo entre \mathbf{a} y \mathbf{b} .
- 2) Que el cociente^(j) $N(\mathbf{a}, \mathbf{b}) / (N(\mathbf{a}) + N(\mathbf{b}))$ sea muy cercano a $1/4$.

Usualmente en los experimentos se verifica la primera. La segunda, que es para validar rigurosamente las aproximaciones hechas en expresiones como (39), (40) y (41), falla dramáticamente, dado que este cociente en la mayoría de los experimentos es menor que $1/100$.

Podemos hacer una gráfica, donde en el eje horizontal se represente el valor $r = 4N(\mathbf{a}, \mathbf{b}) / (N(\mathbf{a}) + N(\mathbf{b}))$, cantidad que toma valores entre cero y uno. En el otro eje representamos un parámetro V que mide la sencibilidad, algo así como que tanto la curva es una senoide.^(k) En la Fig. 3, se muestra hachurada la zona prohibida por las desigualdades de Bell en la esquina superior derecha, así que para que el realismo y la localidad fueran refutados, los resultados de los experimentos tendrían que estar en esta zona. Los resultados usuales, por ejemplo los resultados del experimento de Aspect, están en la zona marcada con un círculo en la esquina superior izquierda. De aquí Santos concluye que estos resultados no son suficientes para afirmar que la localidad ha sido violada.

Todos los resultados que no estén en la zona prohibida, pueden ser explicados en términos de modelos realistas loca-

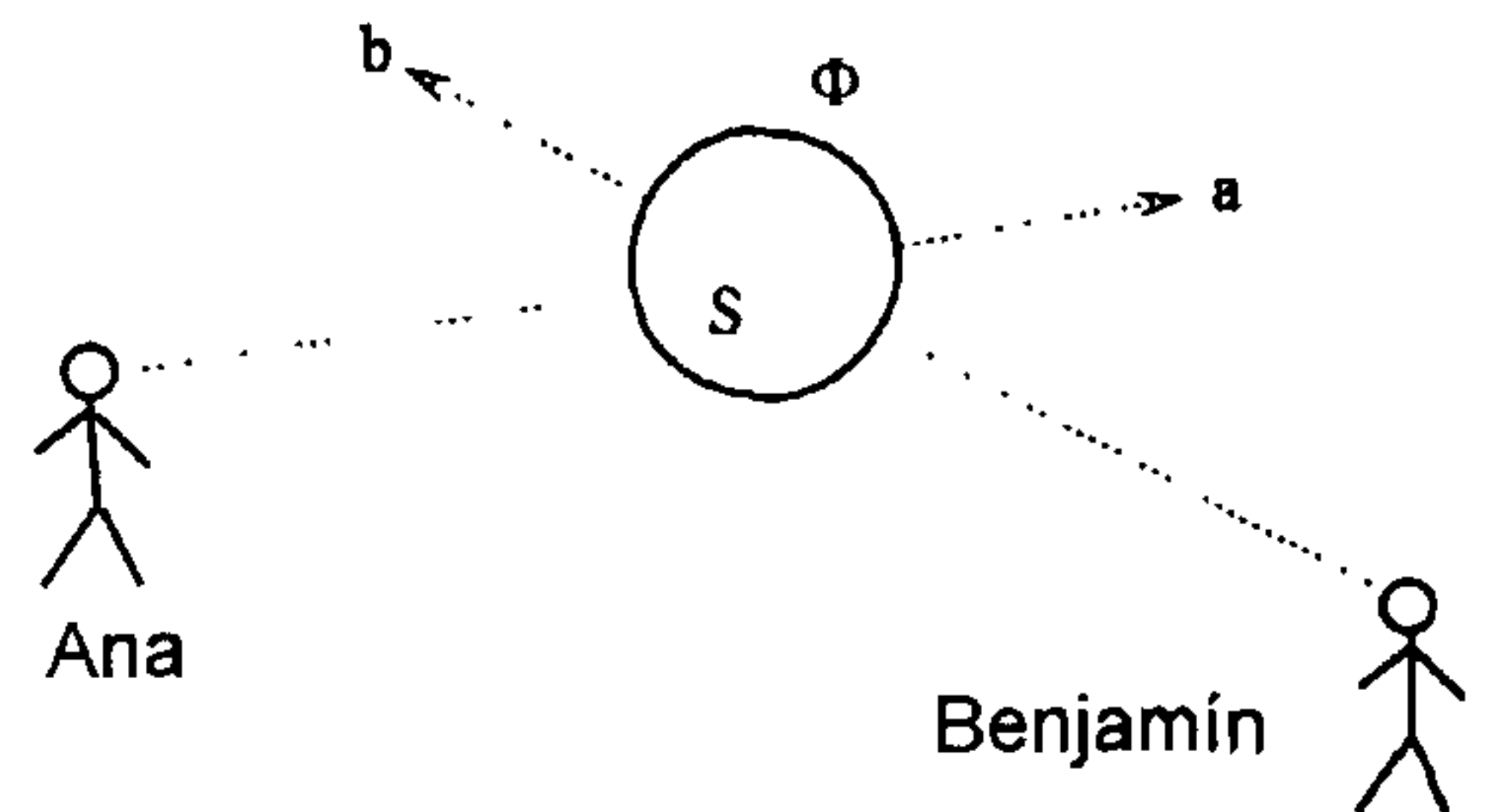


FIGURA 4. Ana y Benjamín observando la bola con movimiento caótico.

les, lo cual se ha hecho para *todos* los experimentos llevados a cabo hasta la fecha [26, 27]. Hay muchos modelos que podrían ser discutidos aquí, por ejemplo los desarrollados por Santos, pero dado que su trabajo es ampliamente conocido, referimos al lector interesado a la bibliografía correspondiente [26, 27]. En este artículo presentaré en cambio un modelo poco conocido pero de explicación muy transparente, el modelo de “la bola caótica” de Caroline H. Thompson [28].

En el modelo de la bola caótica se parte de una esfera fija en su centro, pero con libertad de rotar libremente de forma caótica en cualquier dirección. Esta bola está marcada en dos puntos diametralmente opuestos, uno con una N y el otro con una S. Dos observadores, Ana y Benjamín (A y B), la contemplan como se ve en la Fig. 4. Su dirección de observación está dada por los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} , con un ángulo Φ entre ellos.

Tanto Ana como Benjamín tienen una hoja de registro con dos columnas, marcadas N y S respectivamente y T renglones. Simultáneamente marcan en el renglón correspondiente, la columna adecuada dependiendo de que letra se encuentra en el hemisferio de la esfera que le es posible ver en ese momento. Una vez realizadas las T observaciones, la información de ambas hojas es transferida a una tercera, en la cual se resumen los números de “coincidencias” (NN , SS , SN , NS). Por medio de estos datos es posible determinar la correlación entre los resultados de cada observador.

Considérese una esfera imaginaria sobrepuesta a la esfera que se mueve. Tanto Ana como Benjamín verán la mitad del área de esta esfera, sólo que en general esta mitad no será la misma, como se ve en las Figs. 5 y 6. En la segunda figura están marcadas con líneas punteadas las direcciones de observación (\mathbf{a} y \mathbf{b}) y con líneas sólidas los límites de los hemisferios que pueden ver A y B, indicados con D_A y D_B respectivamente. El ángulo entre las direcciones de observación es Φ . Las áreas a considerar son: el área que ambos consiguen ver, el área que ninguno consigue ver, el área que Ana ve pero Benjamín no, y el área que Benjamín ve pero Ana no. Designemos estas cuatro áreas según el resultado de coincidencia que se obtendría si la S estuviera dentro de cada una. Por ejemplo, si la S está en la región que ambos pueden ver, el resultado sería SS ; asimismo, si la S estuviera en la región que ve Ana, pero Benjamín no (es claro que Benjamín vería la N hacia él) el resultado sería SN (dónde se asume que el primer literal se refiere a la observación de Ana, y el segundo a la de Benjamín); la denominación de las dos áreas restantes

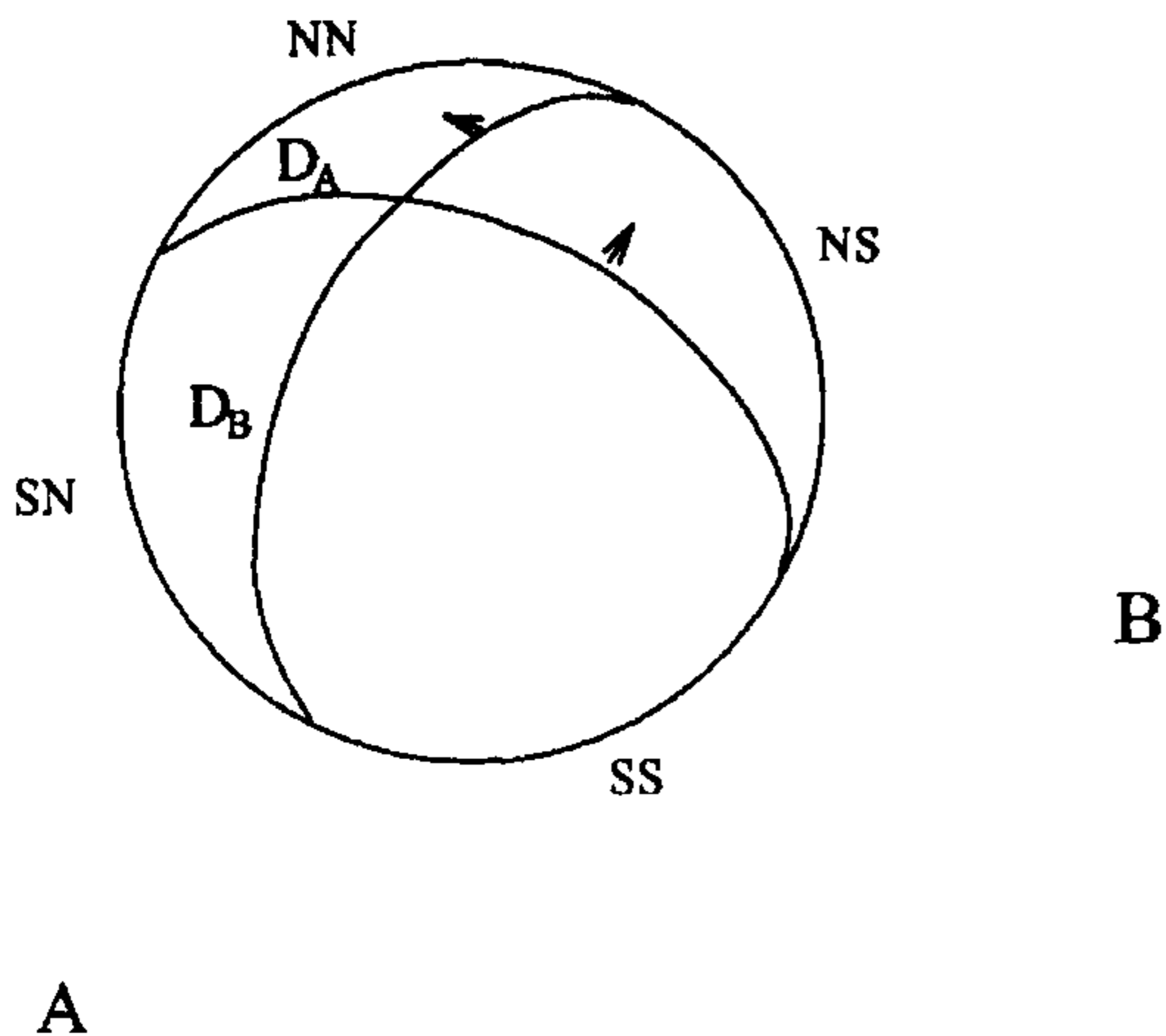


FIGURA 5. Secciones esféricas observadas por Ana y por Benjamín.

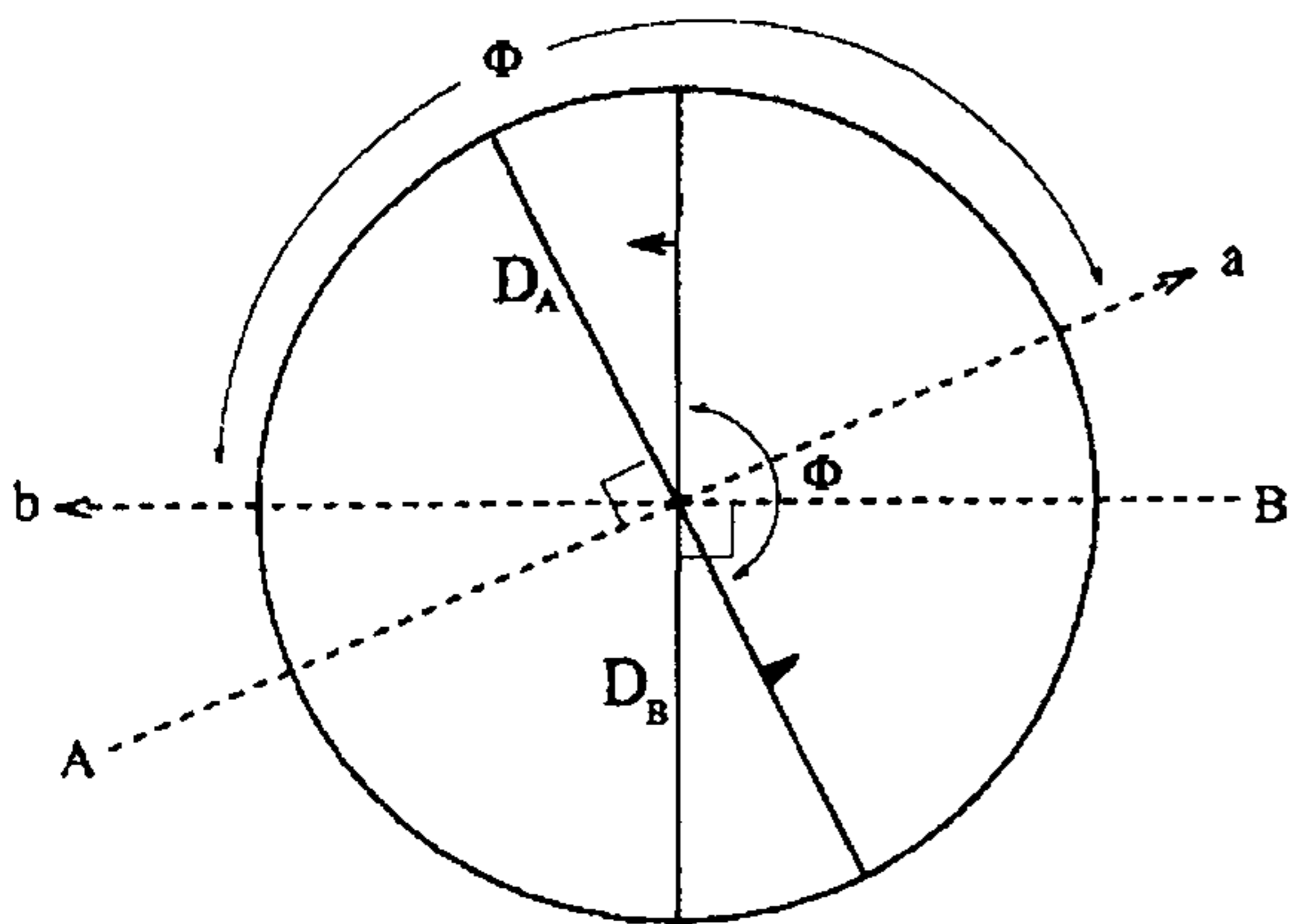


FIGURA 6. Ángulo entre las direcciones de observación.

es automática. Las áreas NS y SN son proporcionales a Φ , mientras que las áreas NN y SS son proporcionales a $(\pi - \Phi)$. Dado que el movimiento de la bola es caótico la letra S tiene igual probabilidad de estar en cualquier punto en los momentos de observación, por lo que usando las áreas discutidas vemos que los valores esperados para NN , SS , etc. son funciones lineales de Φ .

Evaluando la "función de correlación" se obtiene:

$$\hat{C} = \frac{NN + SS - NS - SN}{T}$$

donde estas cantidades se refieren a las veces que se presentó cada "medición" a lo largo del muestreo y T es el total de observaciones.

Suponiendo que T es suficientemente grande como para considerar insignificantes los errores aleatorios, los resultados deben de ser tales que

$$\hat{C} = \begin{cases} +1, & \Phi = 0 \\ 0, & \Phi = \frac{\pi}{2} \\ -1, & \Phi = \pi. \end{cases}$$

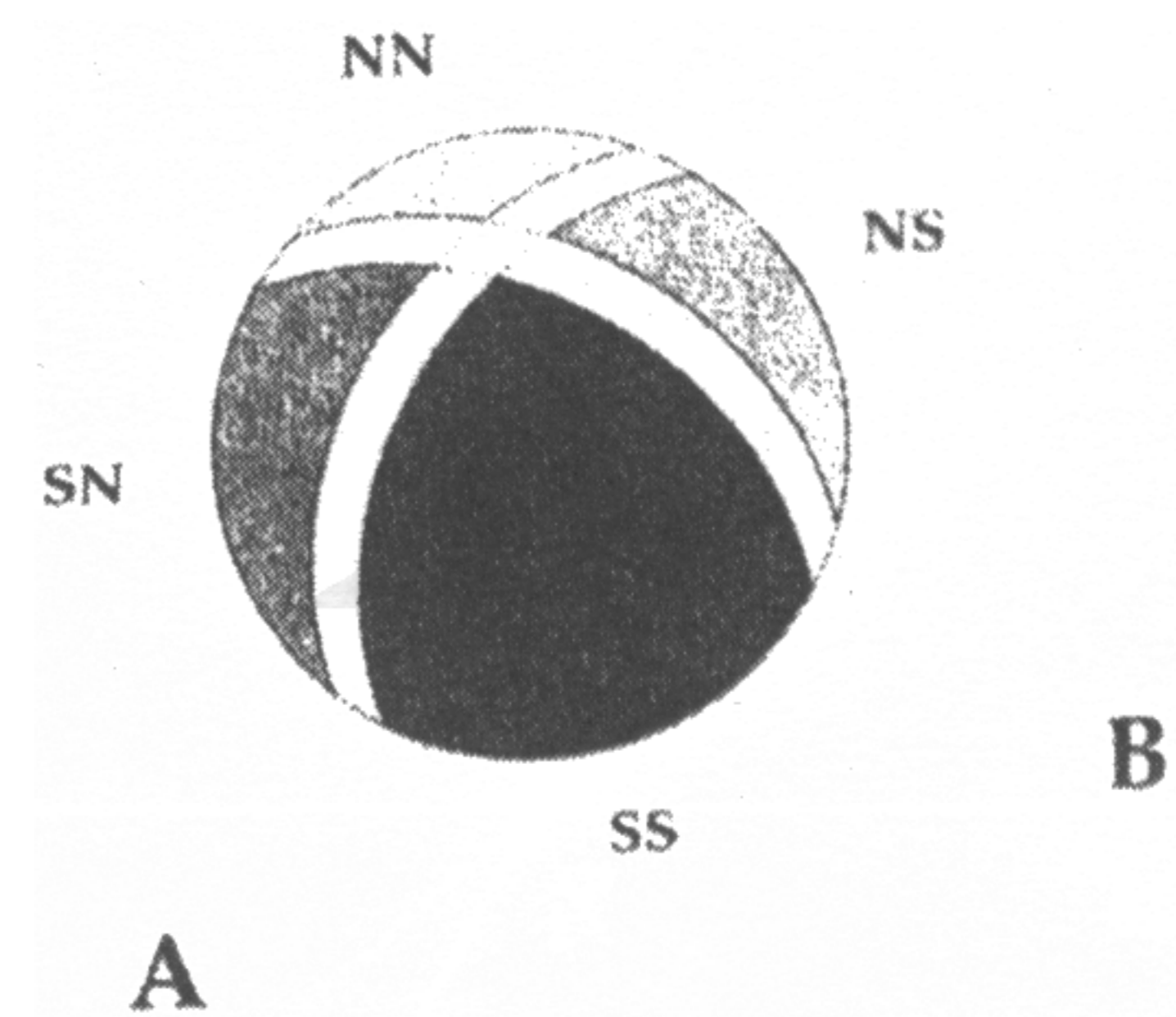


FIGURA 7. Secciones esféricas observadas por Ana y por Benjamín con bandas sin detección.

Para valores intermedios de Φ , \hat{C} asume valores entre $+1$ y -1 , siguiendo una ley lineal.

Hasta aquí podría parecer un modelo ingenuo y carecer de toda posibilidad de reproducir las predicciones cuánticas, o incluso de alguna predicción que fuera digna de notarse. Lo que haremos ahora es introducir algunos errores de detección para ver si es posible obtener resultados poco esperados.

Hagamos, por ejemplo, que la hipótesis (2) no se cumpla. Una manera de lograr esto es considerar bandas no detectadas; supóngase que Ana y Benjamín están parados muy cerca de la esfera, de tal manera que el área que consiguen ver es menos de la mitad, ya que habrá (para cada uno) una banda perimetral que escapa a su vista, permitiendo que existan posiciones de la esfera para las cuales alguno de ellos (dependiendo de su orientación) no vea ni la S ni la N . Lo que hemos conseguido es que la probabilidad de detección dependa de la variable oculta, que en este caso es la orientación de la bola. Ahora la esfera no está dividida por círculos, sino por bandas, como se ve en la Fig. 7. Las áreas anteriormente descritas cambian, de hecho todas se reducen, claro que proporcionalmente las áreas más pequeñas son más afectadas por este cambio. Es necesario resaltar que el área total con fallas en la detección depende del ángulo entre los observadores, siendo máxima cuando se encuentran a $\pi/2$, así que la violación a la hipótesis (2) se ve reforzada por el hecho de que los conteos sencillos dependen también del ángulo Φ . Repitamos el análisis. En términos únicamente de la función de correlación, cada vez que alguno de los dos no vea ni S ni N , la observación del otro debe de ser anulada, puesto que estos datos son inútiles para la determinación de \hat{C} . El problema ahora es que ya no es obvio cual debe de ser el denominador del cálculo realizado con anterioridad. Así que será usado lo que se acostumbra en los experimentos, con lo que \hat{C} se cambiará por E , donde

$$E = \frac{NN + SS - NS - SN}{NN + SS + NS + SN}$$

y llamaremos al denominador T_{obs} .

Esta parecería ser una buena aproximación, ya que para $\Phi = 0, \pi/2, \pi$ los valores de E coinciden con los de \hat{C} . Más aún, si se intenta determinar la probabilidad de que alguno de

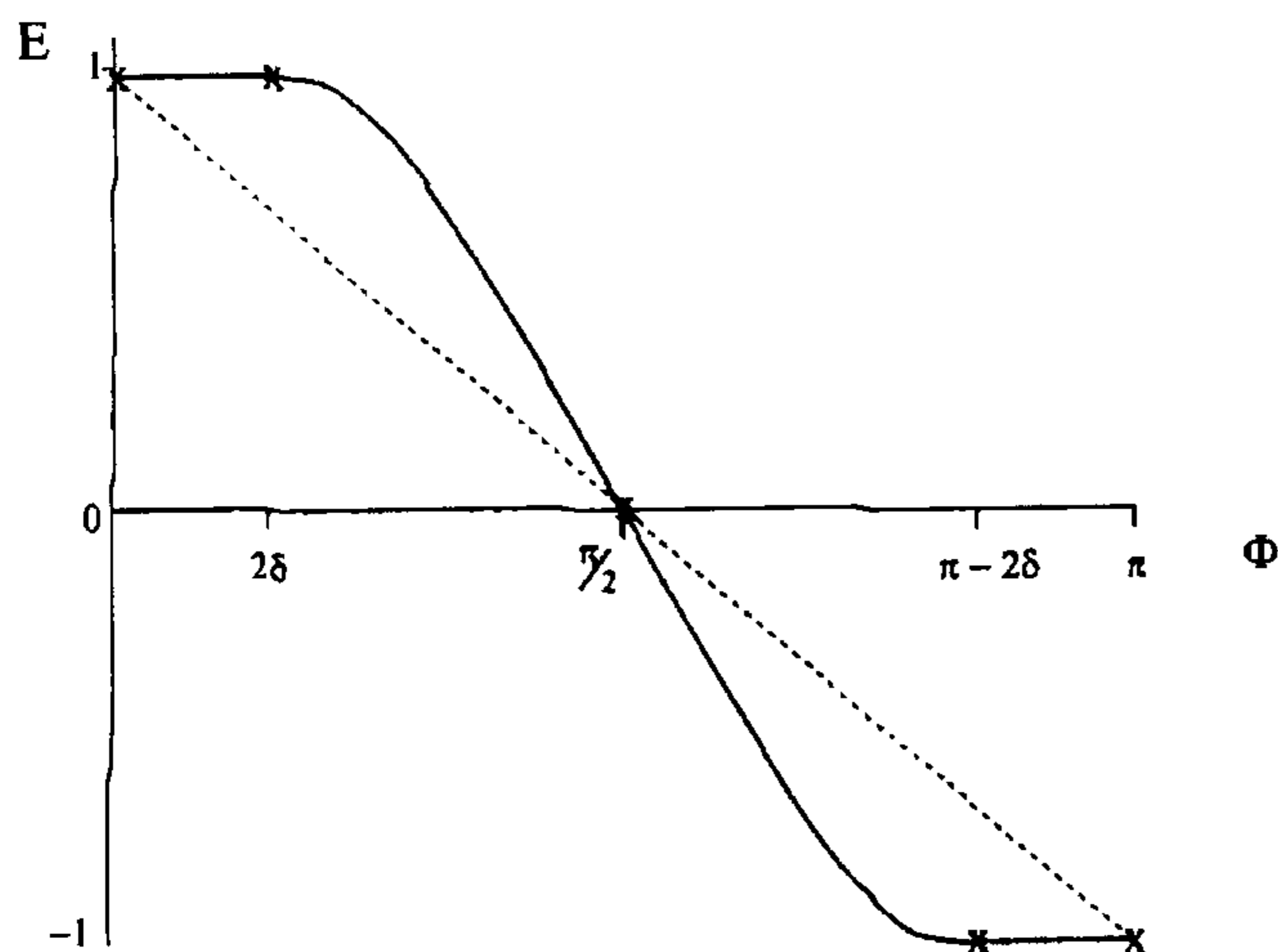


FIGURA 8 Resultados aproximados de la observación con bandas sin detección.

ellos vea N o vea S, se encontrará un número muy cercano a 1/2, ya que el área a su vista sigue siendo casi la mitad.⁽¹⁾ Un trazo aproximado de la relación general entre E y el ángulo Φ se encuentra en la Fig. 8, donde la línea recta punteada representa las predicciones del modelo básico (sin bandas no detectadas), y la línea continua es un trazo aproximado (ya que las matemáticas para proporcionar una expresión exacta son intrincadas y este modelo sólo pretende una descripción cualitativa). Hay algunos puntos de coincidencia, pero lo que se obtiene de forma general son resultados sesgados para algunos valores de Φ . También vemos que T_{obs} depende de Φ , puesto que, como ya se mencionó, el área ignorada de observaciones cambia con Φ .

Hasta el momento se ha visto que este modelo puede dar como resultado una curva de tipo senoidal que sería difícil de diferenciar de los resultados experimentales reales (dentro de su incertidumbre asociada) y de la predicción teórica con φ . Revisemos ahora como se pueden violar las desigualdades de Bell.

Otra de las tantas generalizaciones de las desigualdades de Bell es

$$P_{NS}(a, b) + P_{NS}(b, c) \geq P_{NS}(a, c), \quad (46)$$

con NS indicando el resultado de las coincidencias y los literales entre paréntesis, la dirección en la que observan Ana y Benjamín respectivamente. Para obtener las cantidades involucradas serán necesarios tres experimentos con los observadores en diferentes orientaciones.

Es claro que para el modelo de la bola caótica con bandas no detectadas las cantidades presentes en (46) pueden ser definidas de diferente forma. Una posibilidad es normalizar respecto a todos los eventos (T , detectados o no) o normalizar respecto a los eventos observados (T_{obs}). En este caso es factible trabajar con cualquiera de las dos, ya que ambas cantidades son conocidas, y por lo pronto será usada la primera de estas definiciones. Dado que para esta definición de proba-

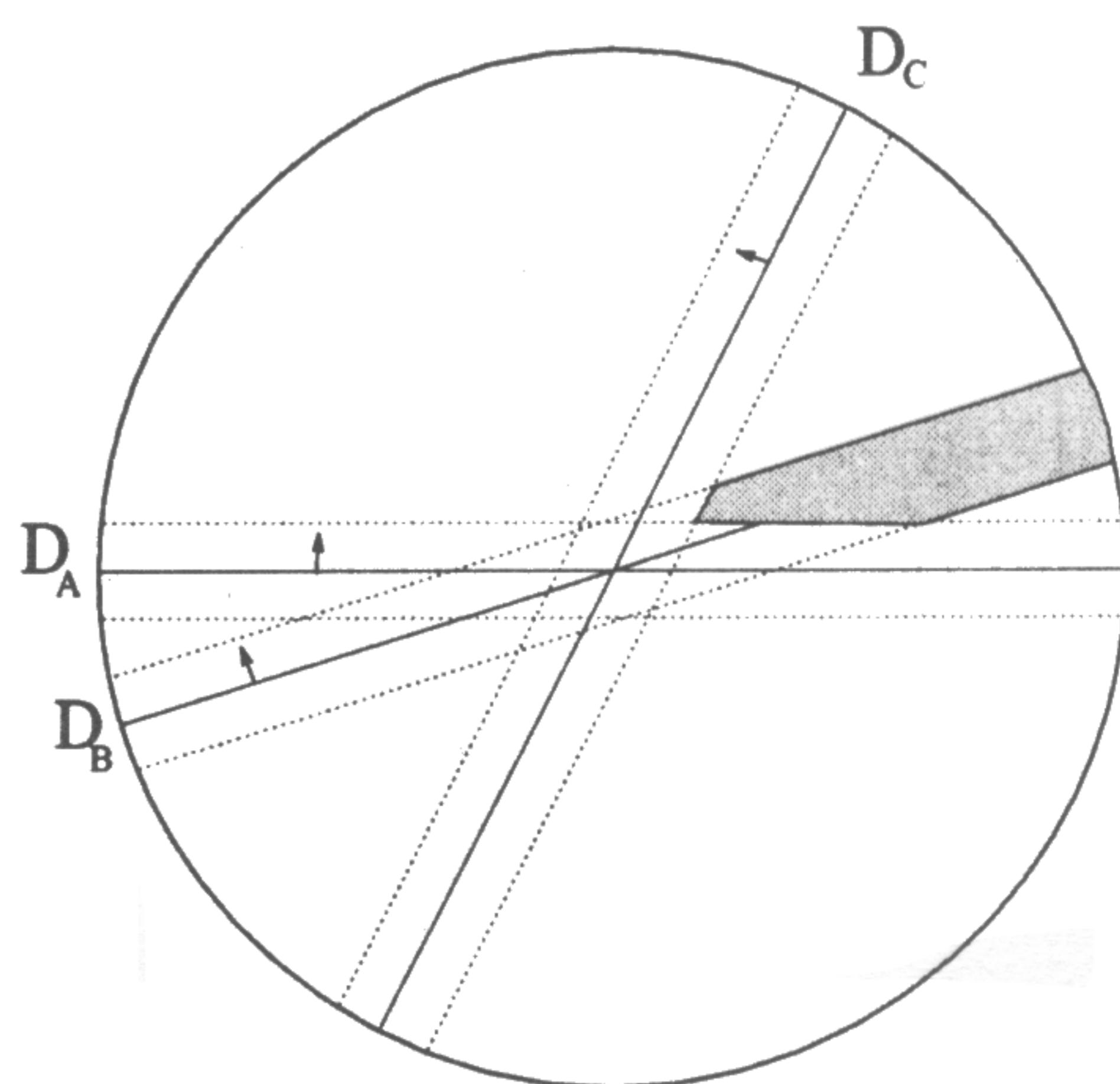


FIGURA 9. Representación del área que da lugar a la violación de las desigualdades

bilidad la expresión es

$$P_{NS}(a, b) \approx \frac{NS(a, b)}{T}, \quad (47)$$

con la misma T para todos los experimentos, la desigualdad (46) puede ser reescrita como

$$NS(a, b) + NS(b, c) \geq NS(a, c). \quad (48)$$

No es difícil ver que la diferencia entre los dos lados de esta desigualdad corresponde a la zona sombreada de la Fig. 9.

Esta diferencia es el resultado de un área que no es cubierta por la suma de las áreas correspondientes a $NS(a, b)$ y $NS(b, c)$, pero que sí está comprendida en el área de $NS(a, c)$, por lo cual para algunas direcciones de observación la desigualdad se viola.

En los experimentos llevados a cabo, desde luego no se conoce T , así que es obligado el uso de T_{obs} , pero se trabaja en zonas donde este último es aproximadamente constante, así que la violación anterior se presenta de igual forma.

Para dar otro ejemplo podemos reescribir (37) y (38) en términos de este modelo, obteniendo

$$-2 \leq E(a, b) - E(a, b') + E(a', b) + E(a', b') \leq 2, \quad (49)$$

con la definición (45), sólo que en este caso cada número involucrado depende de las direcciones de observación.

Consideremos por un momento que no hay bandas sin detección. Viendo la Fig. 10 podemos escribir $NN = SS = x$ y $NS = SN = y$, donde la dependencia en las direcciones de observación ha sido suprimida para abreviar. De esta forma podemos escribir E como

$$E(a, b) = \frac{x(a, b) - y(a, b)}{x(a, b) + y(a, b)}. \quad (50)$$

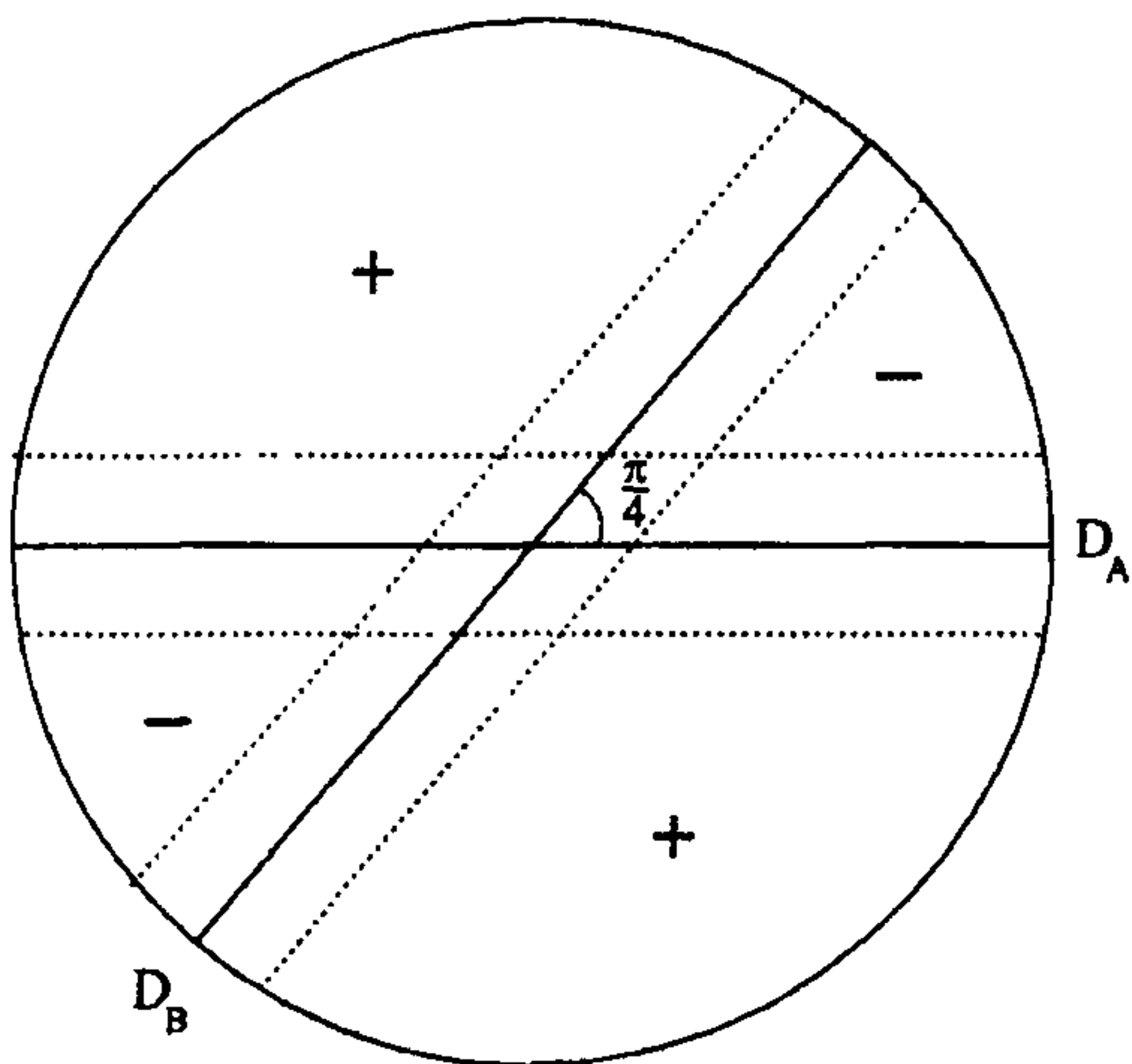


FIGURA 10. Secciones de la esfera que corresponden a las coincidencias.

Para introducir ahora las bandas sin detección, es necesario restar a cada área una porción Δ , así que

$$E_{\Delta}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{[x(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \Delta] - [y(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \Delta]}{[x(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \Delta] + [y(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \Delta]} = \frac{x(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - y(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{x(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + y(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - 2\Delta}, \quad (51)$$

y dado que Δ es una cantidad positiva, vemos que las predicciones hechas con E_{Δ} tienen un valor mayor a las hechas con E .

Consideremos ahora el caso en que las direcciones de observación cumplen con $\mathbf{a} \angle \mathbf{b} = \mathbf{a}' \angle \mathbf{b} = \mathbf{a}' \angle \mathbf{b}' = 22.5^\circ$ y $\mathbf{a} \angle \mathbf{b}' = 67.5^\circ$. Al trazar esquemas similares a la Fig. 10 vemos que si usamos (50) en (49), todos los términos son iguales a

$$\frac{3/4 - 1/4}{3/4 + 1/4} = \frac{1}{2},$$

y por lo tanto la desigualdad no se viola, ya que la suma es igual a 2. Si en vez de esto usamos (51) en (49), todos los tér-

Usando

$$S = \frac{N(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - N(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + N(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + N(\mathbf{a}', \mathbf{b}') - N(\mathbf{a}', \infty) - N(\infty, \mathbf{b})}{N(\infty, \infty)},$$

la desigualdad de Bell correspondiente es

$$-1 \leq S \leq 0.$$

Si se considera como de costumbre $\mathbf{a} \angle \mathbf{b} = \mathbf{a}' \angle \mathbf{b} = \mathbf{a}' \angle \mathbf{b}' = 22.5^\circ$, $\mathbf{a} \angle \mathbf{b}' = 67.5^\circ$, y se sustituyen los datos directos del experimento se obtiene $S = -0.121$, que no viola la desigualdad. Para que se presente una violación de tal desigualdad es necesario usar los datos ajustados que dan $S = 0.096$. Queda claro que la sustracción de conteos acci-

TABLA I.							
A	0.0°	22.5°	45.0°	67.5°	90.0°	1PA	2PA
N	96	87	63	38	28	126	248
N_a	23	23	23	23	23	46	90
N_r	73	64	40	16	5	81	158

minos son iguales a

$$\frac{3/4 - 1/4}{3/4 + 1/4 - 2\Delta} = \frac{2}{4 - 8\Delta} \geq \frac{1}{2} \quad \forall \Delta \geq 0,$$

así que la desigualdad (49) se viola —en mayor o menor medida—, dependiendo del valor de la Δ . Para dar una idea numérica de la importancia de este resultado notamos que para una violación como la presentada por Aspect basta con una Δ de $1/8$, que, considerando que la eficiencia cuántica de los detectores es inferior a $1/2$, parece ser superada por mucho.

Hasta aquí sólo se ha visto como afecta a los experimentos de este modelo la violación de la hipótesis (2), pero desde luego se puede ver como es afectado por introducción de fallas en cada una de las hipótesis, en cuestiones de asimetría de los observadores, bandas con orillas difusas, etc. Para todos estos casos se refiere al lector al artículo original, o de manera alternativa, puede desarrollar por sí mismo ejemplos fáciles.

Como se mencionó, un problema importante es el relacionado con la hipótesis experimental (7) en términos de la sustracción de conteos accidentales. La mayor parte de los experimentos no presentan violación de las desigualdades cuando se consideran los datos directos del experimento. Como ejemplo podemos tomar el experimento de Aspect llevado a cabo en 1981 [29]. Los datos analizados para este experimento se presentan en la Tabla I. La nomenclatura es: A: Ángulo entre los polarizadores, N : número de coincidencias totales, N_a : número de coincidencias accidentales y N_r : número reducido de coincidencias. Las columnas marcadas con 1PA y 2PA se refieren a un polarizador ausente y dos polarizadores ausentes.

dentales es un punto crucial que debe de ser analizado con sumo detalle.

Como hemos visto, si las hipótesis experimentales no se cumplieran, sería imposible concluir que se ha verificado la existencia de efectos no locales, por lo que los experimentos realizados hasta la fecha no pueden ser considerados conclusivos.

4. La no localidad en la situación actual

El objetivo central del presente artículo es examinar si existen suficientes elementos para emitir un juicio a favor o en contra de las implicaciones no locales de la mecánica cuántica. En este sentido hay que resaltar que todas las críticas a la realización experimental expuestas en la sección anterior solamente cuestionan el carácter de absolutas y definitivas a tales realizaciones. En ningún momento han sido un argumento a favor de los modelos realistas locales o de variables ocultas.

Podemos afirmar que hasta el momento *no* se ha realizado ningún experimento que no pueda ser criticado en función de los puntos mencionados, por lo que *no* se justifica concluir que la no localidad ha sido *definitivamente* corroborada por los experimentos. En octubre de 1998 en la revista *Physical Review Letters* se publicó un artículo con el título “Violación de las desigualdades de Bell usando fotones a más de 10 km de distancia” [30]. Este artículo describe un experimento que hace uso de interferómetros y diferencias de fase entre fotones; el análisis es totalmente análogo a los análisis anteriores, y nuevamente adolece de, por lo menos, la hipótesis (1) como notan los propios autores. Al revisar el artículo es fácil ver que no es la única hipótesis cuestionable.

El cuestionamiento de la no localidad sigue vigente, y su discusión con bases teóricas es muy importante. El libro “Lo decible y lo indecible en la mecánica cuántica” de Bell aporta una discusión excelente sobre este tema [10]. Recuerdo nuevamente que Bell no consideró su teorema una demostración contra la localidad en la física cuántica, sino lo tomó como un indicio del camino que debería de seguir la investigación de los fundamentos de la misma.

En opinión del presente autor *todas* las demostraciones teóricas y experimentales de la no localidad develadas hasta la fecha deben de ser los apoyos *principales* para la investigación de los fundamentos de la mecánica cuántica. Si se postula una teoría realista y local, ésta debe de explicar las predicciones no locales como una consecuencia de sus principios entendidos en el contexto experimental en el que se plantean tales predicciones. En particular, se tendría que explicar como funciona el “enlace” de los estados enlazados, y exponer como aparece la interdependencia de las mediciones, dejando todas las aparentes paradojas solamente como efectos a explicar.

En este entendido, aunque los resultados de los experimentos demostraran ser correctos, esto no sería un veredicto definitivo, sino muy por el contrario, harían mayor la necesidad de una explicación satisfactoria e intelegible.

La física moderna describe una realidad esquizofrénica, que se comporta de manera local y cumple los principios de la relatividad cuando trata objetos mesoscópicos en general, pero a partir de cierta escala, cuya frontera no está bien definida, se vuelve no local y positivista. Justamente en torno a este punto D. Wick escribió un libro llamado “The Infamous Boundary” [31], que contiene una de las discusiones más claras y objetivas que se han escrito sobre los problemas conceptuales de la mecánica cuántica.

5. Perspectivas

5.1. Aspecto experimental

Una de las maneras de llegar a una conclusión definitiva sería por medio de mejores experimentos que aporten resultados más confiables, o que expongan de manera más contundente las contradicciones entre la mecánica cuántica y las teorías realistas y locales. Los experimentos se pueden mejorar por medio de avances tecnológicos, por ejemplo usando detectores con mayor eficiencia, polarizadores con mayor índice de polarización, etc. pero esto seguramente requerirá tiempo. Alternativamente se pueden plantear análisis que requieran de menos hipótesis experimentales. Un intento en este sentido es la generación de “átomos enlazados” [33], así que daré una pequeña descripción de este proceso.

Se preparan dos átomos en un estado circular de Rydberg.^(m) Supondremos que sólo hay dos estado relevantes, por lo que los átomos se comportan como sistemas de dos niveles, que denominaremos *b* (base) y *e* (excitado). Uno de estos átomos es llevado al estado *e* y se le hace atravesar una cavidad superconductor de alto *Q* sin radiación electromagnética en su interior. La velocidad del átomo se escoge para que al atravesar la cavidad le tome un tiempo t_1 tal que $t_1\Omega = \pi/2$, donde Ω es la frecuencia de Rabi. Esto implica que el átomo tiene probabilidad 1/2 de intercambiar radiación con la cavidad. Si el intercambio de radiación tiene lugar, el átomo quedará en el estado *b* dejando radiación electromagnética en la cavidad; en caso contrario, el átomo permanecerá en el estado *e* y la cavidad vacía. Así que con probabilidad 1/2 el átomo emergerá en uno u otro estado, dejando la cavidad vacía o con radiación en su interior. Justo después de esto, el segundo átomo se coloca en el estado *b* y se le hace atravesar la cavidad con una velocidad tal que el tiempo t_2 que permanece en ella cumpla con $t_2\Omega = \pi$, con lo que el intercambio de radiación con la cavidad ocurre con probabilidad uno —a menos que ésta esté vacía—. Con esto vemos que si la cavidad tenía radiación en el interior, el segundo átomo emerge en estado *e*, mientras que si la cavidad estaba vacía, el átomo permanecerá en el estado *b*. El proceso puede ser descrito con el vector de estado

$$\begin{aligned} |e\rangle_I |b\rangle_{II} |0\rangle_{\text{cav}} &\rightarrow |b\rangle_{II} \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle_I |0\rangle_{\text{cav}} + |b\rangle_I |1\rangle_{\text{cav}}) \\ &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle_I |b\rangle_{II} + |b\rangle_I |e\rangle_{II}) |0\rangle_{\text{cav}}, \end{aligned} \quad (52)$$

donde, por ejemplo, el primer término describe al átomo I en el estado *e*, el átomo II en el estado *b* y la cavidad vacía (denotado por 0, mientras que se denotará con 1 cuando haya radiación en su interior). Como vemos se alcanza un estado enlazado para los átomos I y II. Si realizamos una medición sobre el átomo II y lo encontramos en el estado *e*, con certeza el átomo I estará en el estado *b*.

Las mediciones se pueden realizar de tal manera que la probabilidad de encontrar al átomo en un estado u otro no

sea 1 ó 0, sino valores intermedios, para los cuales se puede hacer un análisis como el de Bell, y proponer desigualdades para ser probadas experimentalmente. Desde luego que esto tiene la ventaja de hacer uso de átomos en lugar de fotones, por lo que las mediciones tendrán mucha mayor precisión y menos ambigüedades de interpretación.

El problema fundamental hasta la fecha es que estos átomos no se han podido producir con suficiente eficiencia [33], dado que existe alguna posibilidad de que se de un decaimiento $e \rightarrow b$ durante el vuelo fuera de la cavidad, o del tipo $1 \rightarrow 0$ en la cavidad sin átomos dentro, por lo que se encuentran estados $|b\rangle_I |b\rangle_{II} |0\rangle_{cav}$ que reducen la eficiencia.

En este experimento es notable que, según la interpretación ortodoxa, al realizar una medición sobre uno de los átomos colapsamos la función de onda, con lo que determinamos dos cosas: por un lado el estado del otro átomo, y por el otro lado, el estado en el que *estuvo* la cavidad entre el momento en que salió el primer átomo de ella y entró el segundo. Entonces con nuestra medición afectamos no solamente las propiedades de un sistema remoto, sino que también afectamos las propiedades que un sistema *tuvo* en el pasado. La conclusión es que una acción a un tiempo t causa una reacción a un tiempo t' con $t \geq t'$.

Basta con esto para ver que hay mucho por hacer y entender en los planos experimental y teórico, así que no dudamos que en un futuro aparezcan mejores experimentos que nos puedan dar más información para entender los fenómenos de enlace.

5.2. Aspecto teórico

El reto es encontrar, partiendo de primeros principios, un modelo que explique de manera satisfactoria los efectos cuánticos.

Un intento notorio es el que hace la electrodinámica estocástica (EDE). Para la EDE, un electrón atómico es una partícula cargada, la cual radía por estar acelerada, pero al mismo tiempo está inmersa en el campo electromagnético del vacío del cual absorbe radiación, así que las órbitas estables no son otra cosa que aquellas para las que se encuentra un equilibrio entre el promedio de radiación emitida y de la absorbida. El origen de este campo electromagnético (al cual se le llama usualmente campo de punto cero) ha sido razón de polémica, pero se puede pensar entre otras posibilidades, que está generado por las cargas aceleradas existentes en el Universo, de tal manera que toda carga está sometida a un campo de fondo y a su vez contribuye a formarlo.

Hay muchos efectos que se han podido explicar como consecuencia de la interacción de los microsistemas con el campo de punto cero, haciendo uso de una forma de la EDE que es conocida como EDE lineal [34]. De particular interés para la presente discusión es la rama óptica de la EDE, que se conoce como óptica estocástica y que es capaz de explicar los fenómenos característicos de la óptica cuántica en términos puramente ondulatorios y como resultado de la interferencia con el campo de punto cero.

Pensemos en un experimento en el cual se supone que existe un solo fotón, al que se hace atravesar un divisor de rayos, en cuyos canales de salida se colocan detectores. Se observa que cada vez que se emite un fotón sólo uno de los detectores es disparado. Normalmente se considera esto como una demostración de la existencia de los fotones y del comportamiento cuántico de la luz, pues sería de esperar que radiación pura se dividiera entre los dos canales y ambos detectores se dispararan. Para la óptica estocástica los resultados deben de ser consecuencia de los efectos de interferencia que se dan dentro del divisor entre el campo de punto cero y la radiación proveniente de la fuente (que se considera un campo). Así pues, la radiación incidente es dividida, pero simultáneamente se sobrepone con algunos modos del campo de punto cero (que son alterados por el divisor de rayos), dando lugar a fenómenos de interferencia. Debido a las diferencias de fase entre las partes de la radiación que emergen de los diferentes canales, si en uno se presenta interferencia constructiva resulta que en el otro se produce interferencia destructiva y sólo un detector es disparado. Queda de esta forma explicado el comportamiento corpuscular de la radiación sin haber introducido ninguna hipótesis de cuantización.

Es claro que esta explicación tiene gran trascendencia en la discusión de este artículo, por ejemplo, la hipótesis (1) mencionada en secciones anteriores se ve descartada, ya que los polarizadores pueden en efecto provocar un reforzamiento de la señal. En estos términos se puede replantear el análisis de experimentos con estados enlazados, lo cual se ha hecho exitosamente para algunos casos [34–39]. El desarrollo de los argumentos es largo e involucra conceptos de electrodinámica cuántica, por lo que se refiere al lector interesado a las obras originales.

Las explicaciones exitosas de fenómenos cuánticos por parte de la EDE son muchas y de gran interés. La EDE está aún en un periodo de desarrollo, por lo que no ha conseguido ser una teoría muy difundida, además de que existe una obvia renuencia a cuestionar la mecánica cuántica en función de sus fundamentos, pese a las paradojas a que conduce.

La EDE aporta un inicio y un camino para obtener una explicación intelegible de los efectos cuánticos desde el marco teórico. La Óptica Estocástica, como se mencionó, da explicaciones a los experimentos de no localidad realizados con fotones. El estudio de esta teoría es un campo de gran importancia; existen algunos artículos en los que se pueden leer sus bases y desarrollos [40–42]. Desde luego no tiene por que ser ésta la teoría correcta o la única alternativa, así que seguimos a la expectativa de un modelo convincente que esté basado en primeros principios.

5.3. Posibles aplicaciones

Pese a las dificultades conceptuales en torno al comportamiento de los estados enlazados, se han propuesto algunos usos que se les podrían dar.

Una de las primeras posibilidades es utilizar la “comunicación” existente entre los componentes de los estados enla-

zados para establecer una comunicación macroscópica y controlada, la cual sería instantánea y no se perdería con la distancia, de acuerdo a la lectura usual de la mecánica cuántica. Sin embargo se ha demostrado que esto no es posible [43]. Cualquier perturbación que se haga en uno de los componentes de un estado enlazado, sólo afectará a los demás componentes de manera que los resultados estadísticos de cada uno no se alteren, lo único que se afectará serán los resultados estadísticos de medidas conjuntas sobre todas las partes del estado. Así que no hay manera de saber a partir del análisis de una parte del estado, como se ha perturbado a la otra, para esto hay que realizar mediciones conjuntas. Para analizar los resultados de dichas mediciones es necesario algún tipo de comunicación causal y clásica, por lo que los estados enlazados podrían permitir establecer alguna comunicación que sería causal en todos los casos, pero tendría ventajas, como veremos a continuación, pues usando mediciones conjuntas podemos comunicar información de manera completamente privada [44]; para ver esto esbozaré un ejemplo.

Supongamos que dos experimentadores (Ana y Benjamín) desean comunicarse por medio de estados enlazados. Ana prepara un estado enlazado de dos subsistemas y manda uno de ellos a Benjamín, quien opera sobre éste con un operador unitario escogido entre un grupo de cuatro, y regresa a Ana el subsistema. Cuando Benjamín operó sobre el subsistema afectó, como consecuencia del enlace, al estado completo, colocándolo en un estado propio del operador que usó. Ana, quien tiene en su poder los dos subsistemas del estado enlazado, puede realizar una medición conjunta sobre estos y determinar cual de los cuatro operadores fue usado por Benjamín, con lo cual establecen una comunicación en un código de cuatro caracteres, uno asociado con cada uno de los operadores posibles. Para una explicación detallada del sistema anterior véase la referencia. Esta comunicación tiene la virtud de ser completamente privada, ya que sólo aquellos que tengan acceso a las partes del estado enlazado podrán comunicarse. Por ello se le llama “ciframiento cuántico” o “criptografía cuántica”.

Hay métodos de criptografía cuántica en los que no se usan los estados enlazados para transmitir información, sino para generar una clave que usarán Ana y Benjamín para encriptar y descifrar mensajes. De este tipo es el protocolo de Ekert, en el cual se prepara un estado de dos fotones con polarizaciones perpendiculares, uno se le manda a Ana y el otro a Benjamín. Ambos realizan mediciones en la misma dirección, por lo tanto, si Ana obtiene como resultado 1, sabe que Benjamín obtuvo -1 , así que invirtiendo sus resultados tendrá los mismos que Benjamín. Con esto se logra generar una clave de ceros y unos (correspondiendo a -1 y 1 respectivamente) con lo que se puede encriptar cualquier información puesta en código binario. Hasta este punto el método puede ser entendido completamente en términos clásicos tratando a los fotones como radiación polarizada. Para garantizar que no hay nadie interfiriendo en la comunicación, lo que la haría insegura, se intercalan mediciones en direcciones distintas, de tal forma que con los resultados se pueda evaluar alguna

desigualdad de Bell. Ana y Benjamín se comunican en forma clásica la dirección en que midieron, pero no el resultado obtenido. Las direcciones se escogen de tal forma que la desigualdad de Bell se viole. Si esto no pasara implicaría que hay algún factor alterando la comunicación, y por el contrario, si se viola la desigualdad se garantiza que la comunicación es segura.

En mayo del 2000 se publicó el primer reporte de comunicación encriptada por este método [45]. En este trabajo se generó una clave de 49 984 bits en aproximadamente un minuto. Con esto se transmitió una fotografía de 43 200 bits, con un error del 0.4%. A pesar de este éxito, el análisis referente a las desigualdades de Bell adolece de los problemas mencionados sin afectar la generación de la clave, que como se hizo notar tiene explicación clásica.

En la misma fecha se publicó un artículo [46] analizando varias técnicas de interceptación de la transmisión, que mostraron tener como consecuencia que la desigualdad de Bell no se violara.

Un tercer artículo [47] expone como hacer este tipo de criptografía pero usando correlación entre tiempo y energía en lugar de direcciones de polarización.

Otra posible aplicación es la “teleportación” de un estado cuántico [48]. Se genera un estado enlazado de dos subsistemas, uno de los subsistemas queda en posesión de Ana y otro en posesión de Benjamín. Ana tiene un sistema (idéntico a los subsistemas que forman el estado enlazado) en un estado cuántico original Ψ_0 , al cual hace interaccionar con la parte del estado enlazado que ella tiene realizando sobre ellos una medición conjunta (elegida de una base de operadores con cuatro elementos). Ana informa a Benjamín cual fue el resultado de tal medición, con lo cual Benjamín conoce el estado en que están los subsistemas y sabe cuál de los operadores de la base debe de aplicar al subsistema en su poder para colocarlo en el estado Ψ_0 (para ver los detalles de la operación véase la referencia). Como notamos, el nombre teleportación es un tanto exagerado, pues lo que en realidad se hace es sacar a un sistema de su estado cuántico original, para colocar a otro sistema remoto en tal estado. Es decir, lo que se “teleporta” es el estado, no el sistema.

Probablemente la aplicación de los estados enlazados que ha resultado más llamativa ha sido la llamada “computación cuántica”. Discutir los detalles de las máquinas que se han pensado en construir no es el propósito del presente artículo, por lo cual concluiré con una pequeña explicación al respecto de este tema. Para una explicación a mayor profundidad se pueden consultar las Refs. 49–51.

A grandes rasgos, realizar un cómputo es recibir información, analizarla o procesarla y reportar el resultados del análisis o del proceso. Lo que se hace en la computación cuántica es preparar un sistema de dos estados, para que esté con certeza en uno de ellos (el estado en el que esté el sistema es la información con que se alimenta a la máquina). Después de esto se realiza una observación sobre el sistema, cuyo resultado sabemos con precisión como está relacionado con el estado en el que estaba el sistema antes de la medición (éste

es el proceso al que se somete la información). Finalmente entendemos el resultado de la observación como el resultado del análisis o proceso.

Hasta este punto no parece tener ninguna ventaja la computación cuántica sobre la computación clásica, pero si en lugar de usar un sólo sistema de dos estados se hace uso de muchos de ellos que estén enlazados la ventaja se hace evidente. El preparar la información se hace por medio de enlazar los estados de alguna forma, por ejemplo para dos sistemas

$$\Psi = |\text{II}\rangle_1 |\text{I}\rangle_2,$$

dónde el estado II del sistema 1 queda enlazado al estado I del sistema 2, y las posibles informaciones de entrada serían las distintas combinaciones de enlaces entre los sistemas (I del 1 con II del 2, II del 1 con II del 2, etc.) Al realizar la observación el proceso se lleva a cabo de golpe en todos los

sistemas involucrados en el estado enlazado. Lo que se obtiene son los resultados de las observaciones sobre todos los sistemas. Lo que se logra entonces es el proceso en paralelo de toda la información de entrada. La computación clásica necesitaría un paso para cada uno de estos procesos, la computación cuántica reduce estos pasos a uno solo, por lo que su capacidad de análisis es mucho mayor.

El desarrollo de la computación cuántica es muy incipiente y hay muchas limitaciones, pero también un gran refinamiento en las propuestas para su funcionamiento. Algunos de estos puntos están discutidos en las Refs. 49–51.

La lista de aplicaciones que se han imaginado es larga, pero ninguna de ellas se ha llegado a concretar hasta la fecha.

Desde luego que éste es un incentivo más para profundizar en la investigación de los fundamentos de la mecánica cuántica, que promete tener aplicaciones de alcances fabulosos.

(a) ‘Estados enlazados’ es una traducción del término ‘entangled states’. Es común encontrar en la literatura la traducción alternativa ‘estados enredados’, pero aparentemente el primero es más claro.

(b) Una revisión meticulosa de las ventajas y desventajas de la interpretación de ensemble respecto a la interpretación ortodoxa, se encuentra en el trabajo de T.A. Brody [1].

(c) En términos de estados enlazados, la función de onda de ambas partículas puede ser escrita como

$$\Psi_{\text{EPR}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+_a\rangle_1 |-_a\rangle_2 + |-_a\rangle_1 |+_a\rangle_2), \quad (53)$$

donde $+_a$ y $-_a$ denotan espín paralelo o antiparalelo a una dirección a arbitraria, y los subíndices se refieren a una partícula o la otra. Si realizamos una medición del espín de la partícula 1 sobre la dirección $a = x$, la función de onda se proyectará sobre alguno de sus dos términos, permitiéndonos así determinar el espín de la partícula 2 en la dirección x . Esto pasaría para cualquier otra dirección, en particular la dirección y .

(d) Una discusión muy interesante del teorema de von Neumann fue hecha por T.A. Brody [8].

(e) En la notación usada el superíndice se refiere al sistema, y el subíndice se refiere a la matriz de Pauli correspondiente a cierta dirección.

(f) Usando $\sigma_{1i} = -\sigma_{2i} \equiv \sigma_i$, vemos que $\langle \sigma_1 \cdot \mathbf{a} \ \sigma_2 \cdot \mathbf{b} \rangle = \langle (a_1\sigma_x + a_2\sigma_y + a_3\sigma_z) (-b_1\sigma_x - b_2\sigma_y - b_3\sigma_z) \rangle = \langle -a_1b_1\sigma_x\sigma_x - a_2b_2\sigma_y\sigma_y - a_3b_3\sigma_z\sigma_z - a_1b_2\sigma_x\sigma_y - a_1b_3\sigma_x\sigma_z - a_2b_1\sigma_y\sigma_x - a_2b_3\sigma_y\sigma_z - a_3b_1\sigma_z\sigma_x - a_3b_2\sigma_z\sigma_y \rangle$. Usando $\sigma_i\sigma_j = \delta^{ij} I + \epsilon^{ijk}\sigma_k$ (donde I es la matriz identidad 2×2), obtenemos, $\langle \sigma_1 \cdot \mathbf{a} \ \sigma_2 \cdot \mathbf{b} \rangle = \langle -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \sigma \rangle$, el primer término es constante, por lo que podemos reescribir $\langle \sigma_1 \cdot \mathbf{a} \ \sigma_2 \cdot \mathbf{b} \rangle = -\langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \rangle - \langle (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \sigma \rangle$. El segundo término es el valor esperado del espín en la dirección $-\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, y dado que en principio la fuente emite partículas con una distribución isotrópica de espines, el valor esperado del espín en cualquier dirección debe de ser cero. Con esto obtenemos finalmente $\langle \sigma_1 \cdot \mathbf{a} \ \sigma_2 \cdot \mathbf{b} \rangle = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

(g) El símbolo λ en general puede denotar más de un parámetro que pueden ser de carácter continuo o discreto, determinista o azaroso, etc.

(h) La noción de localidad se introduce al no permitir que los positrones se vean afectados por la presencia o ausencia del divisor DR2⁻ y viceversa.

(i) En este caso una ‘gran distancia’ puede ser un par de metros, digamos, puesto que esto se considera suficiente para atenuar las interferencias que puedan ser causadas por los campos que se consideran relevantes.

(j) Por ejemplo $N_1(\mathbf{a})$ se refiere al número de cuentas en uno de los detectores en la dirección \mathbf{a} , y el subíndice indica cual de los detectores.

(k) De hecho $V = (N_{\text{max}} - N_{\text{min}}) / (N_{\text{max}} + N_{\text{min}})$, donde N_{max} y N_{min} son el conteo en coincidencia máximo y mínimo respectivamente, ambos para la misma orientación de los polarizadores. Esto corresponde a la llamada visibilidad de los patrones de interferencia.

(l) Claro que habrán otros efectos, por ejemplo, si están parados muy cerca de la esfera, verán sólo unos discos pequeños, así que habrá valores de ϕ para los que nunca será detectada una coincidencia, ya que los discos no se traslapan.

(m) Para entender el argumento no es necesario saber lo que es un estado circular de Rydberg ni la frecuencia de Rabi que se menciona más adelante. El lector interesado puede referirse a la Ref. 32. Sin embargo, recordamos que un átomo de Rydberg es un átomo muy excitado (n típico del orden de 100), que por ello se comporta semiclásicamente.

1. T.A. Brody, *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) S19.
2. A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Phys. Rev.* **47** (1935) 777.
3. F. Selleri, *Quantum Paradoxes and Physical Reality*, edited by Alwyn van der Merwe, (Kluwer Academic Press, Dordrecht, 1990).

4. N Bohr, *Phys. Rev.* **48** (1935) 696.
5. J von Neumann, *Mathematische Grundlagen an Quantenmechanik*, (Springer, Berlin, 1932). Traducción al inglés *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, (Princeton University, Princeton, N.J., 1955).
6. J.S. Bell, *Rev. Mod. Phys.* **38** (1966) 447.
7. J. Albertson. *Am. J. Phys.* **29** (1961) 478.
8. T.A. Brody, *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) S80
9. S. Kochen and E.P. Specker, *J. Math. Mech.* **17** (1967) 59.
10. J S Bell *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
11. L.E. Szabó, *Fond. Phys Lett.* **8** (1995) 417.
12. T.A. Brody, *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) S46.
13. T.A. Brody, *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) S49.
14. T.A. Brody, *Rev Mex Fís* **35** (1989) S52.
15. T.A. Brody, *Rev. Mex Fís* **35** (1989) S71.
16. D.M Greenberger, M.A. Horne, A. Shimony, and A. Zeilinger, *Am. J. Phys.* **58** (1990) 1131.
17. L Hardy. *Phys. Rev. Lett.* **68** (1992) 2981.
18. S.J. Freedman and J.F. Clauser, *Phys. Rev. Lett.* **28** (1972) 938
19. J.F. Clauser, M.A. Horne, A. Simony, and R.A. Holt, *Phys. Rev. Lett.* **47** (1981) 460.
20. A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 91.
21. A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 1804.
22. A Aspect, *Phys. Rev. D* **14** (1976) 1944.
23. E. Santos, "The possibility of an interpretation of quantum mechanics that maintains realism and causality" (por publicar).
24. C.H. Thomson, "The tangled methods of quantum entanglement experiments". Página web. <http://www.aber.ac.uk/~cat>.
25. E Santos, *Phys. Rev. A* **46** (1992) 3646
26. E. Santos, *Phys. Rev. Lett.* **66** (1991) 1388.
27. E. Santos. *Phys. Lett. A* **115** (1986) 363
28. C.H. Thomson, *Found. Phys. Lett.* **9** (1996) 357.
29. A Aspect, P. Grangier, and G Roger, *Phys. Rev. Lett.* **47** (1981) 460.
30. W. Tittel, J Brendel, H Zbinden, and N. Gisin, *Phys Rev Lett.* **81** (1998) 3563.
31. D. Wick, *The Infamous Boundary*, (Copernicus, New York, 1995).
32. R G. Hulet and D Kleppner, *Phys. Rev. Lett.* **51** (1983) 1430.
33. E Hagley *et al* , *Phys Rev Lett.* **79** (1997) 1.
34. Luis de la Peña and Ana Maria Cetto, *The Quantum Dice. An Introduction to Stochastic Electrodynamics*, (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996)
35. A. Casados, T.W. Marshall, and E. Santos, *J. Opt. Soc. Am B* **14** (1997) 494.
36. A Casados *et al* , *Phys. Rev. A* **55** (1997) 3879.
37. A Casados *et al.*, *Phys. Rev A* **56** (1997) 2477.
38. A. Casados, T.W Marshall, and E. Santos, *J. Opt. Soc Am B* **15** (1998) 1572.
39. A. Casados *et al.*, "Dependence on crystal parameters of the correlation time between signal and idler beams in parametric down conversion calculated in the Wigner representation" (pre-tiro) (1998)
40. T.W. Marshall and E. Santos, *Problems in Quantum Physics: Gandsk '87. Recent and Future Experiments and Interpretations*, edited by Krostro *et al* , (World Scientific, 1988) p 294
41. T.W. Marshall and E. Santos, *Found. Phys* **18** (1988) 185.
42. T.W. Marshall and E. Santos, en: *Proc. Int. Workshop Dynamics of Non-Linear Optical Systems*, Santander 24–27, October 1988, edited by L. Pesquera and F.J. Bermejo. (World Scientific, Singapore, 1989)
43. A. Shimony, en *Proceedings of the International Symposium on Foundations of Quantum Theory*, Physical Society of Japan, Tokyo, (1984)
44. Ch.H. Bennett and S J Wiesner. *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 2881.
45. T. Jennewein *et al.*, *Phys. Rev Lett.* **84** (2000) 4729.
46. D.S. Naik *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 4733.
47. W Tittel, J Brendel, H Zbinden, and N. Gisin, *Phys. Rev. Lett* **84** (2000) 4737
48. Ch.H. Bennett *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993) 1895.
49. P.W. Shor, *Proc. 35nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, edited by Shafi Gold Wasser, (IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, 1994) 124.
50. B. Pablo-Norman and M. Ruiz Altaba, *Phys. Rev. A* **61** (2000) 012301-012305
51. A Ekert and R Jozsa, *Reviews of Modern Physics* **68** (3) (1996).