

Caracterización de las permutaciones en bloque que representan autómatas celulares unidimensionales reversibles

J.C. Seck Tuoh Mora

Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección Computación

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Av. Instituto Politécnico Nacional 2508, Col. San Pedro Zacatenco, 07360 México, D.F., Mexico

e-mail: seck@computacion.cs.cinvestav.mx

Recibido el 10 de mayo de 2000; aceptado el 13 de febrero de 2001

En el siguiente escrito se da una revisión a la representación y comportamiento de autómatas celulares unidimensionales reversibles por medio de permutaciones en bloque. Hacemos un análisis detallado del comportamiento de dichas permutaciones para obtener su caracterización.

Descriptor: Autómata celular unidimensional reversible; permutaciones en bloque; índices de Welch

We present a review of reversible one dimensional cellular automata and their representation by block permutations. We analyze in detail the behavior of such block permutations to get their characterization.

Keywords: Reversible one-dimensional cellular automata; block permutations; Welch indices

PACS: 02.10.Ab; 04.60.Nc

1. Introducción

Los autómatas celulares unidimensionales son sistemas discretos cuyo comportamiento local es muy sencillo, pero éste puede generar un comportamiento global muy interesante. Dentro de estos sistemas un tipo especial son los llamados reversibles, denominados así ya que pueden regresar a etapas anteriores que el sistema había producido.

Los autómatas celulares unidimensionales se han utilizado como un medio para estudiar y simular diversos sistemas físicos [1, 2], entre los cuales podemos encontrar modelos de sistemas granulares, estudios de mecánica estadística en densidad de poblaciones, modelos de reacción difusión, dinámica de fluidos o flujo de tráfico entre muchos otros.

Los autómatas celulares reversibles han sido utilizados como herramientas para el estudio de cifrado de datos [2, 3], conservación de información [3], conservación de energía [1] y simulación de procesos termodinámicos [2] entre otras aplicaciones.

En un trabajo anterior [4] se explicó el funcionamiento de un autómata celular unidimensional reversible utilizando permutaciones en bloque. Este escrito es una continuación de este tema, utilizando un punto de vista inverso. Es decir, dado un conjunto de permutaciones en bloque, expondremos cuáles son las características que deben cumplir dichas permutaciones para poder representar a un autómata celular unidimensional reversible.

La Sec. 2 presenta los conceptos básicos que se manejan en autómatas celulares unidimensionales reversibles. La Sec. 3 muestra que todo autómata celular unidimensional puede representarse por otro con tamaño de vecindad igual a 2, por lo que caracterizar las permutaciones para este caso es hacerlo para todo tipo de autómata celular unidimensional reversible. La Sec. 4 explica brevemente el funcionamiento

de un autómata celular unidimensional reversible por medio de permutaciones en bloque. La Sec. 5 presenta las propiedades que deben cumplir un conjunto de permutaciones en bloque para representar a un autómata celular unidimensional reversible. La Sec. 6 expone dos casos de estudio para ejemplificar la construcción de estas permutaciones con las propiedades dadas anteriormente. Por último, la Sec. 7 da las conclusiones de este trabajo.

2. Conceptos básicos

En principio describamos brevemente el funcionamiento de un autómata celular unidimensional reversible y sus características básicas.

2.1. Autómata celular unidimensional

Un autómata celular unidimensional es un sistema dinámico discreto formado por tres elementos principales:

- Un conjunto de estados K de cardinalidad k .
- Un radio de vecindad r .
- Una regla de evolución ϕ .

El funcionamiento del autómata consiste en tener un arreglo de celdas o *células*, en la cual cada célula toma un estado de K . Este primer arreglo se le conoce como *configuración inicial*. La dinámica del sistema consiste en lo siguiente: se toma cada célula individual y sus r células a ambos lados para formar una secuencia o *vecindad* de tamaño $2r + 1$. A cada una de estas vecindades se le aplica una regla de evolución de la siguiente manera:

$$\phi : K^{2r+1} \rightarrow K, \quad (1)$$

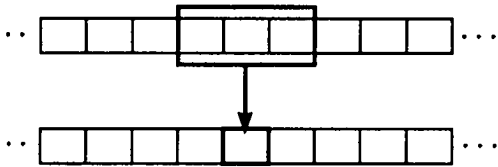


FIGURA 1. Evolución de una vecindad de tamaño 3 a una célula.

es decir, la regla de evolución es una función que mapea cada vecindad a un elemento de K . En otras palabras, la vecindad *evoluciona* en este nuevo estado. Se sigue este proceso con todas las células en el arreglo y obtenemos un nuevo arreglo o *configuración* (ver Fig. 1).

Así tenemos que el mapeo global que se da entre configuraciones se debe al mapeo local hecho de vecindades a estados inducido por la regla de evolución. Un autómata celular unidimensional se denotará por la pareja (k, r) , es decir, por su número de estados y su radio de vecindad.

Una configuración es *ancestra* de otra si la primera evoluciona en la segunda al aplicar la regla de evolución a cada una de sus vecindades.

Ya que la regla de evolución mapea vecindades a estados, los tamaños de estas vecindades deben tomar valores discretos, esto se da solamente si $r = i$ ó $r = i/2$ para $i \in \mathbb{Z}$. Por convención, el nuevo estado producto del mapeo se coloca en la siguiente configuración en la parte central de la vecindad ancestral. Así tenemos que el mínimo tamaño de vecindad que se puede manejar es 2 ó que $r = 1/2$.

2.2. Autómatas celulares unidimensionales reversibles

En realidad no podemos hablar de reversibilidad en un autómata celular unidimensional, ya que la regla de evolución mapea elementos del conjunto K^{2r+1} a elementos de K . Es decir, para $r > 0$ el dominio del mapeo es siempre más grande que el contradominio, lo que impide que dicho mapeo sea biyectivo y por lo tanto reversible.

Al hablar de reversibilidad en este ámbito lo haremos refiriéndonos al mapeo que existe entre configuraciones globales en la evolución del autómata. Si este mapeo es biyectivo el autómata se dirá que es *reversible*, lo interesante es que este mapeo global es producto del mapeo local establecido por la regla de evolución.

En el trabajo de Richardson [5] se demuestra que si un autómata es reversible, dada su regla de evolución existe otra regla *inversa* a la original con la cual poder regresar en la evolución global del autómata. En otras palabras, podemos volver a generar la configuración ancestral de la actual y repetir este proceso de manera indefinida, cómo se muestra en la Fig. 2.

Dado que la reversibilidad en el mapeo global se debe a la regla de evolución, para caracterizar a los autómatas celulares unidimensionales reversibles se estudian las propiedades locales que inducen dichas reglas.

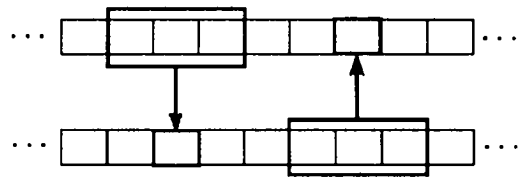


FIGURA 2. Autómata celular unidimensional reversible en donde ambas reglas invertibles tienen tamaño de vecindad igual a 3.

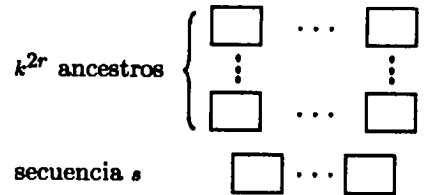


FIGURA 3. Multiplicidad uniforme de ancestros de una secuencia $s \in K^*$ en un autómata celular unidimensional reversible.

2.3. Propiedades de un autómata celular unidimensional reversible

Gracias al trabajo de G.A. Hedlund [6] tenemos una amplia descripción combinatoria de las propiedades locales que tiene la regla de evolución en un autómata celular reversible destacando en especial dos conceptos fundamentales:

- *Multiplicidad uniforme.* Sea K^* el conjunto de secuencias finitas de estados. En un autómata reversible se tiene para toda $s \in K^*$ que el número de ancestros de cada s es igual a k^{2r} o al número de nodos en el diagrama de de Bruijn [7, 8]. Así, cada secuencia de estados tiene el mismo número de ancestros que los demás (ver Fig. 3).
- *Índices de Welch.* Los índices de Welch L, M y R cuantifican las distintas regiones que existen en los ancestros de cada $s \in K^*$.

L : Cuantifica el máximo número de extensiones de una secuencia de estados a la izquierda tal que la evolución de la secuencia y sus extensiones sea la misma.

R : Cuantifica el máximo número de extensiones de una secuencia de estados a la derecha tal que la evolución de la secuencia y sus extensiones sea la misma.

M : Representa el mínimo número de secuencias de estados que junto con sus extensiones izquierdas y derechas evolucionen en la misma cadena.

De este modo tenemos que si un autómata es reversible, toda secuencia $s \in K^*$ tiene el mismo número de ancestros que los demás cumpliendo con la multiplicidad uniforme. Este número de ancestros es igual a k^{2r} . Además, para $n_0 \geq 2$ y $n \geq n_0$, cada $s \in K^n$ cumple que sus índices L y R son tales que $LR = k^{2r}$. Esto indica que en los ancestros de cada

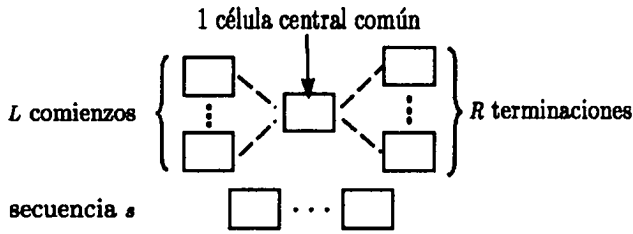


FIGURA 4. Índices de Welch de una secuencia $s \in K^n$ en un autómata celular unidimensional reversible.

secuencia s el valor del índice M es 1, existiendo una forma única en que cada s regresa hacia atrás en la evolución del autómata. Con esto se especifica una regla inversa a la original (ver Fig. 4).

3. Autómatas celulares unidimensionales con $r = 1/2$

Antes de entrar en materia con los autómatas celulares unidimensionales reversibles, revisaremos los autómatas con radio

de vecindad $r = 1/2$, ya que con éstos podemos representar a todo autómata celular unidimensional de cualquier radio de vecindad como se muestra en los trabajos de J. Kari [9] y de T. Boykett [10].

Supongamos que tenemos un autómata celular (k, r) cuyo tamaño de vecindad es $2r + 1$. Para reducir este tamaño a 2, aumentaremos el número de estados, de este modo, un autómata $(k^{2r}, 1/2)$, se puede utilizar para representar a la misma evolución. Esto es, tomaremos del autómata general todas las posibles secuencias de tamaño $2r$ o lo que es lo mismo, todos los posibles nodos de de Bruijn [7, 8].

Sabemos que originalmente, para todo estado $e \in K$, sobre una secuencia de estados $s \in K^{2r+1}$ la regla de evolución original tiene el siguiente comportamiento:

$$\phi(s_0, \dots, s_{2r}) \rightarrow e, \tag{2}$$

y esta regla se aplica a cada célula en la configuración, ahora, para dicha configuración agrupemos sus células en secuencias de tamaño $2r$. Se obtendrán a lo más tantas secuencias distintas como k^{2r} , que serán nuestros nuevos estados. Para cada uno de estos nuevos elementos, la nueva regla de evolución funcionará de la siguiente manera:

$$\phi'((s_0, \dots, s_{2r-1}), (s_{2r}, \dots, s_{4r-1})) = (\phi(s_0, \dots, s_{2r}), \phi(s_1, \dots, s_{2r+1}), \dots, \phi(s_{2r-1}, \dots, s_{4r-1})). \tag{3}$$

En otras palabras, la nueva regla será el producto de aplicar repetidamente la regla original sobre dos secuencias que representan nuevos estados. Al final, como producto de aplicar la regla original obtendremos una nueva secuencia de $2r$ elementos, es decir, un nodo de de Bruijn o una secuencia dentro del conjunto de nuevos estados.

Veamos cómo funciona esto en un autómata $(2, 1)$ regla 111

	00	01	10	11
00	1	1		
01			1	1
10	0	1		
11			1	0

Una evolución de dicho autómata aplicando la regla de evolución a una configuración inicial sería:

Configuración Inicial \rightarrow 001011101101
Evolución \rightarrow 011110111111

Tomemos ahora todas las posibles secuencias de tamaño $2r$ y renombremos éstas para obtener un nuevo conjunto de estados

Secuencia		Estado nuevo
00	\rightarrow	0
01	\rightarrow	1
10	\rightarrow	2
11	\rightarrow	3

Tomemos ahora todas las posibles secuencias de $4r$ elementos y veamos su evolución al aplicar la regla original

0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
11	11	11	11	10	11	11	10
1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
01	01	11	11	10	11	01	00

Hagamos la agrupación de cada una de estas secuencias en bloques de tamaño $2r$, lo que producirá lo siguiente:

00 00	00 01	00 10	00 11	01 00	01 01	01 10	01 11
11	11	11	11	10	11	11	10
10 00	10 10	10 10	10 11	11 00	11 01	11 10	11 11
01	01	11	11	10	11	01	00

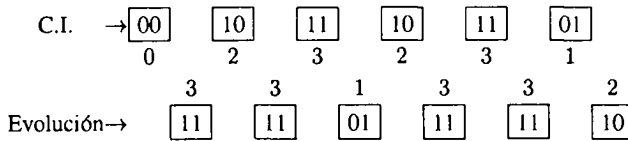
Si sustituimos cada bloque por el estado nuevo asignado anteriormente obtendremos:

0 0	0 1	0 2	0 3	1 0	1 1	1 2	1 3
3	3	3	3	2	3	3	2
2 0	2 1	2 2	2 3	3 0	3 1	3 2	3 3
1	1	3	3	2	3	1	0

La nueva regla (4, 1/2) que simula la evolución del autó-mata original es

	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	2	3	3	2
2	1	1	3	3
3	2	3	1	0

Tomemos ahora la configuración inicial que utilizamos al principio, agrupemos sus elementos en secuencias de tamaño $k^{2r} = 2$. Sustituyendo por los estados nuevos cada secuencia, apliquemos la regla (4, 1/2) y a la evolución obtenida, regresemos cada estado por su secuencia original.



De esta manera, reordenando las secuencias de 2 elementos tenemos el funcionamiento original del autó-mata

0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0

↓

0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1

4. Permutaciones en bloque

Veamos brevemente cómo se puede caracterizar el funcionamiento de un autó-mata reversible. Para una referencia mucho más detallada se puede consultar la Ref. 4.

4.1. Funcionamiento de las permutaciones en bloque

En el trabajo de J. Kari [11] se explica el funcionamiento de los autó-matas celulares unidimensionales reversibles por medio de permutaciones en bloque y un corrimiento.

Sea un autó-mata celular reversible (k, r) con una regla de evolución ϕ , y una regla inversa ϕ^{-1} en donde ambas reglas tienen el mismo valor de r (ver Fig. 5). Primero definamos los siguientes dos conjuntos:

R_ϕ : El conjunto formado por todos los bloques de tamaño $2r$ y las terminaciones derechas también de tamaño $2r$ de los ancestros de cada bloque.

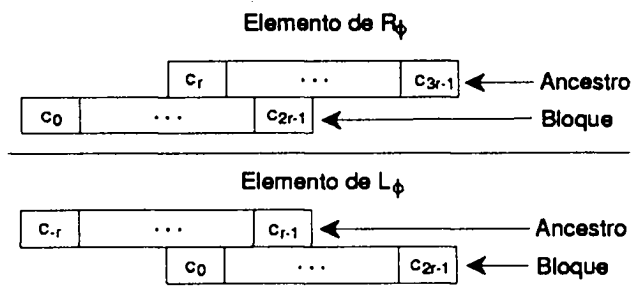


FIGURA 5. Forma de los elementos de R_ϕ y L_ϕ .

L_ϕ : El conjunto formado por todos los bloques de tamaño $2r$ y las terminaciones izquierdas también de tamaño $2r$ de los ancestros de cada bloque.

Podemos ver que cada uno de estos elementos tiene una longitud de $3r$ células. De esta forma, para cada cadena del conjunto K^{6r} , al aplicarle la regla de evolución, podemos definir dos mapeos:

$$f_{R_\phi} : s \rightarrow R_\phi, s \in K^{6r}, \tag{4}$$

$$f_{L_\phi} : s \rightarrow L_\phi, s \in K^{6r}; \tag{5}$$

dependiendo de la evolución que tenga cada cadena le corresponderá un elemento, tanto en el conjunto R_ϕ como en el conjunto L_ϕ ; por lo tanto, podemos definir una función más general f_ϕ (Fig. 6) como sigue:

$$f_\phi : s \rightarrow [f_{L_\phi}(s), f_{R_\phi}(s)], s \in K^{6r}. \tag{6}$$

Dado que el autó-mata es reversible, los ancestros de una cadena sólo difieren en los extremos, que es justamente lo que la función f_ϕ obtiene. Haciendo uso de los índices de Welch, tenemos que

$$|R_\phi| = Rk^{2r}, \tag{7}$$

$$|L_\phi| = Lk^{2r}. \tag{8}$$

Sabemos también que $RL = k^{2r}$, en el caso en que ambos índices son iguales, tenemos que $R = L = k^r$, por lo tanto $|R_\phi| = |L_\phi| = k^{3r}$. Podemos hacer una biyección entre los conjuntos L_ϕ y R_ϕ , y el conjunto K^{3r} ; a éstas las denominamos b_R y b_L , respectivamente. Con estas construcciones, podemos entonces representar el comportamiento de un autó-mata reversible con el diagrama mostrado en la Fig. 7.

El comportamiento del autó-mata se puede comprender por medio de dos permutaciones en bloque, una para la regla de evolución original (p_1) y otra para la regla inversa (p_2). Entonces el funcionamiento reversible se modela de la siguiente manera:

- Se parte una configuración en bloques de tamaño $6r$.
- Cada bloque se permuta utilizando p_1 , que es aplicar la función f_ϕ y las biyecciones b_L y b_R .

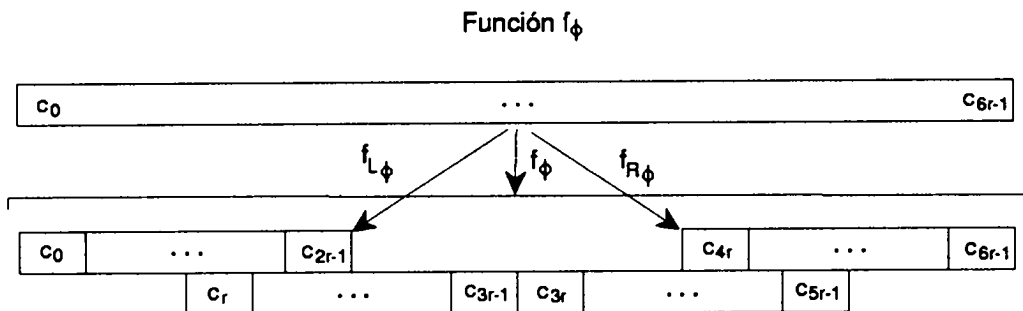


FIGURA 6. Mapeo de una secuencia de $6r$ células a elementos de L_ϕ y H_ϕ .

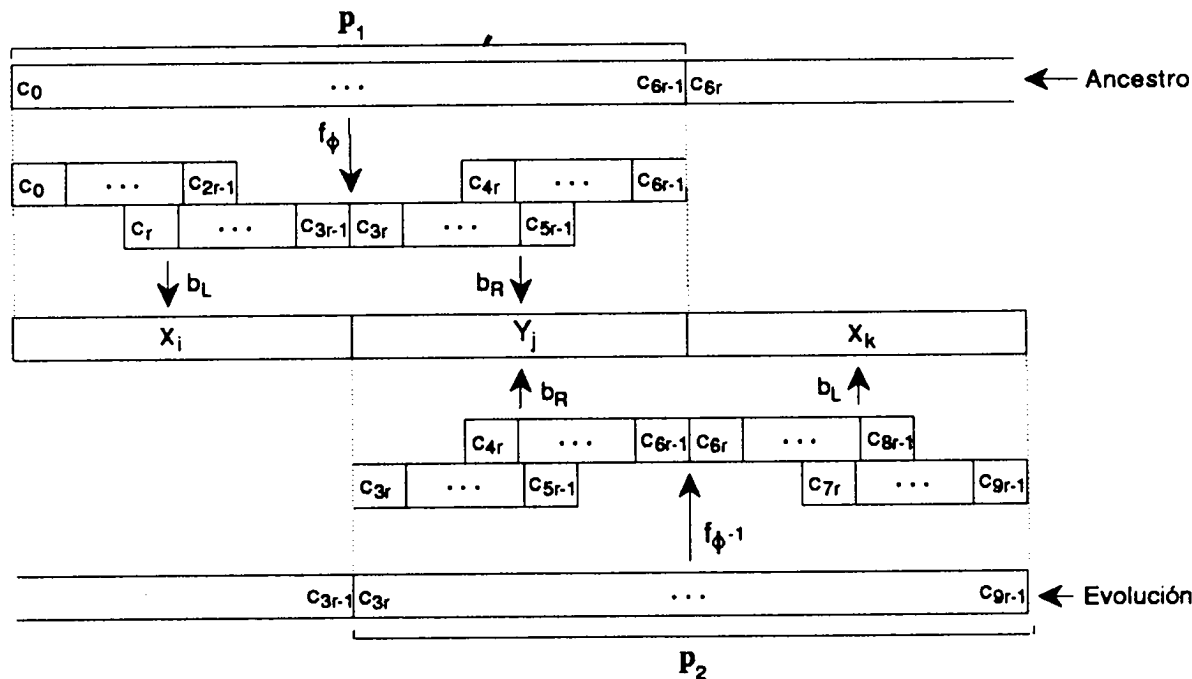


FIGURA 7. Funcionamiento de un autómata reversible por medio de permutaciones en bloque.

- Se hace un corrimiento de magnitud $3r$ en la nueva secuencia generada.
- Se parte esta secuencia en bloques de tamaño $6r$.
- Sobre estos bloques se aplica p_2 en sentido inverso, aplicando primero las biyecciones b_L y b_R y después $f_{\phi^{-1}}$ en sentido inverso.

De estas permutaciones en bloque observamos propiedades importantes:

- $L_\phi = R_{\phi^{-1}}$.
- $R_\phi = L_{\phi^{-1}}$.
- El índice L en ϕ es igual al índice R en ϕ^{-1} .
- El índice R en ϕ es igual al índice L en ϕ^{-1} .

4.2. Aplicando el proceso a todo tipo de autómatas reversibles

El proceso anterior explica convenientemente el funcionamiento de un autómata reversible cuando los índices L y R tienen el mismo valor. Sin embargo, esto no siempre ocurre, la condición de reversibilidad indica que $LR = k^{2r}$, pero esto no establece que siempre ambos índices deban ser iguales. Por ejemplo, si k^{2r} es un número primo, entonces uno de los índices debe ser 1 y el otro debe ser también k^{2r} .

Tenemos que el procedimiento anterior, en donde ambos índices son iguales, establece biyecciones entre los conjuntos R_ϕ y L_ϕ con el conjunto K^{3r} , pero si los índices son distintos entre sí, estas biyecciones ya no son posibles.

Una forma sencilla de solventar esto es la siguiente [4]; sabemos que $|R_\phi| = Rk^{2r}$ y que $|L_\phi| = Lk^{2r}$. Podemos definir dos conjuntos, $X = \{x_i, 0 \leq i < Lk^{2r}\}$ y $Y = \{y_i, 0 \leq i < Rk^{2r}\}$, con estos conjuntos podemos redefinir las biyec-

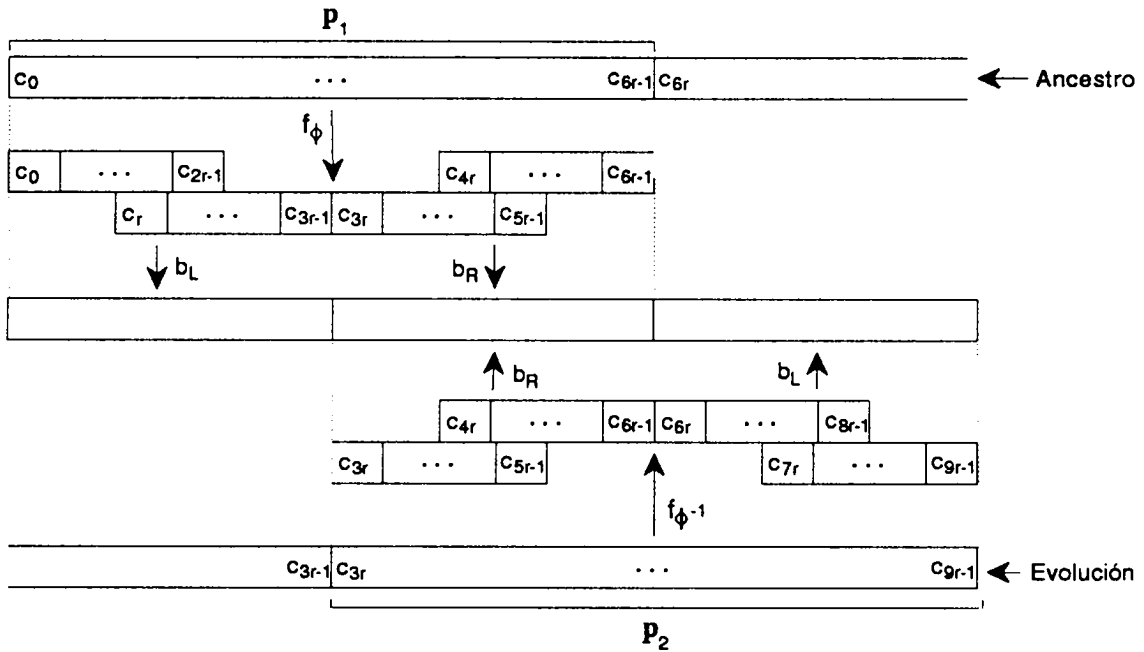


FIGURA 8. Uso de los conjuntos X y Y en las permutaciones en bloque.

ciones b_L y b_R como sigue:

$$b_L : L_\phi \rightarrow X, \tag{9}$$

$$b_R : R_\phi \rightarrow Y. \tag{10}$$

Ahora ya podemos aplicar el mismo proceso, pero utilizando la redefinición de estas biyecciones, como se muestra en la Fig. 8.

El proceso ahora lo que realizará es que cada bloque de células de tamaño $6r$ se permutará por una secuencia de la forma $x_i y_j$. En la nueva configuración se hace el corrimiento de un elemento equivalente a un corrimiento de magnitud $3r$, y sobre cada secuencia de la forma $y_j x_k$, se hace otra permutación a un bloque de células de tamaño $6r$. La nueva configuración así producida estará recorrida con respecto a la anterior en $3r$ lugares, obteniendo el comportamiento reversible del autómata. Si este proceso se realiza en el sentido inverso, dado que la regla de evolución original como la inversa tiene el mismo valor de r , el tamaño de los bloques y el corrimiento es el mismo.

Hay que señalar que las permutaciones p_1 y p_2 son sólo una forma de etiquetar bloques de tamaño $6r$ en la configuración, por lo que esta simple modificación en el proceso sigue conservando el espíritu del funcionamiento de un autómata reversible como permutaciones en bloque.

5. Forma de las permutaciones en bloque

Hemos visto que para un autómata reversible en donde ϕ y ϕ^{-1} tengan el mismo valor de r , el comportamiento se puede representar por medio de dos permutaciones en bloque

y un corrimiento. Hemos generalizado también este proceso para cualquier valor de los índices de Welch utilizando los conjuntos X y Y . Una pregunta inmediata es de qué forma deben ser estas permutaciones para que cumplan con el proceso descrito.

Analizaremos en detalle el caso en donde $r = 1/2$, ya que los demás casos se pueden llevar a éste como hemos visto en la Sec. 2.

5.1. Propiedades básicas de las permutaciones

El proceso indica que debemos hacer permutaciones desde el conjunto K^{6r} , para el caso $r = 1/2$ el conjunto es K^3 . Para este mismo valor de r tenemos que $|L_\phi| = Lk^{2r} = Lk$ y que $|R_\phi| = Rk^{2r} = Rk$.

Primero comprendamos el funcionamiento del autómata reversible con $r = 1/2$, basta una secuencia de 2 células para que en sus ancestros se fije una única célula central con la cual regresar en la evolución. Esta única célula central tiene asociadas L células izquierdas y R células derechas, sin tomar en cuenta esta célula, la parte izquierda de esta construcción es un elemento de L_ϕ y la parte derecha es un elemento de R_ϕ (ver Fig. 9).

Por supuesto, en las células sucesoras toda combinación es posible, es decir, no puede faltar ninguna vecindad en la regla inversa ϕ^{-1} . De esta construcción podemos notar que cada célula sucesora tiene asociadas L células izquierdas ancestras y R células derechas ancestras.

Para cada elemento del conjunto L_ϕ , la parte sucesora está relacionada con todos los posibles estados del autómata, lo que hace un total de k posibilidades. Como cada una de

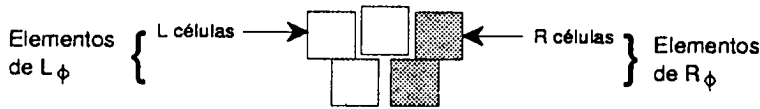


FIGURA 9. Estructura de un autómata reversible con $r = 1/2$.

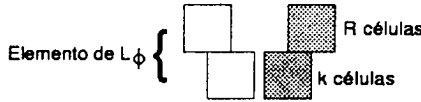


FIGURA 10. Extensiones derechas de un elemento de L_ϕ .

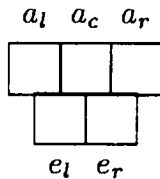


FIGURA 11. Construcción básica para el análisis de autómatas celulares unidimensionales reversibles.

estas células tiene R células ancestras derechas, cada elemento de L_ϕ tiene Rk posibles extensiones derechas, es decir, a todo el conjunto R_ϕ . Esto nos lleva a las dos primeras propiedades que cumplen estas permutaciones (ver Fig. 10).

Propiedad 1. Para $0 \leq i < Lk$, cada $x_i \in X$ tiene asociado a todos los elementos de Y .

Como cada elemento de X tiene el mismo número de asociaciones, esto implica la siguiente propiedad:

Propiedad 2. Para $0 \leq i < Lk$ y para $0 \leq j < Rk$, cada $x_i \in X$ aparece el mismo número de veces que el resto de los elementos de X en el conjunto de secuencias de la forma $x_i y_j$ para ϕ . Lo mismo ocurre en el conjunto de secuencias $y_j x_i$ para ϕ^{-1} . Esto es análogo para cada $y_j \in Y$.

Para las siguientes propiedades, tomemos la construcción en la Fig. 11 como referencia.

Esta construcción representa tres células ancestras, $a_l a_c a_r$, y su evolución al aplicar la regla ϕ ; $e_l e_r$. Estas letras deben ser entendidas como las posiciones específicas de cada célula en la construcción y no deben confundirse con estados del conjunto K .

Supongamos que las células $a_l a_c$ se encuentran en dos elementos fijos del conjunto K . Entonces, estas células especifican un único estado en e_l , por lo que el bloque $a_l e_l$ es un elemento de L_ϕ . Esto nos lleva a la siguiente propiedad:

Propiedad 3. Sea $0 \leq i < Lk$ y $0 \leq j < Rk$; si las células $a_l a_c$ toman dos valores fijos de K , entonces a la secuencia completa $a_l a_c a_r$ le corresponde un único elemento $x_i \in X$ sin importar que valores tome la célula a_r . Del mismo modo, si la misma secuencia $a_l a_c a_r$ toma dos valores fijos de K en $a_c a_r$, entonces le corresponde un único elemento $y_j \in Y$ sin importar que valores tome la célula a_l .

En la posición a_c pueden estar todos los posibles estados de K , esto indica que cada estado debe tener L células a la

izquierda para formar a un mismo estado y R células a la derecha para el mismo caso. Esto se generaliza para cada estado sin importar en que posición se encuentre en las células ancestras de la construcción utilizada. La observación anterior produce la siguiente propiedad:

Propiedad 4. Para todo bloque $a_l e_l \in L_\phi$ deben existir R posibles estados en la posición a_c tal que con el estado en a_l formen el mismo estado en e_l . Para todo bloque $a_r e_r \in R_\phi$ deben existir L posibles estados en la posición a_c tal que con el estado en a_r formen el mismo estado en e_r .

Usemos nuevamente nuestra construcción. Sabemos que para generar un estado particular en e_l , la célula a_c tiene L posibilidades en a_l y para generar un estado específico en e_r , a_c tiene R posibilidades en a_r .

Tomando los L distintos bloques $a_l e_l$ que sólo varían en la posición a_l cuando a_c se mantiene fijo en un estado, tenemos que en todos estos bloques las células $a_r e_r$ se extienden de la misma forma. Si ordenamos de manera descendente las secuencias $a_l a_c a_r$, variando el estado de a_r desde 0 a $k - 1$, tenemos que los L distintos bloques $a_l e_l$ compartirán el mismo orden de aparición de las extensiones derechas en $a_r e_r$.

En este caso, sabemos que a_c tiene R extensiones para generar un estado en particular en e_r . Dado que el total de extensiones posibles de a_c es k , entonces el total de estados que puede tomar e_r es $k/R = L$. Así, si a_c permanece en un estado fijo, los L bloques en $a_l e_l$ comparten el mismo orden en las extensiones a la derecha en $a_r e_r$. Con esto e_r toma L posibles valores, y para cada uno de estos, a_r tiene R posibilidades. Entonces, los L elementos de L_ϕ comparten las mismas $LR = k$ extensiones derechas en el mismo orden para a_c fija.

Ahora bien, por la propiedad anterior, R estados en a_c son posibles de colocar junto a los L bloques $a_l e_l$ para formar el mismo elemento en e_l . Si para cada estado en a_c existen LR extensiones derechas compartidas, tenemos en total RLR extensiones derechas a los L bloques $a_l e_l$ compartiendo el mismo orden. Pero como $RLR = Rk$, esto quiere decir que cada uno de los bloques $a_l e_l$ tiene Rk extensiones derechas compartidas con los demás bloques. En otras palabras, cada uno de estos L elementos de L_ϕ está conectado con todos los elementos de R_ϕ , lo que nos lleva a esta propiedad:

Propiedad 5. Para las células $a_l a_c a_r$, el conjunto X se agrupa en k particiones de L elementos cada una, en donde los elementos de cada partición comparten el mismo orden de concatenación con todos los elementos de Y si las secuencias $a_l a_c a_r$ se ordenan de manera descendente variando primero los estados de a_r y después los de a_c .

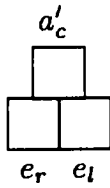


FIGURA 12. Parte central única en los ancestros de $e_r e_l$.

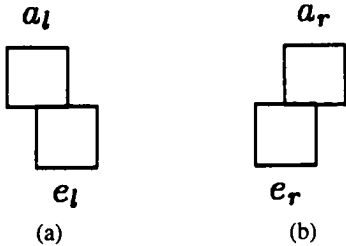


FIGURA 13. Bloques de (a) L_ϕ y (b) R_ϕ .

Por último, tenemos que cada estado en e_l tiene L estados posibles en la posición a_l ; a este conjunto de L estados llamémoslo A_l . También cada estado en e_r tiene R estados posibles en la posición a_r , a este conjunto de R estados denominémoslo A_r . Dado que el valor de $r = 1/2$ es el mismo para ϕ como para ϕ^{-1} , entonces la secuencia $e_r e_l$ forma una vecindad de ϕ^{-1} , la cual genera un único estado en a'_c como se muestra en la Fig. 12.

Para un estado en e_r existe un conjunto A_r en donde cada elemento de éste puede estar en la célula a'_c . Además, para un estado en e_l existe un conjunto A_l en donde cada elemento es un posible estado de a'_c . Lo anterior nos lleva a la siguiente propiedad:

Propiedad 6. Para $0 \leq i < k$; sea el conjunto L_ϕ dividido en k particiones de L elementos, en donde los elementos de cada partición sólo concuerdan en la posición e_l que puede tomar cualquier valor i . Así los L estados posibles en a_l forman el conjunto A_l . Sea el conjunto R_ϕ dividido en k particiones de R elementos, en donde los elementos de cada partición sólo concuerdan en la posición e_r , que puede tomar cualquier valor i . Los R estados posibles en a_r forman el conjunto A_r ; entonces:

$$|A_{l_i} \cap A_{r_i}| = 1. \tag{11}$$

5.2. Obteniendo la regla inversa ϕ^{-1} de las permutaciones p_1

Hasta ahora hemos visto las propiedades que deben cumplir las permutaciones p_1 en un autómata reversible. Veamos entonces como se puede obtener ϕ^{-1} de una permutación p_1 dada. Usemos como referencia los bloques correspondientes tanto a L_ϕ como a R_ϕ , mostrados en la Fig. 13.

Para la regla inversa ϕ^{-1} , el papel de estas posiciones se intercambia, es decir, en los bloques de L_ϕ lo que era la parte izquierda del ancestro ahora es la evolución derecha, y lo que era la parte de la evolución izquierda pasa a ser la parte derecha del ancestro. En los bloques de R_ϕ , la posición corres-

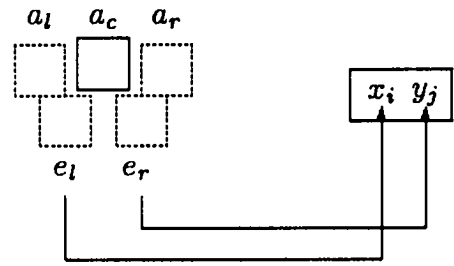


FIGURA 14. Especificación de la permutación p_1 .

pondiente a la parte derecha del ancestro ahora actúa como evolución izquierda y lo que era evolución derecha actuará como parte izquierda del ancestro; esto nos lleva a

L_ϕ	\rightarrow	R_ϕ^{-1}	R_ϕ	\rightarrow	L_ϕ^{-1}
a_l	\rightarrow	e'_r	a_r	\rightarrow	e'_l
e_l	\rightarrow	a'_r	e_r	\rightarrow	a'_l

Entonces, podemos hacer particiones en el conjunto L_ϕ , en donde los elementos de cada partición coincidan en la posición a_l . Del mismo modo hagamos la partición del conjunto R_ϕ , de modo que los elementos de cada partición coincidan en la posición a_r . Tendremos en ambos casos k particiones, pues en estas posiciones se encuentran todos los elementos de K . Sea $0 \leq i < k$, cada partición i en L_ϕ tendrá L elementos distintos en la posición e_l puesto que son al mismo tiempo las posiciones a'_r en R_ϕ^{-1} , sabiendo que el índice de Welch derecho de ϕ^{-1} es igual a L . De cada partición i tomemos los elementos e_l y formemos el conjunto E_{l_i} ; de manera análoga, cada partición i en R_ϕ tendrá R elementos distintos en e_r , que a su vez es a'_l , tomemos estos y formemos el conjunto E_{r_i} para cada partición.

Con estas particiones podemos entonces formar a ϕ^{-1} . Para $0 \leq i < k$, en la regla inversa cada estado i tendrá R estados izquierdos ancestros especificados en E_{r_i} y L estados derechos ancestros especificados en E_{l_i} . Entonces, la concatenación de todos los elementos del conjunto E_{r_i} con todos los elementos del conjunto E_{l_i} nos dará todas las vecindades ancestros del estado i .

5.3. Relación entre la permutación p_1 y la permutación p_2

Como es de suponer existe una fuerte relación entre ambas permutaciones, ya que están compuestas por los mismos conjuntos L_ϕ y R_ϕ , pero jugando un distinto rol en ambos casos. Mientras que para ϕ los bloques se forman por la concatenación XY , en ϕ^{-1} la concatenación es YX . Además, en el primer caso L_ϕ representa extremos izquierdos y en el segundo forman extremos derechos, cuestión que es análoga para R_ϕ .

Para $r = 1/2$, a cada bloque de $6r = 3$ células le corresponde dos permutaciones, dependiendo de su evolución. Así, para $0 \leq i < Lk$ y $0 \leq j < Rk$, p_1 se especifica de acuerdo a la construcción mostrada en la Fig. 14. En donde $a_l e_l \in L_\phi$

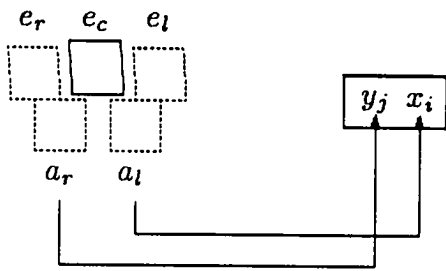


FIGURA 15. Especificación de la permutación p_2 .

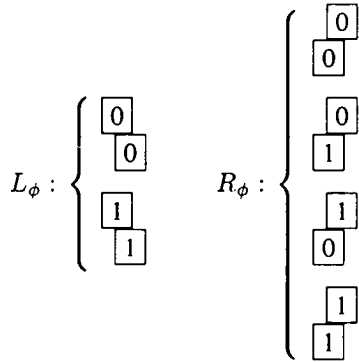
y $a_r e_r \in R_\phi$. Ahora bien, p_2 funciona de acuerdo a la construcción mostrada en la Fig. 15, donde $e_r a_r \in L_{\phi^{-1}} = R_\phi$ y $e_l a_l \in R_{\phi^{-1}} = L_\phi$. Es decir, las permutaciones p_1 y p_2 varían dependiendo del papel que jueguen las posiciones $a_l a_r e_l e_r$, ya sea como parte de los ancestros o como evolución.

5.4. Proliferación de permutaciones

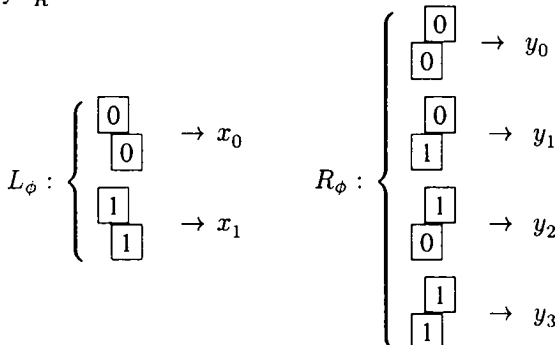
Cada autómata reversible tendrá sus conjuntos L_ϕ y R_ϕ particulares y estos lo harán único del resto. La forma en que se definan las biyecciones b_L y b_R son las que nos ofrecen distintas permutaciones para un mismo autómata. Por ejemplo, tomemos un caso (2h) con índices de Welch $L = 1$ y $R = 2$.

Regla Original: C		Regla Inversa: A	
	0 1		0 1
0	0 0	0	0 1
1	1 1	1	0 1

Los elementos de L_ϕ y R_ϕ son los siguientes:



Hagamos ahora la siguiente asignación de las biyecciones b_L y b_R :



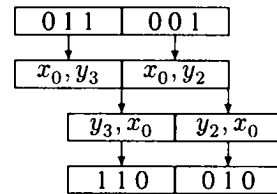
Con esto, las permutaciones p_1 y p_2 son las siguientes:

Secuencia	p_1	p_2
000	$x_0 y_0$	$y_0 x_0$
001	$x_0 y_2$	$y_0 x_1$
010	$x_0 y_1$	$y_2 x_0$
011	$x_0 y_3$	$y_2 x_1$
100	$x_1 y_0$	$y_1 x_0$
101	$x_1 y_2$	$y_1 x_1$
110	$x_1 y_1$	$y_3 x_0$
111	$x_1 y_3$	$y_3 x_1$

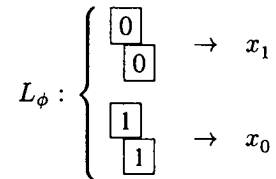
Tomando una configuración aleatoria, una evolución será de la siguiente forma:

0 1 1 0 0 1
0 1 1 0 0 1

Y aplicando las permutaciones tenemos:



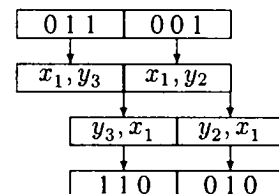
Ahora bien, hagamos una nueva asignación entre L_ϕ y X



Esto nos lleva a las siguientes permutaciones p_1 y p_2 :

Secuencia	p_1	p_2
000	$x_1 y_0$	$y_0 x_1$
001	$x_1 y_2$	$y_0 x_0$
010	$x_1 y_1$	$y_2 x_1$
011	$x_1 y_3$	$y_2 x_0$
100	$x_0 y_0$	$y_1 x_1$
101	$x_0 y_2$	$y_1 x_0$
110	$x_0 y_1$	$y_3 x_1$
111	$x_0 y_3$	$y_3 x_0$

Volviendo aplicar estas permutaciones sobre la misma configuración, obtenemos



Se ha llegado a obtener el mismo resultado que con las permutaciones anteriores. En síntesis, obtendremos tantas

permutaciones repetidas como asignaciones distintas podemos hacer de b_L y b_R . Dado que $|X| = Lk$ y $|Y| = Rk$, tenemos tantas asignaciones posibles para b_L como $(Lk)!$ y tantas para b_R como $(Rk)!$. Entonces para dos conjuntos L_ϕ y R_ϕ dados, tendremos tantas asignaciones distintas a XY y YX como $[(Lk)! * (Rk)!]$.

6. Casos de estudio

Con las propiedades anteriores se desarrolló un programa que hace la computación de autómatas celulares reversibles formando las permutaciones en bloque. Este programa está inspirado en el sistema NXLCAU desarrollado por el Dr. H.V. McIntosh para el estudio de autómatas celulares unidimensionales [12]. El programa corre en los sistemas operati-

vos OpenStep y MacOSX los cuales permiten hacer cálculo numérico intensivo de forma accesible y confiable. A continuación presentamos dos ejemplos de su funcionamiento.

6.1. Caso (4, 1/2), L = 1, R = 4

Para este caso se obtuvo el siguiente autómata:

Regla Original: FFAA5500				
	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3

Regla Inversa: E4E4E4E4E4				
	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	0	1	2	3
2	0	1	2	3
3	0	1	2	3

con las siguientes permutaciones:

Cadena	p_1	p_2
000	x_0y_0	y_0x_0
001	x_0y_4	y_0x_1
002	x_0y_8	y_0x_2
003	x_0y_{12}	y_0x_3
010	x_0y_5	y_4x_0
011	x_0y_1	y_4x_1
012	x_0y_9	y_4x_2
013	x_0y_{13}	y_4x_3
020	x_0y_6	y_8x_0
021	x_0y_{10}	y_8x_1
022	x_0y_2	y_8x_2
023	x_0y_{14}	y_8x_3
030	x_0y_7	$y_{12}x_0$
031	x_0y_{11}	$y_{12}x_1$
032	x_0y_{15}	$y_{12}x_2$
033	x_0y_3	$y_{12}x_3$

Cadena	p_1	p_2
100	x_1y_0	y_5x_0
101	x_1y_4	y_5x_1
102	x_1y_8	y_5x_2
103	x_1y_{12}	y_5x_3
110	x_1y_5	y_1x_0
111	x_1y_1	y_1x_1
112	x_1y_9	y_1x_2
113	x_1y_{13}	y_1x_3
120	x_1y_6	y_9x_0
121	x_1y_{10}	y_9x_1
122	x_1y_2	y_9x_2
123	x_1y_{14}	y_9x_3
130	x_1y_7	$y_{13}x_0$
131	x_1y_{11}	$y_{13}x_1$
132	x_1y_{15}	$y_{13}x_2$
133	x_1y_3	$y_{13}x_3$

Cadena	p_1	p_2
200	x_2y_0	y_6x_0
201	x_2y_4	y_6x_1
202	x_2y_8	y_6x_2
203	x_2y_{12}	y_6x_3
210	x_2y_5	$y_{10}x_0$
211	x_2y_1	$y_{10}x_1$
212	x_2y_9	$y_{10}x_2$
213	x_2y_{13}	$y_{10}x_3$
220	x_2y_6	y_2x_0
221	x_2y_{10}	y_2x_1
222	x_2y_2	y_2x_2
223	x_2y_{14}	y_2x_3
230	x_2y_7	$y_{14}x_0$
231	x_2y_{11}	$y_{14}x_1$
232	x_2y_{15}	$y_{14}x_2$
233	x_2y_3	$y_{14}x_3$

Cadena	p_1	p_2
300	x_3y_0	y_7x_0
301	x_3y_4	y_7x_1
302	x_3y_8	y_7x_2
303	x_3y_{12}	y_7x_3
310	x_3y_5	$y_{11}x_0$
311	x_3y_1	$y_{11}x_1$
312	x_3y_9	$y_{11}x_2$
313	x_3y_{13}	$y_{11}x_3$
320	x_3y_6	$y_{15}x_0$
321	x_3y_{10}	$y_{15}x_1$
322	x_3y_2	$y_{15}x_2$
323	x_3y_{14}	$y_{15}x_3$
330	x_3y_7	y_3x_0
331	x_3y_{11}	y_3x_1
332	x_3y_{15}	y_3x_2
333	x_3y_3	y_3x_3

Para reducir la forma en que escribiremos estas permutaciones observemos lo siguiente. En cada una de las posiciones $a_l a_c$ aparecerán los k posibles estados, teniendo en total k^2 instancias distintas. Cada instancia posible se repite k veces antes de pasar a la siguiente. Para las posiciones $a_c a_r$, las k^2 instancias aparecen en forma continua y esta sucesión se repite k veces. Entonces, para las dos permutaciones apuntemos solo una vez la x_i correspondiente a cada instancia $a_l a_c$, y hagamos lo mismo para las y_i de cada instancia $a_c a_r$.

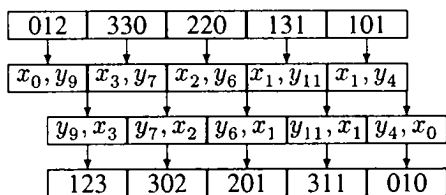
- Lista X_{p_1} : {0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3}
- Lista Y_{p_1} : {0, 4, 8, 12, 5, 1, 9, 13, 6, 10, 2, 14, 7, 11, 15, 3}
- Lista Y_{p_2} : {0, 4, 8, 12, 5, 1, 9, 13, 6, 10, 2, 14, 7, 11, 15, 3}
- Lista X_{p_2} : {0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3}

Con esto, para obtener la permutación p_1 de la tabla original tomemos el primer elemento de la lista de X_{p_1} y repitámoslo k veces, haciendo el mismo proceso para el resto de la lista. Después, otra vez desde el inicio de la tabla, pongamos la lista Y_{p_2} corrida y repitamos esto k veces. Para obtener la permutación p_2 se hace el proceso análogo utilizando primero Y_{p_2} y después X_{p_2} .

Tomemos una configuración aleatoria y veamos cómo evoluciona

0 1 2 3 3 0 2 2 0 1 3 1 1 0 1
0 1 2 3 3 0 2 2 0 1 3 1 1 0 1

Ahora, agrupemos esta configuración y apliquemos las permutaciones en bloque con el corrimiento:



Hemos obtenido la misma evolución que aplicando la regla de evolución ϕ , con un corrimiento de $3r = 3/2$ posiciones.

6.2. Caso $(4, 1/2)$, $L = 2$, $R = 2$

Para este caso tenemos los siguientes ejemplos:

Regla Original: EEEE1414				
	0	1	2	3
0	0	1	1	0
1	0	1	1	0
2	2	3	2	3
3	2	3	2	3

Regla Inversa: F5A0A5F0				
	0	1	2	3
0	0	0	3	3
1	1	1	2	2
2	0	0	2	2
3	1	1	3	3

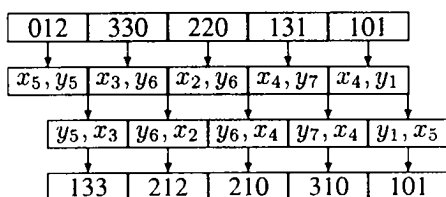
Las permutaciones son las siguientes:

- Lista $_{X_{p_1}}$: {0, 5, 5, 0, 4, 1, 1, 4, 2, 7, 2, 7, 6, 3, 6, 3}
- Lista $_{Y_{p_1}}$: {0, 1, 5, 4, 0, 1, 5, 4, 6, 7, 2, 3, 6, 7, 2, 3}
- Lista $_{Y_{p_2}}$: {0, 0, 4, 4, 1, 1, 5, 5, 6, 6, 2, 2, 7, 7, 3, 3}
- Lista $_{X_{p_2}}$: {0, 5, 6, 3, 4, 1, 2, 7, 0, 5, 2, 7, 4, 1, 6, 3}

Tomando la misma configuración aleatoria usada anteriormente, veamos su evolución

0 1 2 3 3 0 2 2 0 1 3 1 1 0 1
 1 1 3 3 2 1 2 2 1 0 3 1 0 1 0

Apliquemos el proceso a esta configuración:



7. Conclusiones

Hemos visto que para explicar el comportamiento reversible de un autómata celular unidimensional podemos decir que la regla de evolución trabaja de la forma en que lo hicieran dos permutaciones en bloque en las configuraciones.

Estas permutaciones para ser válidas deben guardar un orden muy estricto. Su comportamiento está principalmente influenciado por los índices de Welch, como se muestra en las siguientes características:

- Secuencias de células de tamaño $6r$ similares tendrán permutaciones muy parecidas.
- El valor de la cardinalidad de los conjuntos X y Y .
- La forma en que los elementos de X y Y se concatenan.

Al entender cómo funcionan estas permutaciones para el caso de autómatas con $r = 1/2$ lo estamos haciendo para todos los casos. Esto es ya que con el primero se pueden simular los demás si no de forma elegante si de manera efectiva.

La relación entre las permutaciones p_1 y p_2 es muy sutil e inmediata. El determinar p_1 automáticamente determina también p_2 y viceversa, ya que se construyen de los mismos bloques en L_ϕ y R_ϕ . Aquí solo varía el papel en que los elementos de cada bloque funcionan; si como ancestros o como evolución. Pero aún podemos ir más allá; la asignación del conjunto X a las distintas secuencias determina a su vez la asignación del conjunto Y . Para establecer la relación entre las secuencias y el conjunto X debemos ver el estado de las células $a_i a_c$ y e_i ; es decir, como mínimo tenemos ya una vecindad completa y su evolución. Esto determina a ϕ completamente, lo que nos indica la forma en que debemos posicionar al conjunto Y con respecto a las secuencias.

Cada autómata reversible tiene conjuntos propios L_ϕ y R_ϕ que a su vez se pueden renombrar de $[(Lk)! * (Rk)!]$ maneras por las biyecciones b_L y b_R . Con esto obtenemos un número muy grande de permutaciones distintas que especifican el mismo autómata reversible.

Agradecimientos

Agradezco al Dr. H.V. McIntosh por sus observaciones y comentarios en la realización de este escrito; así como al Dr. S.V. Chapa y al Dr. R. Baquero por sus comentarios sobre la presentación del mismo. Este trabajo fue elaborado contando con apoyo de CONACYT con registro 119 324.

1. T. Toffoli and N. Margolus, *Cellular Automata Machines*, (The MIT Press, Cambridge Massachusetts, 1987).
2. S. Wolfram (Ed.), *Theory and Applications of Cellular Automata*, (World Scientific Press, Singapore, 1986).
3. D. Lind and B. Marcus, *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
4. J.C. Seck Tuoh Mora, *Rev. Mex. Fís.* **46** (2000) 14.
5. D. Richardson, *J. Comp. Sys. and Science* **6** (1972) 373.

6. G.A. Hedlund, *Mathematical Systems Theory* **3** (1969) 320.
7. H.V. McIntosh, *Linear Cellular Automata via de Bruijn Diagrams*, <http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh>.
8. H.V. McIntosh, *Reversible Cellular Automata*, <http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh>.
9. J. Kari, "On the Inverse Neighborhoods of Reversible Cellular Automata", *Lindenmayer Systems*, (Springer, Berlin, 1992), p. 447.
10. T. Boykett, *Comparism of Radius 1/2 and Radius 1 Paradigms in One Dimensional Reversible Cellular Automata*, <http://www.algebra.uni-linz.ac.at/~tim/radiuscomp.ps.gz>, Universidad Johannes Kepler, Linz, Austria, 1997.
11. J. Kari, *Mathematical Systems Theory* **29** (1996) 47.
12. El sistema NXLCAU está disponible para uso público en la página del Dr. H.V. McIntosh en: <http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh>.