Pasos para la resolución de problemas. 2

Angel Manzur
Departamento de Física, Ciencias Básicas e Ingenería, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa
Apartado postal 55-534, 09340 México, D.F., Mexico
e-mail: amg@xanum.uam.mx

Recibido el 8 de septiembre de 2000; aceptado el 6 de noviembre de 2000

Una práctica usual en la evaluación de los estudiantes es pedirles que resuelvan problemas, pero, además de los temas del curso, ¿les enseñamos realmente a resolver problemas? Aquí se hace una revisión de los pasos que se deben seguir para adquirir las habilidades necesarias para resolver problemas, haciendo énfasis en la interpretación física de la solución. Los pasos se ilustran con un ejemplo de solución de un problema de mecánica elemental.

Descriptores: Solución de problemas; trayectoria parabólica

When evaluating students, we usually ask them to solve problems. But besides the subjects studied in class, are we really teaching them how to solve problems? In this paper we review and explain the steps that should be taken when solving problems, emphasizing the physical interpretation of the solution. The steps are illustrated by the solution of an elementary mechanics problem.

Keywords: Problem solving; parabolic trajectory

PACS: 01.40.Gm; 03.20.+i

1. Introducción

Los profesores de ciencias básicas observamos con preocupación que la mayoría de los estudiantes cuando ingresan al nivel profesional tienen pocas habilidades para aprender ciencia. Esta deficiencia se debe, en parte, a que no se tiene formulado un curso completo de ciencia desde el nivel de la primaria con el propósito principal de que los estudiantes adquieran dominio en las habilidades necesarias para hacer trabajo científico apropiadamente en los diferentes niveles de instrucción. Es importante desarrollar habilidades que son inherentes en la resolución de problemas de ciencia al mismo tiempo que se obtienen nuevos conocimientos en materias específicas.

Muchas habilidades se desarrollan a través de la resolución de problemas, ya sea en forma teórica, experimental o mediante simulación. Una combinación de éstas permite un entrenamiento integral del estudiante cuando participa desde el principio en actividades elementales, y después en actividades más elaboradas, tales como la identificación del problema, la formulación de hipótesis, elaboración de un modelo teórico de la situación física, la predicción de resultados, estimación del efecto en el resultado al variar valores de algunos parámetros, diseñar un experimento y realizarlo ya sea cualitativa o cuantitativamente y, finalmente, escribir un informe de su experiencia. Debe recordarse que el desarrollo de las habilidades es principalmente de una naturaleza intelectual y que, por tanto, estamos comprometidos principalmente con el entrenamiento intelectual de los estudiantes [1]. En el laboratorio estas habilidades pueden ser demostradas activamente, pero los cursos teóricos de física también ofrecen muchas oportunidades para aprender y aplicar estas habilidades. Cuando se comprende la solución teórica de un problema de física se tiene el primer paso en la resolución integral; el paso siguiente sería diseñar un experimento y realizarlo.

Tradicionalmente la resolución de problemas es la piedra angular de un curso de física. Usualmente para evaluar a un estudiante se le pide que resuelva problemas, pero, además de los temas del curso, ¿le enseñamos sólo a obtener resultados numéricos o expresiones algebraicas o realmente le enseñamos a analizar la solución hasta extraer toda la información que contiene? El interés es que el estudiante, con la práctica de resolver problemas, tenga su maquinaria mental bien ejercitada para que cuando sea profesionista pueda resolver los problemas que se le presenten. Nuestra meta, después de todo, es preparar estudiantes para todos los posibles futuros, armándolos con el modo científico de pensar.

El propósito de poner problemas de física es que deseamos que los estudiantes demuestren el uso correcto de conceptos físicos. Lo que se desea no es la aplicación de una receta, sino la comprensión y uso de las habilidades para realmente resolver problemas. Después de todo la respuesta a cualquier problema en el nivel introductorio no es realmente importante como tal. Lo que es importante son las habilidades o herramientas usadas y la experiencia que se adquiere al trabajar en la solución. Algunos estudiantes no solamente traen deficiencias en ciencias cuando ingresan, sino también actitudes equivocadas, las cuales son difíciles de cambiar; una de estas actitudes es aquella que manifiestan al preguntarse sobre qué fórmula aplicar, cuando empiezan a resolver un problema.

Algunas personas se refieren a la física como una de las ciencias duras. Ciertamente, la física no es fácil, pero a menudo se acentúa esta dificutad. La hacemos dura al insistir que los estudiantes obtengan la respuesta correcta cuando hacemos poco para ayudarles a aprender cómo resolver problemas [2]. Probablemente hacemos irrazonablemente difícil a la física 1) cuando no ayudamos a los estudiantes a adquirir buenas habilidades para resolver problemas; 2) cuando no les mostramos el razonamiento que conduce a la primera ecuación que escribimos en la solución de un problema; 3) cuando los llevamos a creer que las ecuaciones son todo lo que es importante para resolver un problema, y que lo que resta por hacer es pura manipulación algebraica; y 4) cuando no les ayudamos a interpretar la solución y a descubrir toda la información que ella contiene. Por otro lado, la clase de ayuda y énfasis correctos en la solución de problemas puede resultar en estudiantes con herramientas superiores como algo que poseen por el esfuerzo y el tiempo que ellos invierten.

Dando a los estudiantes una guía de cómo resolver problemas, que les indique qué tan bien ellos han implementado ese plan en un problema y que les muestre que una buena solución sigue a un buen procedimiento, les ayuda verdaderamente a convertirse en mejores resolvedores de problemas. Esta guía ayuda principalmente a los estudiantes que no tienen el soporte adecuado en matemáticas y en física. Una diferencia entre un novato y un buen resolvedor de problemas es que este último trabaja a partir de principios fundamentales para construir primero una buena representación física del problema. La solución al problema se genera a partir de esta representación o esquema.

A continuación se describen los tres pasos principales que deben seguirse en el proceso de resolución de problemas [3, 4].

2. Planteamiento y análisis cualitativo

El enunciado del problema debe ser leído cuidadosamente, identificando los datos y las cantidades desconocidas que se desean encontrar. Es recomendable poner atención en los aspectos siguientes.

Análisis del enunciado. Asegurarse de que se entiende el significado **preciso** de todas las palabras del enunciado, ya sean palabras técnicas o palabras del lenguaje coloquial.

Representación gráfica. Casi siempre es posible hacer un dibujo o trazar un croquis con las anotaciones apropiadas.

Información. Se debe distinguir en el enunciado la información que se conoce y la información que se busca. Algunas veces los datos del problema aparecen en forma numérica y sus unidades identifican a la cantidad física; otras veces los datos aparecen en forma genérica sin unidades y el lector debe tener en cuenta el carácter escalar o vectorial de cada cantidad física. Las frases que contienen palabras como "qué", "encuentre", "cuánto" o "cuándo", indican la cantidad que se busca.

Símbolos. Es conveniente representar mediante símbolos algebraicos adecuados cada una de las cantidades físicas que intervienen; los símbolos con subíndices suelen usarse para representar la cantidad correspondiente a diferentes cuerpos o a valores particulares. Este es uno de los pasos cruciales que facilitan la búsqueda de la solución!

Análisis conceptual. Identificar los conceptos, variables o cantidades físicas que intervienen en el enunciado, así como las relaciones o leyes físicas que los conectan.

Análisis cualitativo. Considerar la pregunta o la información buscada tratando de estimar (parcial y aproximadamente) la solución. Es de gran ayuda responder a preguntas tales como: ¿qué cantidad física se busca?, ¿qué unidades tiene?, ¿es un escalar o un vector?, ¿qué orden de magnitud tiene?, ¿qué valores numéricos no pueden obtenerse?, ¿de cuáles cantidades físicas depende?, ¿qué tipo de dependencia se espera (lineal, inversa, cuadrática,)?

3. Análisis matemático

Es importante reconocer que las matemáticas son la herramienta fundamental para estudiar física y que sin ella no es posible resolver los problemas. Los aspectos importantes en este paso son.

Unidades. Escribir matemáticamente la información dada y asegurarse que la información numérica dada esté expresada en unidades de un mismo sistema y de preferencia del sistema internacional SI.

Marco de referencia. Es conveniente establecer un marco de referencia o sistema de coordenadas; las regiones de los valores positivos o negativos a lo largo de los ejes de coordenadas se pueden elegir según convenga, aunque, por lo general, la dirección positiva se elige en la dirección del movimiento. En algunos casos el cálculo se facilita más con algún sistema de referencia particular.

Ecuaciones. Las relaciones físicas se deben representar mediante relaciones matemáticas, es decir, mediante ecuaciones. Comprobar que las cantidades conocidas y las que se buscan están en las ecuaciones; una ayuda para lograr esto es respondiendo a la pregunta ¿cómo escribir lo que no se conoce en términos de lo que sí se conoce?. También es aconsejable comprobar la congruencia dimensional de cada término de las ecuaciones.

Método. Analizar el problema matemático, identificando el tipo de variables y de operaciones que en él aparece. Usar el método apropiado para resolver el problema matemático.

Gráfica. Representar gráficamente el problema matemático. Muchas veces esta representación ayuda a escoger la solución apropiada y a interpretarla.

4. Interpretación física de la solución

Esta es la parte con que culmina el proceso de resolver problemas y sería poco provechoso si no se dedica tiempo para analizar e interpretar el resultado. Se hacen a continuación algunas sugerencias.

Solución algebraica. El problema debe resolverse primero algebraicamente y después numéricamente. Recuérdese que si se resuelve el problema usando desde el principio los datos en forma numérica, al efectuar las operaciones numéricas la probabilidad de cometer errores aumenta y es muy difícil detectarlos; pueden aparecer errores de redondeo, y la situación se hace más complicada si los números son muy grandes o muy pequeños y, además, se quiere conservar en las operaciones el número adecuado de cifras significativas. Es más fácil hacer operaciones algebraicas sólo con símbolos que cuando también aparecen números, notoriamente si no son enteros.

Con la solución en forma algebraica se pueden realizar las actividades siguientes:

a) Representar gráficamente la solución encontrada.

b) Comparar la solución con la predicción hecha en el análisis cualitativo.

c) Analizar todo el procedimiento de solución tomando en cuenta los siguientes aspectos:

- ¿qué efectos son más importantes?,
- ¿qué datos podrían variarse sin afectar radicalmente el resultado?
- ¿hay alguna otra manera de obtener la solución?

Casos particulares y casos límites. A partir de la solución en forma algebraica es fácil analizar casos particulares y casos límites; los primeros se logran asignando valores numéricos particulares a algunas cantidades y los segundos se logran asignando los valores extremos de algunas cantidades. De esta manera se busca que la solución encontrada se reduzca a la de un problema más sencillo o a uno ya conocido o a una solución evidente. Si esto no se logra puede suceder que el problema no esté bien resuelto, en cuyo caso conviene revisarlo desde el principio.

Extensión del problema. Modificar el enunciado del problema para convertirlo en uno que represente una situación física parecida o un problema más general, y decidir cómo modificar la solución encontrada para que sirva de solución del nuevo problema o cómo modificar el planteamiento.

Aplicaciones. Pensar en la posibilidad de que la solución encontrada pueda ser considerada como una solución aproximada o idealizada de un problema más complicado; o que el problema resuelto pueda servir como modelo para explicar alguna situación física más complicada.

Se presenta un ejemplo de un problema de mecánica elemental en cuya solución se han seguido estos pasos propuestos. El propósito es que el estudiante se percate de los detalles del uso tanto de los conceptos físicos como de la herramienta matemática involucrados en la obtención de la solución y que, al mismo tiempo, descubra que se aprende física a través de los problemas cuando uno no se conforma con sólo llegar a la solución, sino también cuando se propone indagar la información contenida en ella. La intención es tener un ejemplo de cómo resolver un problema típico y, principalmente, de cómo interpretar la solución. La clave para resolver problemas nuevos y difíciles está contenida en la colección de habilidades que se aprenden al resolver problemas sencillos. Si uno no puede resolver un problema dado, ello no debe ser motivo para desanimarse. Se requiere esfuerzo y práctica para adquirir la habilidad requerida para resolver problemas. ¡Es necesario seguir insistiendo!

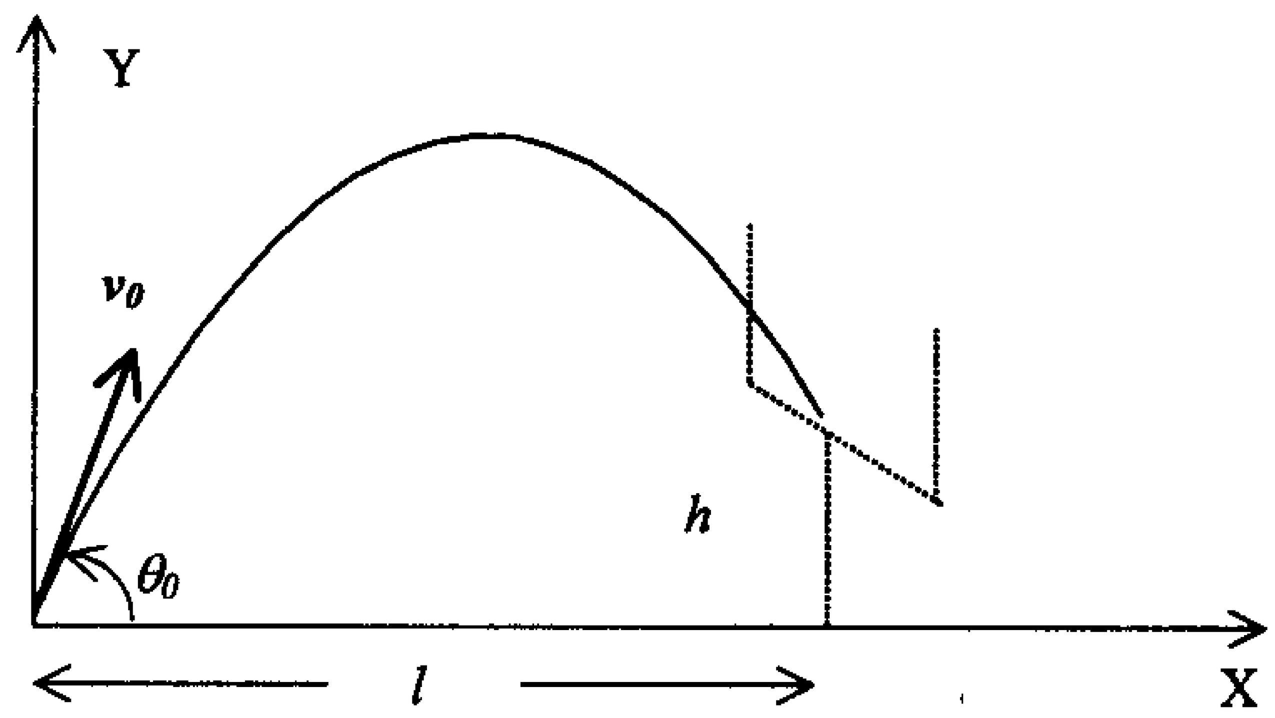

FIGURA 1. Sistema de coordenadas X-Y, datos del problema y una posible trayectoria para el problema del pateador de un equipo de futbol americano.

5. Problema [5]

El pateador de un equipo de futbol americano puede suministrar a la pelota una velocidad inicial v_0. Se encuentra en un punto situado a una distancia l (sobre el terreno) enfrente de los postes de gol cuya barra horizontal está a una altura h sobre el terreno. ¿Dentro de qué intervalo angular deberá ser pateada la pelota para anotar un gol de campo?

5.1. Planteamiento y análisis cualitativo

En la Fig. 1 se muestran el sistema de coordenadas que se usará (el eje Y es vertical y positivo hacia arriba, el eje X es horizontal y positivo hacia la portería), los datos del problema y una posible trayectoria de la pelota.

La pelota se encuentra inicialmente en el origen, se le imparte una velocidad de magnitud v_0 en una dirección especificada por el ángulo θ_0, y debe pasar por el punto con coordenadas (l, h) o por arriba. La estrategia para resolver el problema es primero encontrar la ecuación de la trayectoria correspondiente al ángulo θ_0, es decir, la ordenada y como función de x; después, sustituir los valores del punto (l, h) en la ecuación de la trayectoria. La fórmula que resulte debe ser una cuadrática, pues se trata de una parábola; a partir de ella se deben obtener los dos ángulos que la satisfacen. Estos dos ángulos representan los límites del intervalo angular que se busca.

5.2. Análisis matemático

Suponiendo que el aire no opone resistencia, la posición de la pelota en el tiempo t después de ser pateada está descrita por las ecuaciones cinemáticas en las direcciones horizontal y vertical, respectivamente, como

$$x = v_{0x} t, \tag{1}$$

$$y = v_{0y} t - \frac{g}{2} t^2. \tag{2}$$

En estas dos ecuaciones se ha escrito explícitamente la falta de aceleración en la dirección horizontal y que la aceleración de la gravedad es vertical y dirigida hacia la tierra; es decir, la aceleración es $-g$ de acuerdo con el sistema de coordenadas elegido.

La ecuación de la trayectoria se obtiene al despejar el tiempo de la primera ecuación y sustituirlo en la segunda; el resultado es

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2. \qquad (3)$$

Pero los coeficientes de x y de x^2 pueden escribirse en términos del ángulo θ_0 como

$$\frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \tan\theta_0$$

y como

$$\frac{1}{v_{0x}^2} = \frac{1}{v_0^2\cos^2\theta_0} = \frac{\cos^2\theta_0 + \operatorname{sen}^2\theta_0}{v_0^2\cos^2\theta_0} = \frac{1}{v_0^2}(1+\tan^2\theta_0).$$

De tal manera que la ecuación de la trayectoria resulta ser

$$y = (\tan\theta_0)x - \frac{g(1+\tan^2\theta_0)}{2v_0^2}x^2. \qquad (4)$$

Esta ecuación describe a todos los puntos de la trayectoria; en particular, contiene el punto con coordenadas (l, h). La fórmula (4) evaluada en este punto es una ecuación de segundo grado en $\tan\theta_0$, la cual al rearreglar los términos puede escribirse como

$$\tan^2\theta_0 - \frac{2v_0^2}{gl}\tan\theta_0 + \left(1 + \frac{2v_0^2h}{gl^2}\right) = 0.$$

Al resolver para la tangente del ángulo se obtiene

$$\tan\theta_0 = \frac{v_0^2}{gl} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gl}\right)^2 - \left(1 + \frac{2v_0^2h}{gl^2}\right)}. \qquad (5)$$

5.3. Interpretación física de la solución

A partir de este resultado se obtienen los 2 ángulos de disparo (θ_0^- y θ_0^+) que hacen que la trayectoria pase por el punto (l, h); el superíndice en el ángulo se refiere al signo tomado en la raíz cuadrada de la fórmula (5). Para cualquier otro ángulo cuyo valor esté comprendido entre θ_0^- y θ_0^+, la pelota pasará por arriba del punto (l, h). Es decir, el pateador anotará un gol de campo para cualquier ángulo inicial de disparo comprendido en el intervalo $\theta_0^- \leq \theta_0 \leq \theta_0^+$. Este resultado se ilustra más adelante con un ejemplo numérico.

Para que el resultado tenga significado físico, se exige que el radicando sea un número positivo; es decir, debe cumplirse que

$$\left(\frac{v_0^2}{gl}\right)^2 \geq \left(1 + \frac{2v_0^2h}{gl^2}\right). \qquad (6)$$

Cuando la igualdad en (6) se cumple, el radicando es cero y en este caso particular las dos posibles soluciones se colapsan en una sola.

La fórmula (5) contiene información más específica que la obtenida en (6); para mostrar esta información, la fórmula (5) puede escribirse como

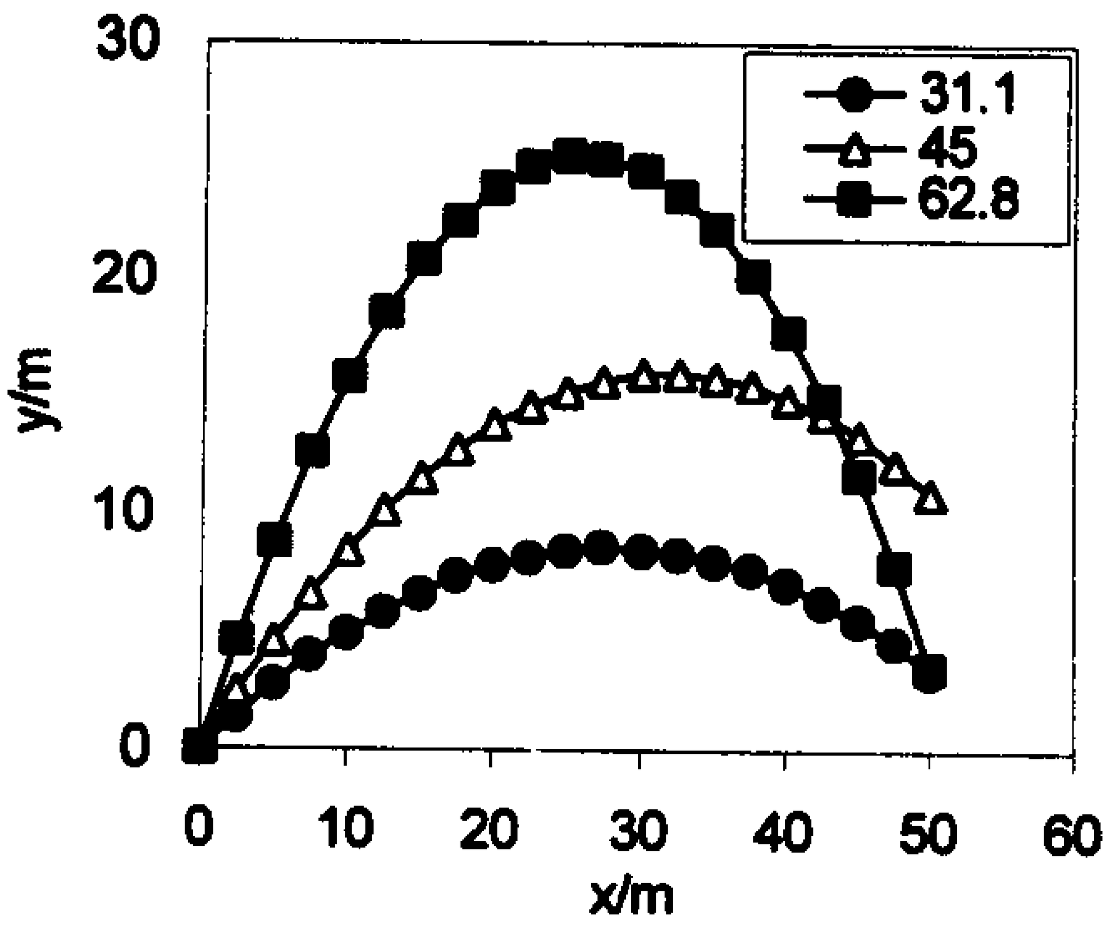

FIGURA 2. Trayectoria que sigue la pelota con $v_0 = 25$ m/s, $\ell = 50$ m y $h = 3.44$ m pateada al ángulo $\theta_0 = 31.1°$ y $62.8°$. También muestra la trayectoria que seguiría si fuera pateada a un ángulo $\theta_0 = 45°$.

$$\tan\theta_0 = \frac{v_0^2}{gl} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gl}+1\right)\left(\frac{v_0^2}{gl}-1\right) - \frac{2v_0^2h}{gl^2}}. \qquad (5')$$

Aquí se ve claro que para que el producto de los dos factores entre paréntesis sea positivo, debe cumplirse necesariamente que

$$\frac{v_0^2}{gl} > 1. \qquad (7)$$

Esta desigualdad es independiente de h y es importante porque está diciendo que los valores de v_0 y l no pueden ser arbitrarios. Por ejemplo, si l tuviera el valor de 50 m y el pateador a lo más pudiera impartir a la pelota una velocidad inicial de 22 m/s, le diríamos que no lo intentara porque la desigualdad (7) no se cumpliría y no tendría posibilidades de anotar gol, a menos que estuviera jugando en un campo situado en la Luna.

Ejemplo numérico. Valores típicos para este problema son $v_0 = 25$ m/s, $l = 50$ m y $h = 3.44$ m. Para estos valores se obtiene que los dos ángulos son $\theta_0^- = 31.1°$ y $\theta_0^+ = 62.8°$. La Fig. 2 muestra estas dos trayectorias; también muestra la trayectoria que seguiría la pelota si fuera pateada a un ángulo intermedio de 45° manteniendo fijos los demás datos, en ella es claro que la pelota pasa por arriba del punto (50,3.44).

Caso particular $h = 0$. Este caso ya no representa la trayectoria para anotar un gol de campo en el futbol americano; corresponde al problema particular de encontrar los dos ángulos de disparo con la condición de que el objeto caiga en el mismo punto situado a la distancia l sobre el terreno, es decir, dos trayectorias parabólicas con el mismo alcance. En esta situación particular la expresión para los ángulos de disparo [fórmula (5')] se reduce a

$$\tan\theta_0 = \frac{v_0^2}{gl} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gl}+1\right)\left(\frac{v_0^2}{gl}-1\right)}. \qquad (8)$$

Nótese que aun en este caso en que $h = 0$, las desigualdades (6) y (7) no son iguales porque en (7) no está considerado el signo de igualdad.

6. Extensión del problema a otros deportes

La solución encontrada en este problema del pateador de futbol americano permite discutir y analizar otras situaciones que se presentan en otros deportes. La solución algebraica es la misma en algunos casos, pero su aplicación a cada deporte es diferente, pues los valores numéricos típicos de los parámetros son diferentes en cada caso. La solución en estas otras situaciones puede estar completamente contenida en la solución que se ha encontrado aquí, o bien ésta tiene que modificarse para poder aplicarla. Veamos algunos ejemplos.

6.1. Futbol

Para que la solución encontrada para el futbol americano pueda usarse para describir el caso de futbol (balompié, futbol soccer o futbol a secas), es necesario hacer algunas aclaraciones. Las ecuaciones cinemáticas expresadas en las Ecs. (1) y (2), y las que de ellas se deducen, describen el movimiento de la pelota desde el punto de disparo hasta que llega al suelo. Estas ecuaciones no describen los rebotes que la pelota pueda dar en el suelo, por lo tanto, éstos no pueden tomarse en cuenta. En este caso la situación es más complicada; para anotar un gol de campo, en el futbol americano se tiene que cumplir la restricción de que la pelota pase por arriba del travesaño; mientras que en este otro futbol hay que cumplir con dos restricciones, que pase por arriba del suelo pero al mismo tiempo que pase por abajo del travesaño. Para este deporte la trayectoria con el ángulo de disparo más pequeño corresponde a aquella trayectoria cuyo alcance es igual a l, es decir cuando la pelota toca el suelo en la posición del marco de la portería. Llamemos θ_{0f}^- a este ángulo, el subíndice f indica que se trata de futbol, el de la pelota redonda. Para la otra trayectoria parabólica que tiene el mismo alcance l, la pelota es disparada a un ángulo θ_{0f}^+. Estos dos ángulos están dados por la fórmula (8) encontrada en el caso particular de $h = 0$. Muchos de los ángulos comprendidos entre estos dos valores corresponderán a gol, pero no todos ellos pues existe la restricción de que la pelota debe pasar por abajo del travesaño de la portería. La altura del travesaño define el valor de los ángulos de disparo que hacen que la pelota pase justo por él. A éstos les hemos llamado θ_0^- y θ_0^+. Ahora se tienen 4 ángulos para los cuales la pelota pasa por los límites verticales del marco de la portería, es decir, al ras del suelo o del travesaño. Al observar las expresiones algebraicas de estos ángulos dados por las fórmulas (5') y (8), se ve que cumplen con las siguientes relaciones:

$$\tan\theta_{0f}^- < \tan\theta_0^- < \tan\theta_0^+ < \tan\theta_{0f}^+. \qquad (9)$$

En el problema del pateador de futbol americano ya se vio que cuando el ángulo de disparo está comprendido entre θ_0^- y θ_0^+ la pelota pasa por arriba del travesaño, de tal manera que este intervalo angular está prohibido para el caso de un jugador de futbol soccer. Es decir, para este deporte existen 2 intervalos angulares para el ángulo de disparo con la condición de que la pelota pase por la portería; estos intervalos son

$$\theta_{0f}^- \le \theta_0 \le \theta_0^- \quad \text{y} \quad \theta_0^+ \le \theta_0 \le \theta_{0f}^+. \qquad (10)$$

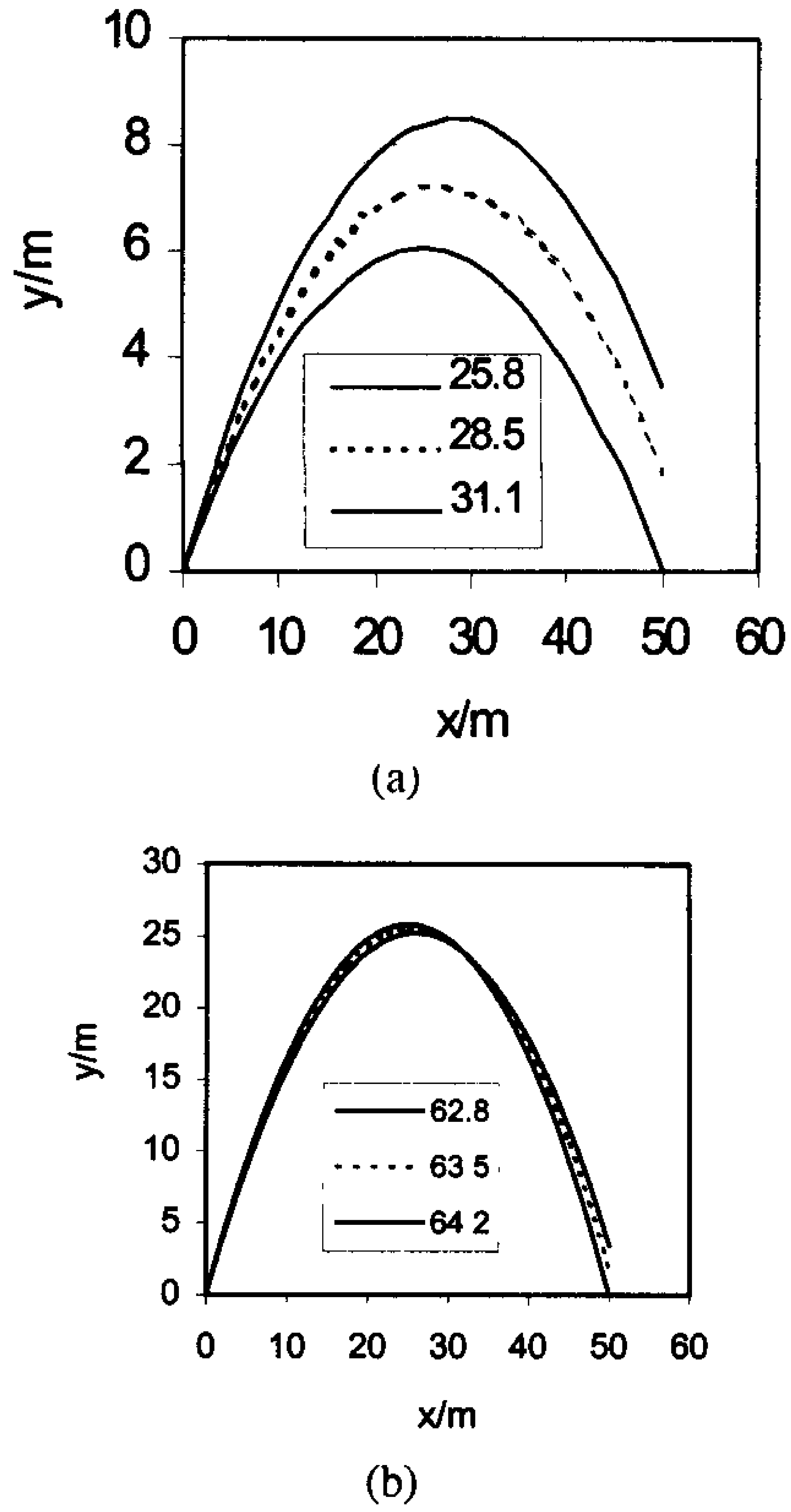

FIGURA 3. Diferentes trayectorias parabólicas calculadas con los valores de v_0, ℓ y h usados en la Fig. 2. (a) $\theta_{0f}^- = 25.8°$, $\theta_0 = 31.1°$ y (b) $\theta_0^+ = 62.8°$, $\theta_{0f}^+ = 64.2°$.

Para ilustrar estos resultados, en las Figs. 3a y 3b se muestran diferentes trayectorias parabólicas calculadas con los valores de v_0, l y h usados en la Fig. 2. Aunque en este caso del balompié los valores típicos son diferentes, por ejemplo el valor de h es de 2.44 m, se usan los valores que ya se usaron antes pues solamente se quiere hacer énfasis en la existencia de los dos intervalos angulares. Los valores que limitan a un intervalo son $\theta_{0f}^- = 25.8°$ y $\theta_0^- = 31.1°$ (Fig. 3a), y los valores que limitan al otro intervalo son $\theta_0^+ = 62.8°$ y $\theta_{0f}^+ = 64.2°$ (Fig. 3b). Las curvas que representan las trayectorias parabólicas con estos ángulos se trazaron con línea continua. Nótese que este último intervalo es más pequeño y que las escalas de las ordenadas son diferentes en cada figura. También se trazó una curva cuyo ángulo inicial tiene valor intermedio en cada intervalo; estas curvas corresponden a $\theta_0 = 28.5°$ y $\theta_0 = 63.5°$ y están trazadas con línea punteada.

6.2. Béisbol y básquetbol

Se puede adaptar el problema que se ha resuelto (futbolista) a otras situaciones como las que se presentan en el béisbol, donde se quiere que la pelota en su caída pase al ras o por arriba de la barda, o en el básquetbol o baloncesto, donde se quiere que el balón pase por la cesta o canasta (nuestros resultados no contemplan el caso en que el balón pase por la canasta después de rebotar en el tablero). En el caso de béisbol se tendrá un intervalo angular como en el problema resuelto; pero en el caso del básquetbol, debido a las dimensiones del balón y de la cesta, prácticamente sólo los límites del intervalo representarán buenos ángulos de tiro. En estos deportes debe tomarse en cuenta que el punto de disparo está a una altura h_0 por arriba del suelo. Esta altura inicial tiene que incluirse en la Ec. (2), con lo que se transforma en

$$y = h_0 + v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2. \tag{2'}$$

Las Ecs. (3) y (4) siguen siendo válidas si en lugar de la variable y se escribe $y - h_0$. Análogamente, la solución (5) sigue siendo válida si en lugar de la ordenada particular h se escribe $h - h_0$.

6.3. Tenis y vólibol

En estos dos deportes se pide que la pelota pase al ras o por arriba de la red y que no toque el suelo más allá de una distancia fija a partir de la posición de la red. A diferencia de los casos que se han discutido arriba, ahora existe la posibilidad de que el ángulo de disparo esté por debajo de la horizontal, es decir, sea negativo. En esta situación el signo de la componente vertical de la velocidad inicial puede ser positivo o negativo, y se tendrá que poner atención al signo en los términos donde aparezca v_{0y} o $\tan\theta_0$. Además, también es necesario cambiar h por $h - h_0$.

6.4. Golf

La solución representada por la fórmula (5) tiene una aplicación más amplia en el caso del golf que en el de futbol americano, pues la altura h del punto donde debe caer la pelota puede ser positiva, negativa o cero dependiendo de la arquitectura del campo de golf. Pero debido a que el tamaño del diámetro, tanto de la pelota como del hoyo es casi el mismo, en lugar de un intervalo angular lo que prácticamente se tiene son los ángulos de las 2 trayectorias posibles.

7. Conclusiones

Se presentó una guía que ayuda a los estudiantes a adquirir las habilidades requeridas para la resolución de problemas. Consiste de tres pasos principales: planteamiento y análisis cualitativo, análisis matemático, e interpretación física de la solución. Para ilustrarlos, se aplicaron a un problema de mecánica elemental donde se enfatizó la importancia de la interpretación física de la solución o resultado.

1. W. Brouwer, *The Physics Teacher* **11** (1973) 483.
2. S. Brekke, *The Physics Teacher* **24** (1986) 328.
3. E.F. Redish and R.N. Steinberg, *The Physics Teacher* **52** (1999) 24.
4. A. Manzur, *Contactos* No. 38 (2000) 45.
5. R. Resnick, D. Halliday, and K.S. Krane, *Física* **1**, cuarta edición (tercera en español), (CECSA, México, 1993) Problema 4-43.