

# El problema de las tres lentes

Kurt Bernardo Wolf y Guillermo Krötzsch

Centro de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Autónoma de México  
Apartado postal 48-3, 62251 Cuernavaca, Mor., Mexico

Recibido el 17 de noviembre de 2000; aceptado el 15 de enero de 2001

¿Con cuántas lentes podemos fabricar “todos” los sistemas ópticos? En el régimen paraxial (rayos de ángulo pequeño y lentes delgadas), el problema se reduce a uno soluble con matrices y algún ingenio. Se ha concluido en la referencia estándar [E.C.G. Sudarshan, N. Mukunda and R. Simon, *Optica Acta* 32 (1985) 855] que el mínimo son tres lentes. Nuestro análisis es sencillo y revela mejor la estructura de las fronteras entre distintas configuraciones ópticas. Notamos que para formar imágenes equivalentes se requieren sólo dos lentes. Decimos qué hacer cuando únicamente hay a mano lentes de unas cuantas distancias focales.

*Descriptor:* Óptica geométrica

With how many lenses can we build “all” optical systems? In the paraxial régime (rays of small angles and thin lenses), the problem is reduced to one solvable with matrices and some wit. It has been concluded in the standard reference [E.C.G. Sudarshan, N. Mukunda and R. Simon, *Optica Acta* 32 (1985) 855] that the minimum is three lenses. Our analysis is simple and reveals better the structure of the boundaries between different optical configurations. We note that to form equivalent images only two lenses are required. We say what to do when we only have at hand lenses of a few focal distances.

*Keywords:* Geometrical optics

PACS: 02.10.Gd; 42.79.Bh

## 1. Elementos y herramientas

Todo taller de óptica tendrá un inventario de lentes, pero ¿cuál es el número mínimo de lentes necesario para fabricar *cualquier* sistema óptico? Más de un estudiante se habrá preguntado esto al ver en el laboratorio una colección pequeña o incompleta de ellas. La solución a este problema fue dada por Sudarshan, Mukunda y Simon en 1985 [1] para el régimen paraxial en dos dimensiones (véase también los elementos de solución de Arsenault y Macukow [2], que son distintos). Mediante análisis de matrices de  $2 \times 2$  se llega a la conclusión que el número mínimo de lentes es tres. Por otro lado, en los últimos años, las aplicaciones ópticas de la transformada fraccional de Fourier al procesamiento paralelo de señales [3], han enfocado interés en estos sistemas y en su realización por diferentes configuraciones de lentes. La meta de este artículo es ordenar y pulir la solución completa del problema con atención especial a los transformadores de Fourier; el objetivo amplio es descubrir amablemente para el lector algunos aspectos matemáticos de la óptica.

Los rayos de la óptica geométrica se caracterizan, como está indicado en la Fig. 1, por su intersección  $q$  con una pantalla plana y sus ángulos  $p$  con la normal en ese punto. El llamado *régimen paraxial (cerca del eje)* simplifica la parte angular considerando sólo la aproximación lineal de las funciones trigonométricas y extrapolándola a la recta real. Como mostramos en la Fig. 2, el efecto de un desplazamiento (“vuelo libre”) a lo largo del eje por  $z$  está dado por

$$D_z : \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q + zp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad z \geq 0. \quad (1)$$

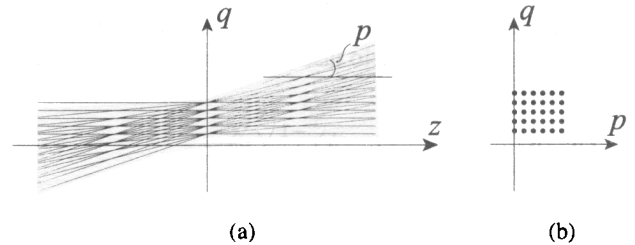


FIGURA 1. a) Rayos que cruzan una pantalla quedan determinados por su posición  $q$  y su ángulo (momento)  $p$ . b) Espacio fase, donde a cada rayo corresponde un punto. En el régimen paraxial  $(q, p) \in \mathbb{R}^2$ .

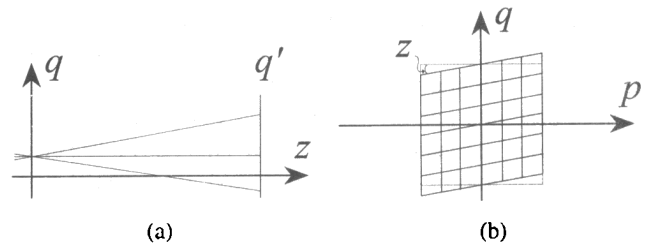


FIGURA 2. a) Rayos bajo desplazamiento de la pantalla  $q$  (“vuelo libre”) a  $q'$  por una distancia  $z \geq 0$ . b) Sesgo vertical correspondiente del espacio fase en la pantalla; el ángulo de sesgo es  $\sim z$ .

El vector  $p$  se conoce como el *momento óptico*; es el análogo del momento mecánico en la formulación hamiltoniana de ambos modelos [4]. El vector compuesto  $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$  es elemento genérico del *espacio fase*. En el mundo plano de nuestros diagramas, la dimensión del espacio fase (y de las matrices) es dos; en el espacio real, es cuatro.

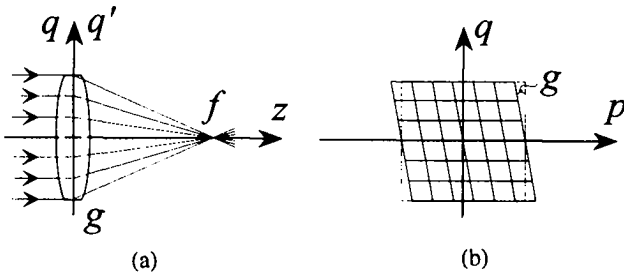


FIGURA 3. a) Acción de una lente delgada (convexa) sobre los rayos referidos a dos pantallas (de entrada  $q$  y salida  $q'$ ) coincidentes; la distancia focal es  $f = 1/g$ . b) Sesgo horizontal del espacio fase; el ángulo de sesgo es  $\sim g$ .

La acción de una lente delgada de potencia gaussiana  $g$ , como se muestra en la Fig. 3, es

$$\mathcal{L}_g : \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p - gq \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -g \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}. \quad (2)$$

La distancia focal  $f = 1/g$  indica dónde se cruzan rayos originalmente paralelos. A diferencia de los espacios vacíos (1) que no pueden ser negativos, las lentes pueden ser convexas ( $g > 0$ ), cóncavas ( $g < 0$ ), o triviales ( $g = 0$ ).

Lentes y espacios vacíos son los elementos básicos con los que contamos para construir sistemas ópticos paraxiales, cuya acción sobre el espacio fase será lineal, y genéricamente de la forma

$$\mathcal{M} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dp - bq \\ -cp + aq \end{pmatrix}, \quad ad - cb = 1. \quad (3)$$

Adelantamos que el determinante de estas matrices es la unidad, porque lo es para los elementos ópticos (1) y (2). De esta manera, asociando sistemas ópticos  $\mathcal{M}(\mathbf{M})$  con matrices  $\mathbf{M}$  de  $2 \times 2$ , resolvemos el problema de las tres lentes mediante el análisis matemático de matrices de  $2 \times 2$  [5].

En el caso real, cuando  $p$  y  $q$  son 2-vectores en el plano de la pantalla (y el espacio fase 4-dimensional), los sistemas ópticos descritos por (3) son aquellos compuestos por lentes con superficies esféricas (delgadas) alineadas sobre un eje óptico  $z$  (sistemas axialmente simétricos). En la Sec. 2 precisaremos la relación entre la concatenación de los elementos ópticos y la multiplicación de sus matrices. Allí también presentamos los transformadores fraccionales de Fourier y algunas de sus propiedades. Finalmente, definimos el espacio  $abc$  de sistemas ópticos que, aunque obvio, los autores no han encontrado en la literatura.

En las Secs. 3, 4 y 5 determinamos las regiones del espacio  $abc$  que corresponden a sistemas ópticos realizables con una, dos y tres lentes, respectivamente. La restricción fundamental consiste en que los espacios vacíos  $z$  solamente puedan tener longitud positiva  $z > 0$ ; el límite  $z = 0$  corresponde a un cambio de configuración, o a un sistema restringido

en el que una de sus lentes está en contacto con la pantalla. Lejos de ser un problema trivial, la agregación de elementos ópticos revela una estructura *sui generis* de regiones con fronteras abiertas y cerradas en  $a, b, c$ . En la Sec. 6 comentamos algunas referencias de valor histórico y dejamos el problema en más dimensiones (que podría fascinar a un matemático) abierto.

## 2. El espacio $abc$ de los sistemas ópticos

Cuando a lo largo del eje óptico colocamos (de izquierda a derecha como siempre viaja la luz en el mundo paraxial) dos subsistemas  $\mathbf{M}_1$  y  $\mathbf{M}_2$ , las transformaciones del espacio fase (3) se multiplicarán de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} [\mathcal{M}(\mathbf{M}_1) \mathcal{M}(\mathbf{M}_2)] : \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} &= \mathcal{M}(\mathbf{M}_1) : \left[ \mathcal{M}(\mathbf{M}_2) : \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right] \\ &= \mathcal{M}(\mathbf{M}_1) : \left[ \mathbf{M}_2^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right] \\ &= \mathbf{M}_2^{-1} \left( \mathcal{M}(\mathbf{M}_1) : \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right) \\ &= \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{M}_1^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \\ &= (\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2)^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{M}(\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2) : \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

Como vemos, para que la concatenación de elementos ópticos corresponda con la multiplicación de sus matrices, la acción genérica (3) de  $\mathcal{M}(\mathbf{M})$  requiere que sea la inversa de la matriz  $\mathbf{M}$  la que actúe sobre las coordenadas del espacio fase de los rayos. Así, con la ventaja de respetar el orden de los elementos, trabajaremos en adelante con las matrices  $\mathbf{M}$ .

Del desarrollo (4) también sigue que  $\mathcal{M}(1) = 1$  es el elemento unidad, y que la asociatividad de tres o más factores vale. Ahora notemos que los elementos ópticos, desplazamientos y lentes (1)–(2), están asociados con matrices de determinante unidad, llamadas *unimodulares*. Como  $\det(\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2) = \det \mathbf{M}_1 \det \mathbf{M}_2$ , la matriz de cualquier sistema óptico compuesto también tendrá determinante unidad. Esto a su vez implica que el inverso de cualquier sistema (paraxial) existe, y es  $[\mathcal{M}(\mathbf{M})]^{-1} = \mathcal{M}(\mathbf{M}^{-1})$ . El conjunto de matrices que representan a estos sistemas cumplen en consecuencia los axiomas de un grupo. El conjunto de matrices (3) pertenecen al grupo de transformaciones lineales, unimodulares y reales de un espacio de 2 dimensiones, que se indica por  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ . La condición de unimodularidad implica que en las Figs. 2 y 3 anteriores (espacio óptico de dos dimensiones y espacio fase también de dos dimensiones), el área del espacio fase de rayos,  $dpdq$ , se conserve bajo la acción de todo sistema óptico. Esta ley de conservación se asemeja al principio de Lavoisier o al de Liouville: la luz (los rayos de la óptica geométrica) no se crea ni se destruye, sólo se transfor-

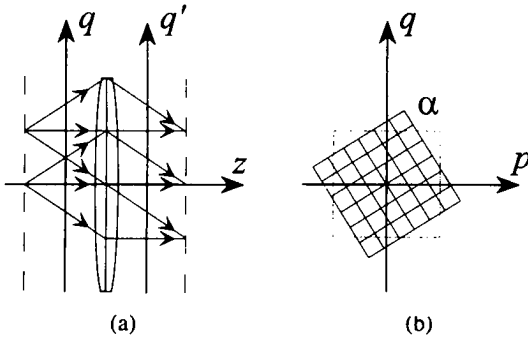


FIGURA 4. a) Sistema DLD que realiza las transformadas fraccionales de Fourier con potencias  $0 \leq \alpha < 2$ . b) Rotación del espacio fase de rayos por un ángulo  $(\pi/2)\alpha$  bajo este sistema óptico.

ma. Es decir, el espacio fase de rayos se comporta como un fluido incompresible. Comentaremos más sobre más dimensiones en la sección de conclusiones.

Un conjunto distinguido de sistemas ópticos, ilustrado en la Fig. 4, se logra con una lente equidistante entre dos pantallas. Cambiando la distancia a las pantallas, como veremos más adelante, recorreremos (parte de) el círculo de los transformadores fraccionales de Fourier. Genéricamente, de potencia  $\alpha$  son

$$\mathcal{F}^\alpha = \mathcal{M} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2}\alpha & \sin \frac{\pi}{2}\alpha \\ -\sin \frac{\pi}{2}\alpha & \cos \frac{\pi}{2}\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ mod } 4. \quad (5)$$

Su acción sobre el espacio fase (3) es hacerlo rotar rígidamente alrededor del origen por un ángulo  $(\pi/2)\alpha$  contrario a las manecillas del reloj, como se ve en la figura. Cuando  $\alpha = 1$ , la transformación es  $\mathcal{F} : (p, q) = (-q, p)$ . El reemplazo de la posición por momento y del momento por (menos) posición, es la muy conocida acción de la transformada integral de Fourier sobre las funciones de onda de la mecánica cuántica y de la óptica ondulatoria. El conjunto de matrices (5) forma el subgrupo de rotaciones  $\text{SO}(2) \subset \text{SL}(2, \mathbb{R})$  porque su producto es  $\mathcal{F}^{\alpha_1} \mathcal{F}^{\alpha_2} = \mathcal{F}^{\alpha_1 + \alpha_2}$  módulo 4.

Ahora usaremos los tres parámetros independientes  $a, b, c$ , de una matriz unimodular  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  como ejes cartesianos de un espacio  $\mathbb{R}^3$  que representamos con el “cubo” de la Fig. 5, donde cada punto  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  corresponde a un sistema óptico paraxial. El sistema unidad  $\mathbf{M} = 1$  está en el origen de coordenadas ( $a = 1, b = 0, c = 0$ ). Podemos pensar en  $c$  como el eje de desplazamientos (D), marcando los elementos positivos (1) que son naturales en el laboratorio; también marcamos el eje  $b$  de las lentes (L). El eje  $a$  es el factor de magnificación de la imagen, que puede ser positivo o negativo —pero no cero—. El plano  $a = 0$  debe ser removido de ese espacio  $\mathbb{R}^3$  porque allí la correspondencia entre puntos y sistemas ópticos es inválida: como debe cumplirse  $bc = -1$  por la condición de unimodularidad, la segunda coordenada del plano que excluimos de la figura se vuelve el cuarto parámetro  $d$ , que ahora es independiente de  $b = -1/c$ .

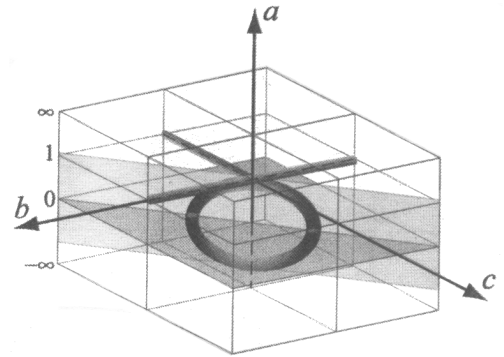


FIGURA 5. El espacio  $abc$  de sistemas ópticos paraxiales. Es el espacio  $\mathbb{R}^3$  con el plano  $a = 0$  excluido. Cada punto corresponde a una transformación distinta sobre el espacio fase, y a cualquier configuración de lentes que la logre. La transformación unidad (sistema trivial) está en el punto ( $a = 1, b = 0, c = 0$ ) que tomamos por origen de los ejes. Sobre el eje  $-c$  marcamos los vuelos libres (positivos), y las lentes sobre el eje  $b$ . Marcamos también el círculo de transformadores fraccionales de Fourier, que se encuentran en el plano  $b = -c$  entre  $a = \pm 1$ ; este círculo cruza de manera continua el plano singular  $a = 0$ .

Las transformadas fraccionales de Fourier (5) evitan la singularidad del plano  $a = 0$  porque sobre su círculo se cumple  $b = -1/c = 1$  y  $d = 0$ . Los planos  $a = 0$  y  $a = 1$  así como  $b = 0$  y  $c = 0$  serán referencias útiles como fronteras entre regiones de realizabilidad por sistemas de 1, 2 y 3 lentes, como ahora procederemos a mostrar.

### 3. Configuraciones de una lente

Comenzaremos considerando la configuración DLD, donde una lente de potencia gaussiana  $g \in \mathbb{R}$  está entre dos espacios vacíos no-negativos  $z_1 \geq 0$  y  $z_2 \geq 0$ . El sistema es

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{z_1} \mathcal{L}_g \mathcal{D}_{z_2} &= \mathcal{M} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z_1 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{M} \begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{M} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z_2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{M} \begin{pmatrix} 1 - gz_2 & g \\ -z_1 - z_2 + z_1gz_2 & 1 - z_1g \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

Entre los tres parámetros  $abc$  genéricos y los tres parámetros libres del sistema DLD,  $z_1, g, z_2$  podemos despejar las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} a &= 1 - gz_2, & b &= g, \\ c &= -z_1 - z_2 + z_1gz_2 = -z_1a - z_2, \end{aligned} \quad (7)$$

y sus inversas,

$$z_1 = \frac{1-d}{b} = \frac{a-bc-1}{ab}, \quad g = b, \quad z_2 = \frac{1-a}{b}. \quad (8)$$

No todos los sistemas ópticos son realizables en configuración DLD; por ejemplo, si quisiéramos realizar el sistema  $\mathcal{M} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  en esta configuración, la primera de las Ecs. (8) nos informaría que  $z_1 = -1$ , lo cual está fuera del rango per-

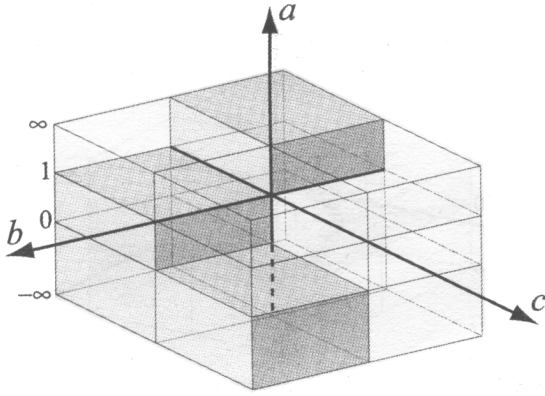


FIGURA 6. Regiones del espacio  $abc$  de sistemas ópticos que pueden ser realizada con una lente en configuración DLD; la región superior con una lente cóncava y la inferior con una lente convexa. Estas regiones incluyen las líneas de lentes L (eje  $b$ ), de desplazamiento positivo D (semieje  $-c$ ), y de transformadores de Fourier con potencia  $0 \leq \alpha < 2$ .

mitido. Por ello, analizaremos ahora las Ecs. (7) para determinar la región del espacio  $abc$  que sí está permitida para esta configuración. Hay dos casos distintos a considerar: lentes cóncavas y lentes convexas.

El caso de una lente cóncava  $b = g < 0$  es sencillo porque  $-gz_2 \geq 0$  implica  $a \geq 1$ , y en consecuencia  $c \leq 0$ . Esta región es el octante del espacio mostrado en la parte superior de la Fig. 6. La frontera  $b$  de la región es abierta (excluimos lentes triviales  $b = 0$ ); la frontera  $c$  también es abierta, excepto por los desplazamientos triviales que están únicamente en la arista ( $a = 1, b < 0, c = 0$ ); y finalmente, la frontera  $a = 1$  es cerrada y consta de los sistemas reducidos DL, con  $z_2 = 0$ . Consecuentemente, la región de sistemas DLD-cóncavos es la unión de un octante abierto, un cuadrante de plano y una semi-línea,

$$\left. \begin{matrix} a \geq 1, & b < 0, & c < 0, \\ a = 1, & b < 0, & c = 0. \end{matrix} \right\} \left( \begin{matrix} \text{DLD} \\ \text{cóncavo} \end{matrix} \right). \quad (9)$$

Las lentes triviales (sistemas D) están todas en la arista ( $a = 1, b = 0, c \leq 0$ ).

Las lentes convexas en configuración DLD llenan otra región del espacio  $abc$  de sistemas ópticos. Cuando  $b = g > 0$  en (7), entonces  $gz_2 \geq 0$ , de modo que  $a \leq 1$ ; pero hay cuatro posibilidades,  $a = 1, 1 > a > 0, a = 0$  (el plano singular), y  $a < 0$ , que determinan que  $c$  esté en los rangos siguientes:

$$\left. \begin{matrix} 0 < a \leq 1, & b > 0, & c \leq 0, \\ a < 0, & b > 0, & c \in \mathfrak{R}. \end{matrix} \right\} \left( \begin{matrix} \text{DLD} \\ \text{convexo} \end{matrix} \right). \quad (10)$$

Este rango es la región inferior del espacio  $abc$  en la Fig. 6. El cuadrante frontera  $a = 1$  nuevamente contiene los sistemas reducidos DL con  $z_2 = 0$ . La cara  $c = 0$  de la región caracteriza los sistemas que forman imagen, es decir, cuya imagen [dada por (3)] depende solamente de la posición del objeto (y no de la dirección del rayo), como  $\mathcal{M} : q \mapsto aq$ ,

con factor de magnificación  $a$ . Las demás caras son abiertas. Las regiones DLD cóncavas y convexas son disjuntas, y se tocan sólo a través de la arista de lentes triviales. Su unión define la región de sistemas realizables con una lente.

El círculo de transformadas fraccionales de Fourier (5) marcado en la Fig. 5 está parcialmente contenido en la región DLD-convexa de la Fig. 6. Como es fácil convencerse de (6) y la Fig. 4, con una lente convexa se pueden realizar transformadores  $\mathcal{F}^\alpha$  con potencia  $0 < \alpha < 2$  —pero no más—. Casos especiales de la configuración DLD son la DL (vista antes para  $z_2 = 0$ , que cierra la cara  $a = 1$  de la región de una lente), y la LD, donde  $z_1 = 0$  y  $d = 1$ , de modo que  $a = 1 + bc$  con  $c \leq 0$ . Ésta es una superficie reglada generada por líneas paralelas al plano  $a$ - $b$  que cruzan el eje  $c$  con ángulo  $\arctan c$ ; como esperado, esta superficie está contenida en la unión de las regiones DLD.

#### 4. Configuraciones de dos lentes

Con dos lentes tenemos genéricamente la configuración DLDDL, con tres espacios vacíos y por ende con cinco parámetros ajustables, para cubrir una región del espacio  $abc$  de sistemas ópticos, que debe contener propiamente a la región DLD de la sección anterior. Hay un caso restringido importante: la configuración LDL donde las dos lentes están en contacto con las pantallas objeto e imagen. Analizaremos primero esta última, para utilizarla luego como base de inducción.

Con dos lentes de potencias gaussianas  $g_1, g_2 \in \mathfrak{R}$ , separadas por un desplazamiento  $z \geq 0$ , realizamos sistemas ópticos cuyas matrices son

$$\begin{pmatrix} 1 & g_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & g_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a = 1 - g_1 z & b = g_1 a + g_2 \\ c = -z \leq 0 & d = 1 - z g_2 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Éste es el semi-espacio mostrado en la Fig. 7. La frontera  $c = 0$  es abierta, porque cuando las dos lentes están en contacto ( $z = 0$ ), el sistema degenera en L y ocupa únicamente la línea ( $a = 1, b \in \mathfrak{R}, c = 0$ ). En particular, están excluidos de la región LDL los *magnificadores puros*, sistemas (3) representados por matrices diagonales. Excluyendo el plano singular  $a = 0$ , la región LDL está caracterizada por

$$\left. \begin{matrix} 0 \neq a \in \mathfrak{R}, & b \in \mathfrak{R}, & c < 0, \\ a = 1, & b \in \mathfrak{R}, & c = 0. \end{matrix} \right\} \text{(LDL)}. \quad (12)$$

En consecuencia, con LDL's llenamos los dos octantes de sistemas ( $a > 1, b \leq 0, c < 0$ ) y ( $0 \neq a < 1, b \geq 0, c < 0$ ), que no fueron realizables con configuraciones de una lente. Sistemas que caen en la intersección de las regiones DLD y LDL pueden realizarse con ambas configuraciones.

Ahora despegaremos de la pantalla la primera lente de una configuración LDL, para examinar el caso semi-restringido DLDDL de dos lentes. La composición de un desplazamiento

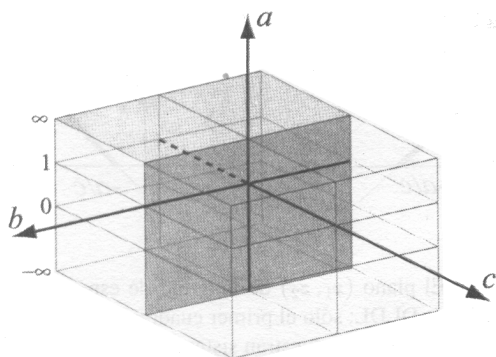


FIGURA 7. Región del espacio  $abc$  de sistemas ópticos realizables en una configuración restringida de dos lentes LDL.

to D (no trivial, con  $z > 0$ ), y el LDL genérico de (12), es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z < 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \neq 0 & b \in \mathfrak{R} \\ c < 0 & d \in \mathfrak{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' = a \neq 0 & b' = b \in \mathfrak{R} \\ c' = c - za & d' = d - zb \end{pmatrix}. \quad (13)$$

En particular, estamos interesados en penetrar el semi-espacio  $c' \geq 0$  vedado para configuraciones más simples. En (13),  $c < 0$  y  $-z < 0$ , de modo que sólo  $a < 0$  puede dar lugar a  $c' \geq 0$ ; la región  $c' < 0$  no tiene restricción. Eliminando primas, la región del espacio  $abc$  realizable con sistemas DLDL es

$$\left. \begin{matrix} a \neq 0, & b \in \mathfrak{R}, & c < 0, \\ a < 0, & b \in \mathfrak{R}, & c \geq 0, \end{matrix} \right\} \quad (\text{DLDL}) \quad (14)$$

y se muestra en la Fig. 8. Intersecta con la región DLD convexa ( $a < 0, b > 0, c \geq 0$ ) (cf. Fig. 6), e incluye los magnificadores puros con inversión,  $a < 0$ , que se encuentran sobre el semieje vertical inferior.

El tercer cuarto del ciclo de Fourier puede realizarse dentro de la nueva región DLDL. Para  $\theta = (\pi/2)\alpha$ , la composición de D y LDL a una transformada fraccional de Fourier (5) es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z_1 \leq 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a = 1 - g_1 z_2 & b = g_1 + g_2 - g_1 z_2 g_2 \\ c = -z_2 \leq 0 & d = \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Usando las primas como anteriormente, el primer elemento establece que  $a' = a = \cos \theta$ , mientras que los elementos antidiagonales relacionan los miembros de la igualdad  $\sin \theta = b = b' = -c' = z_1 a - c = z_1 \cos \theta + z_2$ . De aquí resulta que en la nueva región  $c' \geq 0$ , la restricción  $-c' = \sin \theta \leq 0$  implica que sólo pueden cubrirse los ángulos de rotación  $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ , mientras que  $-c' = z_1 a - c \leq 0$  y  $c \leq 0$  sólo pueden ser satisfechas si  $a \leq 0$ , en  $(1/2)\pi \leq \theta \leq (3/2)\pi$  (el punto  $a = 0$  de este conjunto, como vimos antes, está bien definido). En consecuencia, con sistemas DLDL podemos cubrir solamente la intersección de estos dos intervalos,

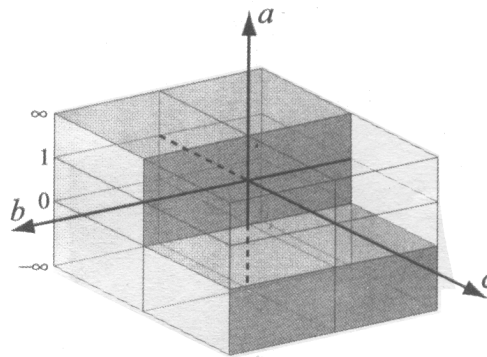


FIGURA 8. Sistemas ópticos realizables en una configuración semi-restringida de dos lentes DLDL, que incluye el círculo de transformadores de Fourier con potencias  $0 \leq \alpha < 3$ .

en el tercer cuarto del círculo  $\pi \leq \theta \leq (3/2)\pi$ , correspondientes a potencias  $2 \leq \alpha \leq 3$  de la transformada de Fourier. El resto del ciclo requerirá al menos un elemento óptico más.

La región DLDL excluye el cuadrante ( $a > 0, b \in \mathfrak{R}, c \geq 0$ ) en la Fig. 8. Para intentar cubrirlo utilizaremos la configuración DLDLD de dos lentes entre tres espacios vacíos. Basándonos en los resultados previos para sistemas DLDL, agregamos una D más:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' = a - zb & b' = b \\ c' = c - zd & d' = d \end{pmatrix}, \quad (16)$$

donde  $a$  y  $c$  están restringidas en (14) y  $b \in \mathfrak{R}$ . Podemos satisfacer la relación  $a' = a - zb > 0$  si  $a > 0$  o si ( $a < 0, b < 0$ ); y podemos satisfacer  $c' = c - zd = (ca' - z)/a \geq 0$  si  $a < 0$  o ( $a > 0, c \geq 0$ ). Esto se traduce en seis condiciones que —eliminando primas— permiten acceder al cuadrante ( $a > 0, b \in \mathfrak{R}, c \geq 0$ ), no cubierto por los sistemas semi-restringidos DLDL en (14), o al cuadrante ( $a < 0, b \in \mathfrak{R}, b < 0$ ) que ya cubrimos. De esta manera, con sistemas genéricos de dos lentes completamos la región previa con el nuevo octante ( $a > 0, b < 0, c \geq 0$ ). En la Fig. 9 mostramos la región de los sistemas ópticos  $abc$  que pueden ser realizados con dos lentes.

El cuarto cuarto del ciclo de transformadores fraccionales de Fourier está contenido en la nueva región ganada con sistemas DLDLD. Con DLD's pudimos realizar  $\mathcal{F}^\alpha$  para potencias  $0 \leq \alpha < 2$ ; así, concatenando dos de estos sistemas alcanzamos ahora potencias  $0 \leq \alpha < 4$ . Pero estamos impedidos de cerrar el ciclo de transformadores de Fourier con la potencia  $\alpha = 4$ , lo cual es distinto del sistema óptico identidad  $\alpha = 0$ , y subraya la complejidad del problema en las fronteras entre regiones en que esto es realizable. Las caras de la región DLDLD son abiertas, excepto en la línea de lentes L (el eje  $b$ ), donde el conjunto es cerrado. En consecuencia, quedan aún excluidos los magnificadores positivos puros (el semieje  $+a$ ) y los vuelos libres negativos (el semieje  $+c$ ). Necesitaremos tres lentes para cubrir el octante que falta, ( $a > 0, b \geq 0, c \geq 0$ ).

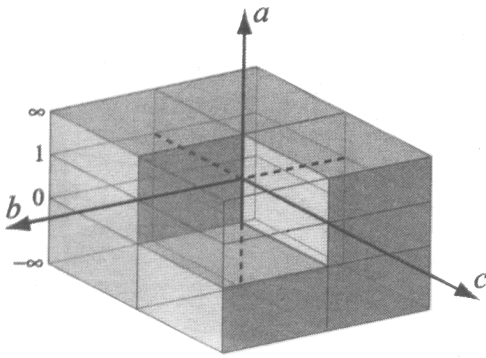


FIGURA 9. Sistemas ópticos realizables con dos lentes en la configuración genérica DLDLD. Incluye ahora transformadores de Fourier con  $0 \leq \alpha < 4$ . El octante que queda vacío requiere de al menos una lente más para ser realizado.

Revisaremos ahora la correspondencia entre puntos del espacio  $abc$  y sistemas ópticos. En la sección anterior, esta asociación era 1:1 en las regiones permitidas, y estuvo dada por las relaciones directa e inversa (7) y (8) con los parámetros del sistema óptico DLD. En la configuración LDL, las relaciones inversas a (11) también son 1:1,

$$g_1 = \frac{a-1}{c}, \quad z = -c, \quad g_2 = \frac{d-1}{c} = \frac{1-a+bc}{ac}, \quad (17)$$

y válidas para  $c < 0$ . Pero si somos requeridos a fabricar un sistema óptico  $\mathcal{M} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  con una configuración DLDL (con parámetros  $z_1, g_1, z_2, g_2$  respectivamente), y para ello invertimos (13), obtenemos las tres relaciones

$$z_1 = \frac{a - cg_1 - 1}{ag_1}, \quad z_2 = \frac{1-a}{g_1} = -az_1 - c, \quad ag_2 = b - g_1. \quad (18)$$

Aquí podemos escoger un parámetro libre (en algún intervalo válido) para construir una familia de sistemas ópticos con el mismo efecto sobre el espacio fase de rayos. Los dos desplazamientos  $z_i$  deben cumplir  $az_1 + z_2 + c = 0$  y ser positivos; en el plano  $z_1-z_2$  mostrado en la Fig. 10, la familia es una recta que corta los ejes en  $-c/a$  y  $-c$  respectivamente. Cuando  $c < 0$  (dentro de la región DLDL en la Fig. 7), la recta tendrá un segmento en el primer cuadrante  $z_1, z_2 \geq 0$ , finito cuando  $a > 0$  y semi-infinito cuando  $a < 0$ . Cualquier par  $(z_1, z_2)$  en ese segmento permite realizar el sistema óptico deseado. Si nuestro estuche de lentes tiene sólo un número pequeño de potencias gaussianas  $g_i$ , podemos escoger una que ajuste  $z_2$  con  $g_1 = (1-a)/z_2$ , y buscar otra que cumpla  $g_2 = (b-g_1)/a$ .

Los espacios vacíos son literalmente gratis, por lo cual podemos preferir la realización de una  $\mathcal{M} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  en la configuración genérica de dos lentes DLDLD en la región cubierta por estos sistemas. Con ayuda de MATHEMATICA, se invierte (16) en las tres relaciones siguientes:

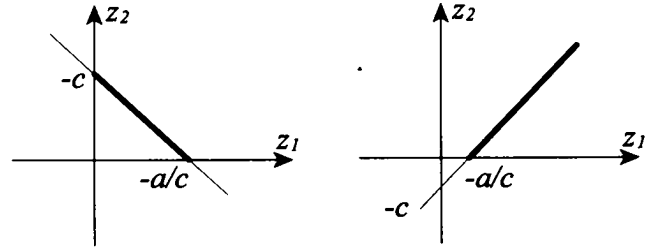


FIGURA 10. El plano  $(z_1, z_2)$  de longitud de espacios vacíos en configuraciones DLDL; sólo el primer cuadrante es realizable. Las líneas  $az_1 + z_2 + c = 0$  muestran sistemas que realizan el mismo sistema óptico  $(a, b, c)$ .

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{ab - (1+bc)g_1 - ag_2}{abg_1}, \\ z_2 &= \frac{g_1 + g_2 - b}{g_1g_2}, \\ z_3 &= \frac{b - g_1 - ag_2}{bg_2}, \end{aligned} \quad (19)$$

con dos parámetros libres,  $g_1, g_2$ , que podemos escoger juiciosamente entre las pocas lentes que tengamos a disposición de manera que el plano contenido en el espacio  $z_1, z_2, z_3$  de las Ecs. (19),  $bg_1z_1 + g_1g_2z_2 + bg_2z_3 = 2b - dg_1 - ag_2$ , intersece el octante  $z_1, z_2, z_3 \geq 0$ .

### 5. Configuraciones de tres lentes

Configuraciones de tres lentes completarán el octante que falta,  $(a > 0, b \geq 0, c \geq 0)$ , de sistemas que *no* son realizables con dos lentes y que se muestra en la Fig. 9. Procederemos a construir sistemas restringidos de tres lentes LDLDL (donde las lentes extremas tocan las pantallas) colocando una lente L frente a sistemas semi-restringidos de dos lentes DLDL, cuyos parámetros  $abc$  se encuentran en la región llena. Después examinaremos la región que aún así queda irrealizada. Como antes, multiplicamos las matrices correspondientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' = a + gc & b' = b + gd \\ c' = c & d' = d \end{pmatrix} \quad (20)$$

donde los parámetros  $a, b, c$  cumplen con las restricciones (14), y donde buscamos en los puntos  $(a' > 0, b' \geq 0, c' \geq 0)$  del octante por cubrir. Es evidente que con  $a < 0, c' = c > 0$  y una lente  $g \in \mathbb{R}$  apropiada,  $a'$  puede alcanzar cualquier valor real. De esta manera llenamos el octante  $(a' > 0, b' \geq 0, c' > 0)$ . Sin embargo, el valor  $c' = 0$  está excluido de este conjunto porque entonces  $a = a' < 0$  es fija. En consecuencia, con configuraciones restringidas de tres lentes LDLDL podemos realizar todos los sistemas ópticos, *excepto* el cuadrante de plano  $(a > 0, b \geq 0, c = 0)$  indicado en la Fig. 11, que examinaremos adelante.

Con un mínimo de tres lentes, dos de ellas coincidentes con las pantallas de entrada y salida, podemos producir en particular los *desplazamientos negativos* que ocupan el

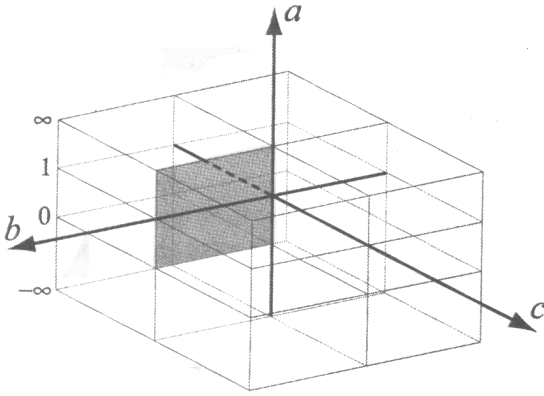


FIGURA 11. El cuadrante plano no realizable con configuraciones restringidas de tres lentes LDLDL. Para llenar esta región (que incluye magnificadores puros positivos) se requiere de la configuración general semi-restringida DLDDL.

eje +c. En la Ref. 1, se encontró un resultado para sistemas DLDDL (sin restricción) y se propuso un arreglo equivalente al siguiente LDLDL con dos de tres lentes iguales y convexas:

$$\mathcal{L}_{4/z} \mathcal{D}_z \mathcal{L}_{2/z} \mathcal{D}_{2z} \mathcal{L}_{2/z} = \mathcal{D}_{-z}. \quad (21)$$

El aparato tiene longitud 3z y actúa como un espacio negativo -z. No hay indicación en [1] sobre cómo se encontró la solución (21). Para trascender las soluciones de ensayo-y-error, invertiremos los cinco parámetros  $g_1, z_1, g_2, z_2, g_3$  de la configuración restringida LDLDL en términos de los parámetros  $a, b, c$  del sistema deseado, escogiendo dos de ellos independientes —por “simetría” tomamos los dos vuela libres. Despejando las relaciones para los otros tres obtenemos

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{c + az_1 + z_2}{cz_1}, \\ g_2 &= \frac{c + z_1 + z_2}{z_1 z_2}, \\ g_3 &= \frac{c + z_1 + dz_2}{cz_2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Si lo que deseamos es un vuelo libre  $\mathcal{D}_z$  negativo, tomamos  $a = 1 = d, b = 0$  y  $c = -z > 0$ , y encontramos las igualdades

$$zz_1 g_1 = z_1 z_2 g_2 = zz_2 g_3 = Z, \quad (23)$$

donde  $Z = z + z_1 + z_2$ . En particular, si queremos un sistema con espacios iguales  $z_1 = z_2 = z$ , tendremos también lentes iguales  $g_1 = g_2 = g_3 = 3/z$ . Es decir, descubrimos un nuevo arreglo óptico:

$$\mathcal{L}_{3/z} \mathcal{D}_z \mathcal{L}_{3/z} \mathcal{D}_z \mathcal{L}_{3/z} = \mathcal{D}_{-z}. \quad (24)$$

El aparato (24) es más eficiente que el de Sudarshan, Mukunda y Simon [1] en (21), porque su longitud total es 2z, y es simétrico bajo reflexión  $z \leftrightarrow -z$  (esto elimina algunas aberraciones más allá del régimen paraxial).

Los sistemas que no pueden ser realizados con los cinco elementos LDLDL ocupan el cuadrante plano ( $a > 0, b \geq 0, c = 0$ ). Esto es evidente en (22) porque  $c = 0$  aparece en dos de los tres denominadores;  $az_1 + z_2$  y  $z_1 + dz_2$  no pueden ser cero con  $a$  y  $b$  en este cuadrante. El cuadrante “prohibido” es un plano necesariamente abierto en su arista  $a = 0$ , y cerrado en su arista  $b = 0$ . Prominentemente, los magnificadores puros positivos representados por matrices  $\text{diag}(a, a^{-1})$ ,  $a > 0$ , no pueden ser realizados en configuraciones restringidas de tres lentes. Si precedemos el arreglo LDLDL con un desplazamiento, como en (13), es fácil ver que de  $c \neq 0$  podemos pasar a  $c' = 0$  con una  $z$  apropiada (y  $a \neq 0$ ). De esta manera, con la configuración de tres lentes semi-restringida DLDDL, llenamos el plano de la Fig. 11 y cubrimos todo el espacio abc de sistemas ópticos paraxiales.

Si nos preguntamos cómo (y con qué parámetros libres) podemos construir con tres lentes en configuración DLDDL un sistema deseado  $\mathcal{M} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , basta invertir el producto genérico de tres desplazamientos positivos  $z_1, z_2$ , y  $z_3$  y tomar las tres lentes  $g_1, g_2$ , y  $g_3$  por parámetros libres. Obtenemos

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{g_1} + \frac{g_2 + (d - cg_3)g_1}{(ag_3 - b)g_1}, \\ z_2 &= \frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \frac{ag_3 - b}{g_1 g_2}, \\ z_3 &= \frac{1}{g_2} + \frac{g_1 + ag_2}{(ag_3 - b)g_2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Por ejemplo, para construir los magnificadores puros  $b = 0 = c$  sobre el eje  $a$  de la Fig. 5 con tres lentes iguales  $g_1 = g_2 = g_3 = g$ , reducimos las relaciones anteriores a

$$z_1 = \frac{a^{-1} + 1 + a}{ag}, \quad z_2 = \frac{2 + a}{g}, \quad z_3 = \frac{1 + 2a}{ag}. \quad (26)$$

Cuando  $a > 0$ , con tres lentes convexas iguales que hayamos encontrado en el estuche podemos determinar las distancias a las que debemos colocarlas para obtener el magnificador deseado. Cuando  $a < 0$ , podemos realizar magnificadores con dos lentes convexas DLDDL como vimos anteriormente (o, si insistimos en meter una lente más, tendremos que cuidar que sea tal que las tres distancias (25) sean positivas). Para  $a = 1$  tenemos el sistema unidad realizado como (DL)<sup>3</sup> con tres distancias iguales y longitud total  $f = 1/g$ :

$$\mathcal{D}_{3/g} \mathcal{L}_g \mathcal{D}_{3/g} \mathcal{L}_g \mathcal{D}_{3/g} \mathcal{L}_g = 1. \quad (27)$$

Con esta configuración cerramos el ciclo de 360° de transformadas fraccionales de Fourier.

Es importante notar en toda la discusión anterior, que cuando juzgamos el desempeño de un sistema óptico por las imágenes que nos proyecta sobre una pantalla, es decir, cuando somos ciegos a la dirección de los rayos que llegan, entonces perdemos un parámetro. En efecto, vemos de (3) que las matrices de dos sistemas ópticos que difieran en sus

elementos  $d$  y  $b$ , llevarán el mismo rayo  $(p, q)$  al mismo punto en la pantalla,  $q'(p, q) = aq - cp$ . Ignorar el parámetro  $b$  corresponde a proyectar el espacio  $abc$  de todas nuestras figuras sobre el plano  $ac$ . Bajo este criterio de desempeño, sistemas DLD de una lente cóncava ocuparán el cuadrante ( $a > 1, c < 0$ ); sistemas de una lente convexa, los dos cuadrantes ( $a < 1, c < 0$ ) y ( $a > 0, c \geq 0$ ), etc.; y "todos" los sistemas ópticos serán realizables por configuraciones de hasta dos lentes, DLDLD.

## 6. Conclusiones

Habiendo resuelto el problema de las tres lentes, queremos agregar algunas líneas de contexto a la solución. Aquí hemos trabajado con sistemas ópticos planos. En las tres dimensiones del espacio 'real', la dimensión del espacio fase y de las matrices, como apuntamos, es cuatro. No serán matrices generales de  $4 \times 4$  las que representen sistemas ópticos, sino sólo aquellas que también preserven la *estructura hamiltoniana* [4] del modelo. El principio de Lavoisier-Liouville (que implica unimodularidad) tiene que generalizarse a preservar los *paréntesis de Poisson*  $\{q_i, p_j\} = \delta_{i,j}$  entre las coordenadas cartesianas de posición y momento en cualquier número  $N$  de dimensiones. Las matrices de transformación que cumplen con estas condiciones son las matrices *simplécticas* [6], que no detallaremos más que indi-

car su grupo por  $\text{Sp}(2N, \mathbb{R})$ . Sucede que, *accidentalmente*  $\text{Sp}(2, \mathbb{R}) = \text{SL}(2, \mathbb{R})$ .

El grupo de matrices  $\text{Sp}(4, \mathbb{R})$  tiene 10 parámetros, y los elementos ópticos a nuestra disposición son desplazamientos positivos como antes en (1), y lentes *astigmáticas* dadas por (2) donde la potencia gaussiana  $g$  se reemplaza por una matriz simétrica  $\mathbf{g}$  de  $2 \times 2$  que tiene 3 parámetros libres. Se puede demostrar que a partir de estos elementos también se genera el grupo completo de todos los sistemas ópticos [7]. Allí los transformadores fraccionales de Fourier, que en dos dimensiones son puntos sobre un círculo  $S^1$ , en cuatro dimensiones son puntos en una hiperesfera  $S^3$  [8]. Lo que para dos dimensiones era el grupo de rotaciones  $\text{SO}(2) = \text{U}(1)$ , en cuatro dimensiones se generaliza al grupo de matrices unitarias de  $2 \times 2$ ,  $\text{U}(2) \stackrel{2:1}{=} \text{SO}(2) \otimes \text{SO}(3)$ .

Desafortunadamente, los argumentos y figuras que nos ayudaron en este artículo para resolver el caso en tres dimensiones, tendrían que generalizarse a diez. Creemos que es un problema abierto. Vale decir que la descomposición en sistemas de lentes y espacios *no* es el punto de vista natural en la teoría de grupos. Allí es más conveniente utilizar otras parametrizaciones, como la de Iwasawa, que factoriza a cualquier sistema óptico en un transformador de Fourier y un formador de imagen astigmático [7, 8]. Con ello se gana claridad en la teoría, aún cuando se glose sobre su realizabilidad con configuraciones ópticas mínimas.

- 
1. E.C.G. Sudarshan, N. Mukunda, and R. Simon, *Optica Acta* **32** (1985) 855.
  2. H.H. Arsenault and B. Macukow, *J. Opt. Soc. Am.* **73** (1983) 1350; B. Macukow and H.H. Arsenault, *J. Opt. Soc. Am.* **73** (1983) 1360.
  3. D. Mendlovic and H.M. Ozaktas, *J. Opt. Soc. Am. A* **10** (1993) 1875; H.M. Ozaktas and D. Mendlovic, *J. Opt. Soc. Am. A* **10** (1993) 2522; H.M. Ozaktas and D. Mendlovic, *Opt. Comm.* **101** (1993) 163; S. Abe and J.T. Sheridan, *J. Phys. A* **27** (1994) 4179; H.M. Ozaktas and D. Mendlovic, *J. Opt. Soc. Am. A* **12** (1995) 743; D. Mendlovic, Y. Bitran, R.G. Dorsch, and A.W. Lohmann, *J. Opt. Soc. Am. A* **12** (1995) 1665; A.W. Lohmann, D. Mendlovic, and G. Shabtay, *J. Opt. Soc. Am. A* **14** (1997) 2901; H.M. Ozaktas, M. Alper Kutay, and D. Mendlovic, "Introduction to the fractional Fourier transform and its applications", in *Advances on Imaging and Electron Optics*, Vol. 106, (1999), Chap. 4, p. 239.
  4. G. Krötzsch and K.B. Wolf, *Rev. Mex. Fís.* **36** (1990) 724; K.B. Wolf, *Proceedings of the XXX Latin American School of Physics* (Ciudad de México, 17 de julio—4 de agosto, 1995). American Institute of Physics Conference Proceedings, Vol. 365 (1996), p. 372.
  5. A. Gerrard and J.M. Burch, *Introduction to Matrix Methods in Optics*, (Wiley, New York, 1975).
  6. M. Kauderer, *Symplectic Matrices, First Order Systems and Special Relativity*, (World Scientific, Singapore, 1994).
  7. R. Simon and K.B. Wolf, *J. Opt. Soc. Am. A* **17** (2000) 342.
  8. R. Simon and K.B. Wolf, *J. Opt. Soc. Am. A* **17** (2000) 2368.