

# Modelo simple para la permeabilidad dinámica de fluidos viscoelásticos.

J.A. del Río y J. R. Castrejón Pita

*Centro de Investigación en Energía, Universidad Nacional Autónoma de México  
Apartado Postal 34, 62580 Temixco, Mor. México.*

Recibido el 5 de marzo de 2002; aceptado el 13 de septiembre de 2002

En este trabajo se presenta una forma sencilla de obtener una expresión analítica para la respuesta en el dominio de las frecuencias de la permeabilidad dinámica en fluidos viscoelásticos maxwellianos. También se ilustra el caso de presión senoidal, en el que la permeabilidad se puede expresar en el espacio de configuración. Se modela la respuesta dinámica del sistema circulatorio humano como la respuesta dinámica en un tubo recto y la sangre como un fluido maxwelliano, se determinan las resonancias de este sistema y se encuentra que la frecuencia de bombeo cardíaco natural corresponde a un máximo de permeabilidad viscoelástica. Para reforzar lo anterior, cuantitativamente se muestra a través de un modelo de presión pulsante (tren de pulsos gaussianos), que el incremento en la permeabilidad puede tener un efecto positivo en el flujo medio.

*Descriptores:* Viscoelasticidad; transformada de Fourier; resonancia; medio poroso.

In the present work a simple form to obtain analytical expression for the dynamic permeability of Maxwellian fluids is presented. This expression gives the frequency dependent form of this dynamic permeability. In particular case, the analytic expression for the sinusoidal pressure pump fluid is illustrated in the configuration space. As an example of the feasibility of this expression the flow of human blood in a tube is presented finding that the human heart frequency has the same order that the frequencies where the dynamic permeability shows resonances. In order to make clear the above aspect of the dynamic permeability a model of pulsing pressure drops (gaussian like) are analyzed.

*Keywords:* Viscoelastic; Fourier transform; resonance; porous media.

PACS: 87.45.Ft; 83.80.Lz; 47.55. Mh

## 1. Introducción

La descripción del flujo de fluidos en medios porosos tiene una gran aplicación en áreas de la explotación petrolera, el transporte de agua en mantos acuíferos y en los campos geotérmicos, transporte de biofluidos en membranas y en reactores químicos, entre otras, además su estudio es una parte fundamental de la mecánica de fluidos. Para poder describir estos flujos deberemos primero definir lo que es un medio poroso. Aunque todos entendemos intuitivamente lo que es un fluido, es necesario precisar que en este trabajo trataremos a fluidos viscoelásticos; estos fluidos generalmente no son abordados en los cursos de licenciatura. Para aclarar las propiedades de estos fluidos raros, empecemos presentando las ecuaciones de balance que describen el flujo de fluidos.

La ecuación de balance de masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (1)$$

y la ecuación de balance de cantidad de movimiento:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p - \nabla \cdot \overleftrightarrow{\tau}, \quad (2)$$

donde  $\rho$  es la densidad de masa del fluido,  $\mathbf{v}$  el campo de velocidades,  $p$  la presión y  $\overleftrightarrow{\tau}$  el tensor de esfuerzos viscosos. La Ec. (1) es la llamada ecuación de continuidad que representa la conservación de la masa. La Ec. (2) es la ecuación de balance de cantidad de movimiento. Desde la perspectiva matemática para que este conjunto de ecuaciones sea un problema cerrado hacen faltan las condiciones iniciales y de

frontera. Desde el punto de vista físico, estas ecuaciones requieren información adicional, una ecuación de estado entre la presión y la densidad y otra relación entre el tensor de esfuerzos viscosos y el gradiente de velocidades para que puedan considerarse un sistema cerrado. Precisamente, las ecuaciones constitutivas y de estado especifican el tipo de fluido que se pretende describir. Estas relaciones hacen la distinción entre un gas, un fluido incompresible y newtoniano (como el agua) o uno incompresible y viscoelástico (como la miel). El agua, el más común de los fluidos, es un buen ejemplo de un fluido newtoniano incompresible. La aproximación de fluido incompresible no es una restricción muy severa, dado que para la mayoría de los líquidos como el agua bajo condiciones ambientales normales se tiene que el cambio en la densidad es muy pequeño, de hecho para el agua es del orden de  $\Delta\rho/\rho \sim 10^{-5}$  para cambios de presión del orden de atmósferas [1] y, por lo tanto, la suposición de incompresibilidad es una aproximación razonable. La clasificación de fluido newtoniano tiene que ver con la ecuación constitutiva que relaciona al tensor de esfuerzos con el gradiente de velocidades en una forma lineal. Para el caso de fluidos newtonianos podemos escribir

$$\overleftrightarrow{\tau} = -\eta \nabla \mathbf{v}, \quad (3)$$

donde  $\eta$  es la viscosidad.

Como se puede apreciar, con esta ecuación se tiene un conjunto de dos ecuaciones para dos incógnitas,  $p$  y  $\mathbf{v}$  que dadas las condiciones iniciales y de frontera puede resolverse. Sin embargo, en esta ocasión estamos interesados en ilustrar

qué pasa en los fluidos que intervienen en la explotación petrolera, en los reactores químicos y los biofluidos que presentan propiedades que los hacen ser llamados no newtonianos. La característica fundamental de los fluidos no newtonianos es que la ecuación constitutiva ya no es lineal [2]. Algunos de estos fluidos los podemos encontrar en nuestra casa. Por ejemplo, la miel; que al parar de verterla observamos un comportamiento inercial al ver que continúa fluyendo por unos instantes más. En algunos procesos químicos industriales los fluidos tienen propiedades diferentes a las del agua y muchas veces son llamados fluidos exóticos [2].

Los fluidos no newtonianos muestran muchas propiedades diferentes, entre ellas la elasticidad. Los fluidos viscoelásticos se caracterizan por ser fluidos que presentan comportamiento disipativo como la viscosidad y una propiedad de restitución ante los esfuerzos (la elasticidad antes mencionada). Uno de los modelos más simples de fluidos viscoelásticos es el llamado modelo de Maxwell. El fluido de Maxwell [3], que es uno de los modelos más sencillos para un fluido viscoelástico, tiene la siguiente ecuación constitutiva linealizada:

$$t_m \frac{\partial \langle \vec{\tau} \rangle}{\partial t} = -\eta \nabla \mathbf{v} - \langle \vec{\tau} \rangle, \quad (4)$$

donde  $t_m$  es el tiempo de relajación de Maxwell. Claramente si  $t_m \rightarrow 0$  la ecuación constitutiva del fluido newtoniano se recupera, [Ec. (3)]. El modelo anterior fue propuesto por Maxwell para introducir la inercia en el sistema y aunque tiene limitaciones, sirve para ilustrar el comportamiento viscoelástico de algunos fluidos no newtonianos. La Ec. (4) es una ecuación lineal y esta característica es una de sus principales limitaciones, ya que la mayoría de los fluidos viscoelásticos presentan un comportamiento no lineal y sus propiedades físicas dependen de la viscosidad y del esfuerzo cortante al que son sometidos. Además, el fluido de Maxwell sólo considera un tiempo de relajación y casi todos los fluidos viscoelásticos reales presentan un comportamiento que requiere de varios de ellos para ser descritos. Existen otros modelos que describen con mayor exactitud a este tipo de fluidos [2, 4, 5]; pero para nuestros propósitos el modelo de Maxwell es suficiente. Estas limitaciones no deben desalentarnos en la comparación de los resultados obtenidos con este modelo y experimentos con fluidos reales, ya que los fluidos micelares se comportan como maxwellianos. Estos fluidos son compuestos formados por partículas que poseen secciones hidrofóbicas e hidrofílicas que al contacto con el agua forman estructuras que actúan como resortes microscópicos dando al fluido una componente elástica en su comportamiento.

Hasta aquí, hemos descrito a los fluidos, pero debemos definir un medio poroso (MP) como un cuerpo sólido con hoyos interconectados (poros). Estos poros pueden ser espacios extremadamente pequeños, intersticios moleculares, y otros muy grandes, cavernas. Como se comprenderá con esta definición se abarca desde membranas muy poco permeables hasta la corteza terrestre en escalas muy diferentes. Para este

trabajo, la idea de poro se tomará como el espacio intermedio entre los dos extremos señalados, de tal forma que los espacios sean grandes desde el punto de vista microscópico, pero pequeños para las escalas del sistema [6]. También se abordará el transporte de fluidos en medios porosos y por lo tanto este medio debe ser atravesados por un fluido; de esta forma se requiere que podamos encontrar espacios huecos en el material que estén interconectados, por esta razón necesitamos poder definir el poro efectivo como los espacios interconectados del medio poroso. Es obvio que para el estudio de flujo de materia sólo se consideran los poros efectivos y los espacios aislados no juegan papel alguno en el transporte de masa, con excepción de su participación en los efectos difusivos, que no se abordarán en este trabajo; pero una descripción detallada se puede encontrar en trabajos de Ochoa [7, 8].

El medio poroso puede ser caracterizado por varias propiedades geométricas, como son la porosidad  $\varepsilon$  definida como la fracción de espacio vacío con respecto al volumen total, en nuestro caso será el espacio interconectado. Es común que en la literatura se use el término diámetro promedio de poro, pero esto sólo tendría sentido estrictamente si los huecos tuvieran forma cilíndrica o esférica [6]. Sin embargo, el concepto de diámetro promedio será de mucha utilidad en este trabajo.

La permeabilidad es el término asociado a la conductividad del MP con respecto a un fluido y nos indica que tan fácilmente fluye un fluido a través de un medio poroso. Se acostumbra definir el Darcy como la unidad de medición de la permeabilidad y su equivalencia es de 9,87 cm. Existen muchas formas de modelar un medio poroso, por ejemplo considérese un sólido al que se le barrena en múltiples lugares conservando los ejes de los barrenos paralelos, esto sería un manojo de tubos. Otra forma de modelar sería considerar un sistema compuesto por un conglomerado de esferas sólidas fijas azarosamente distribuidas. Se ha encontrado que algunos medios porosos muestran características de autosimilaridad [9] y por ello también se han tratado de modelar a los medios porosos como fractales [10–12]. Como se observa, describir la microestructura de un medio poroso es un tema abierto y lleno de posibilidades.

Ahora podremos comprender cómo la descripción del transporte en medios porosos presenta dificultades que radican tanto en la compleja estructura del medio poroso como en las propiedades físicas de los fluidos. Esta complejidad del transporte en medios porosos se presenta claramente al describir el conjunto de ecuaciones de balance y ecuaciones constitutivas, consideradas para modelar el flujo en medios porosos. Antes de comenzar y para centrar nuestra atención en la permeabilidad debemos hacer una aproximación y suponer que el transporte de calor en el sistema no es importante. Para una discusión de un problema incluyendo el transporte de calor se puede consultar el amplio trabajo desarrollado por Whitaker [13, 14].

Entonces, bajo una situación isotérmica, para describir el flujo a través de un medio poroso se requiere en principio resolver el problema dado por las Ecs. (1) y (2) que deben re-

solverse bajo condiciones de frontera tan complejas como las ilustradas en la Fig. 1. La complejidad radica en las condiciones de frontera que generalmente se toman como la condición de no deslizamiento, a saber,

$$\mathbf{v} = 0 \quad \text{en} \quad S,$$

donde  $S$  es la superficie del sólido indicada en la Fig. 1. Evidentemente el desorden de la superficie introduce una complejidad adicional a la no linealidad de la Ec. (2). Por supuesto, también se requiere la condición inicial en todo el campo de velocidades para la solución del problema, esto es otro reto mayor.

Por otro lado, como ya mencionamos, el sistema de Ecs. (1) y (2) no es un sistema cerrado, es necesario introducir dos ecuaciones más que especifiquen el tipo de fluido de trabajo. La primera es la ecuación de estado entre la presión y la densidad, la segunda se refiere a la ecuación constitutiva para el tensor de esfuerzos viscosos; pero estas podrán ser escogidas entre las Ecs. (3) ó (4). Como ya mencionamos, es la selección de esta última ecuación donde centraremos las diferencias entre los fluidos newtoniano y maxwelliano que estudiaremos.

Por lo tanto, bajo la hipótesis de incompresibilidad, el sistema de ecuaciones (1) y (2) se transforma en

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (5)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p - \nabla \cdot \overleftrightarrow{\tau}. \quad (6)$$

Éstas son las ecuaciones diferenciales parciales no lineales que tenemos que resolver en la intrincada geometría de la Fig. 1. Para resolver estas ecuaciones en un medio poroso, generalmente se utilizan modelos muy simples [6] o se definen nuevas variables promedio [8, 15]. En este trabajo utilizaremos la primera opción y consideraremos el modelo más simple para un medio poroso: un manojito de tubos capilares, con el que obtendremos una expresión simple para la permeabilidad dinámica. Aquí abordamos de una forma sim-

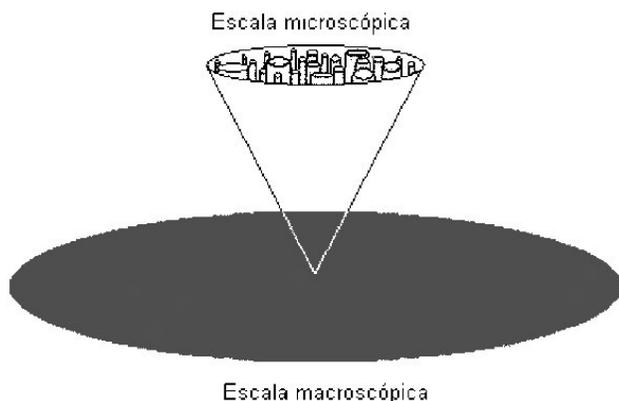


FIGURA 1. Esquema de un medio poroso.

ple la descripción del flujo de dos tipos de fluidos, uno newtoniano y otro maxwelliano a través de un medio poroso. Con este análisis capturamos las características esenciales de los flujos de interés tecnológico y discutimos la relevancia de contar con aproximaciones analíticas a la compleja problemática real. La organización del trabajo es la siguiente: en la Sec. 2, para definir la permeabilidad, presentamos la solución del problema del flujo de Poiseuille para un fluido newtoniano estacionario usando un manojito de tubos capilares. Posteriormente en la Sec. 3, resolvemos el problema de un fluido de Maxwell en un medio poroso en estado dependiente del tiempo. Con este modelo se generaliza la definición de permeabilidad al caso dinámico y se obtiene como caso límite la permeabilidad dinámica de un fluido newtoniano. En la Sec. 4, se analiza el comportamiento de la permeabilidad dinámica en términos de la frecuencia y se muestra que existe un incremento de varios órdenes de magnitud en esta propiedad dependiendo de la frecuencia de excitación. Además, presentamos ajustes que relacionan el valor máximo de la permeabilidad dependiendo de las propiedades físicas del fluido y del medio poroso. En la Sec. 5 se discute un ejemplo previamente presentado [16] donde se analiza el ritmo cardíaco humano bajo esta óptica, ya que la sangre puede ser considerada como un fluido de Maxwell y los resultados muestran que la frecuencia cardíaca humana cae justamente en la zona de máxima eficiencia. También presentamos el problema del perfil de velocidades de un fluido viscoelástico bajo una presión sinusoidal, problema completamente analítico. Finalmente mostramos la respuesta del flujo medio de un fluido viscoelástico expuesto a un bombeo gaussiano eficiente, esto se compara con el flujo medio de un bombeo a frecuencia no óptima.

## 2. Permeabilidad de un fluido viscoso

En esta sección utilizaremos el flujo de Poiseuille para definir un modelo simple para la permeabilidad. Supongamos que tenemos un medio poroso completamente lleno con un fluido newtoniano incompresible de viscosidad  $\eta$  y cuyos poros tienen un radio promedio  $a$ , esto es conocido como un medio poroso saturado. Como ya mencionamos se modelará el medio poroso como un manojito de pequeños tubos capilares construyendo una red con una porosidad  $\varepsilon$ . Al tener un manojito de tubos, podremos calcular el flujo en un tubo y luego multiplicar el resultado por el número de tubos para obtener el flujo total que pasa a través del medio poroso, por esta razón en esta sección analizaremos el caso del flujo a través de un tubo obteniendo la bien conocida solución analítica debida a Poiseuille [17] y con este resultado introducir el concepto de permeabilidad y facilitar la discusión posterior.

Al sustituir la Ec. (3) en la ecuación de balance de cantidad de movimiento (6) llegamos a

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (7)$$

que es la llamada ecuación de Navier-Stokes. Aunque nos in-

teresa el caso dinámico, para los propósitos de esta sección basta con considerar el problema más simple: supondremos flujo estacionario en un ducto de sección circular constante despreciando los efectos de borde, es decir, los producidos a la entrada y la salida del tubo (ver Fig. 2).

Bajo estas condiciones la velocidad tiene la siguiente forma  $\mathbf{v} = (v_x(y, z), 0, 0)$  y la presión solamente depende de la coordenada axial, *i.e.*,  $p = p(x)$  y claramente con esta selección de la dependencia de la velocidad se satisface la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{8}$$

y el término no lineal es automáticamente cero, *i.e.*,  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = 0$ . Al sustituir las formas funcionales de  $\mathbf{v}$  y  $p$  en la ecuación de Navier-Stokes (7) y expresando el resultado en coordenadas cilíndricas

$$\eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) = \frac{d}{dx} p, \tag{9}$$

con las condiciones de frontera

$$v_x = finita \tag{10}$$

en el eje del cilindro y

$$v_x(a) = 0, \tag{11}$$

con  $a$  el radio del tubo. La Ec. (9) es fácilmente integrable, a saber,

$$v_x(r) = \frac{1}{\eta} \left( \frac{d}{dx} p \right) \frac{r^2}{4} + A \log r + B, \tag{12}$$

imponiendo condiciones físicas en la frontera (10) y (11), obtenemos

$$A = 0 \quad B = -\frac{1}{4\eta} a^2 \frac{d}{dx} p. \tag{13}$$

Entonces, la solución para el perfil de velocidades está dada por

$$v_x(r) = -\frac{1}{4\eta} \left( \frac{d}{dx} p \right) (a^2 - r^2). \tag{14}$$

Tenemos entonces un perfil parabólico que depende del gradiente de presiones. Claramente vemos que la velocidad máxima ocurre para  $r = 0$ . Este perfil de velocidades aparecería en cada uno de los tubos de nuestro modelo de medio poroso; pero dado que estamos interesados en el flujo a través de este medio, no nos interesa el detalle del flujo sino el flujo promedio atravesando el medio poroso, que es una cantidad medible experimentalmente. El flujo volumétrico promedio se obtiene al integrar el perfil de velocidades:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a v_x(r) r dr d\theta.$$

Al usar la expresión (14) para el perfil de velocidades e integrar se obtiene

$$Q = -\frac{\pi a^4}{8\eta} \left( \frac{d}{dx} p \right).$$

Para obtener la descripción de flujo a través del medio poroso solamente nos resta calcular la sección transversal que es ocupada por los tubos en relación al área total del medio poroso. Dado que el modelo es un manojito de tubos capilares, esta relación está dada por la porosidad, entonces tenemos que multiplicar el flujo en el tubo para obtener el flujo volumétrico que pasa por el medio poroso. Por lo tanto, el flujo de un fluido newtoniano e incompresible con viscosidad  $\eta$  a través de un medio poroso con porosidad  $\varepsilon$  y con un radio promedio de poro  $a$  está dado por

$$q = Q\varepsilon = -\frac{\pi \varepsilon a^4}{8\eta} \left( \frac{d}{dx} p \right).$$

Con este simple modelo hemos encontrado un parámetro que depende únicamente de las propiedades del medio poroso: la porosidad y el valor del radio promedio de poro. Este parámetro es la permeabilidad y está dada por

$$K = \frac{\pi \varepsilon a^4}{8}. \tag{15}$$

Esto pretende desacoplar las propiedades del medio poroso y las del fluido. Así que podemos escribir

$$q = -\frac{K}{\eta} \left( \frac{d}{dx} p \right).$$

Ésta es la llamada ley de Darcy, muy usada en el transporte de fluidos en medios porosos [6, 18, 15] que nos dice que el flujo promedio en un medio poroso es proporcional al gradiente de presiones y que la constante de proporcionalidad es la llamada permeabilidad. Entonces la permeabilidad nos da una medida de qué tan fácilmente un fluido fluye a través de un medio poroso. Una permeabilidad grande significa que el fluido puede fluir libremente y una permeabilidad baja significa que se requiere una mayor presión para producir un flujo equivalente.

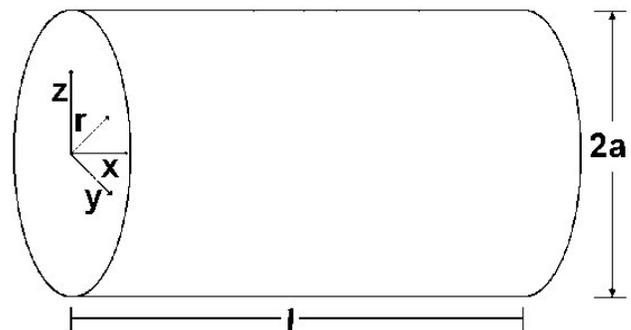


FIGURA 2. Ejes coordenados en un tubo.

Aquí podemos resumir las hipótesis que hemos utilizado para obtener estos resultados: un modelo de tubos capilares infinitos y un fluido incompresible y newtoniano, además supusimos que no hay deslizamiento en las paredes y asumimos un estado estacionario. Los objetivos del trabajo son abordar la permeabilidad dinámica de fluidos viscoelásticos, así que en la próxima sección cambiaremos dos hipótesis: la de fluido newtoniano y de estado permanente. De tal forma, analizaremos un fluido de Maxwell en dos situaciones dinámicas.

### 3. Permeabilidad dinámica

En esta sección consideraremos el caso dependiente del tiempo y además maxwelliano. Continuamos con el modelo de tubos capilares infinitos para el medio poroso y las aproximaciones de incompresibilidad y de no deslizamiento en las paredes para el fluido.

Bajo estas condiciones las Ecs. (5), (6) y (4) son las adecuadas para describir el sistema. La solución puede ser complicada; sin embargo, al tener la misma geometría que en la sección anterior, un tubo recto, tenemos que  $\mathbf{v} = (v_x(t, y, z), 0, 0)$ , que  $p = p(t, x)$  y por lo tanto la ecuación de continuidad se satisface automáticamente y el término no lineal es automáticamente cero.

Entonces al tomar la derivada de la Ec. (6) sin considerar el término no lineal obtenemos

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = -\frac{\partial \nabla p}{\partial t} - \nabla \cdot \frac{\partial \overleftrightarrow{\tau}}{\partial t}, \quad (16)$$

donde hemos usado que las derivadas parciales se pueden intercambiar. Ahora tomamos la divergencia de la Ec. (4) y llegamos a

$$t_m \nabla \cdot \frac{\partial \overleftrightarrow{\tau}}{\partial t} = -\eta \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{\tau}. \quad (17)$$

Combinando las Ecs. (16) y (17) obtenemos

$$\rho t_m \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = -t_m \frac{\partial \nabla p}{\partial t} + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \nabla \cdot \overleftrightarrow{\tau}, \quad (18)$$

y, finalmente, usando la Ec. (6) llegamos a la expresión

$$t_m \rho \left( \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} \right) + \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) = -t_m \frac{\partial \nabla p}{\partial t} - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (19)$$

que es la ecuación para la velocidad que tenemos que resolver acorde con condiciones iniciales y de frontera.

En un medio poroso difícilmente se conocen las condiciones iniciales en las fronteras. A fin de resolver la Ec. (19) podemos utilizar la transformada de Fourier sin perder detalle en la descripción de ningún estado transitorio ya que hay términos de todas las frecuencias. El uso adecuado de la transformada de Fourier está garantizado por el hecho de que la Ec.(19) es lineal. Recordemos que la transformada de Fourier de la función  $w(\mathbf{r}, t)$  se define como

$$W(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty w(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t} dt, \quad (20)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia y  $W(\mathbf{r}, \omega)$  es la amplitud de cada una de las componentes de Fourier para reconstruir  $w(\mathbf{r}, t)$ . Aquí hemos usado las mayúsculas para denotar funciones en el dominio de la frecuencia.

Al trabajar en el dominio de las frecuencias estamos cambiándonos a un espacio donde consideramos todos los posibles estados transitorios que puede describir la Ec. (19) y por esta razón no son necesarias las condiciones iniciales para el problema. De hecho trabajaremos con las amplitudes de las componentes de Fourier del problema y así podremos encontrar cuales son las más importantes para describir el comportamiento del fluido de Maxwell en un tubo. La técnica que aquí usamos es una de las más comúnmente usadas en física ya que transforma una ecuación diferencial en una ecuación algebraica facilitando el problema. De esta forma estamos ilustrando una aplicación más de las bondades de la transformada de Fourier.

Usando la definición (20) podemos transformar la Ec. (19) en

$$-\rho (t_m \omega^2 + i\omega) \mathbf{V} = -(1 - i\omega t_m) \nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{V}; \quad (21)$$

reescribiendo llegamos a

$$\rho (t_m \omega^2 + i\omega) \mathbf{V} + \eta \nabla^2 \mathbf{V} = (1 - i\omega t_m) \nabla P. \quad (22)$$

Notemos que la ecuación diferencial es respecto a la variable espacial; pero en  $\omega$  es solamente algebraica. Como en la sección anterior, la descripción en coordenadas cilíndricas es la más adecuada. La ecuación resultante es

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\rho (t_m \omega^2 + i\omega)}{\eta} V = \frac{(1 - i\omega t_m)}{y} \nabla P, \quad (23)$$

que es una ecuación de Bessel de orden cero [19]. La solución general de la parte homogénea de esta ecuación está dada por [19]  $C J_0(\beta r) + C_1 Y_0(\beta r)$ , donde  $J_0(x)$  y  $Y_0(x)$  son las funciones cilíndricas de Bessel de primera y segunda clase. Dado que la solución debe ser acotada en  $r = 0$ , tenemos que  $C_1 = 0$  y, por lo tanto, la solución de la Ec. (23) puede ser escrita como

$$V(r, \omega) = C J_0(\beta r) - \frac{1 - i\omega t_m}{\beta^2} \nabla P, \quad (24)$$

donde  $C$  es una constante, el parámetro  $\beta$  está dado por

$$\beta = \left( \frac{\rho}{\eta t_m} \left[ (t_m \omega)^2 + i\omega t_m \right] \right)^{\frac{1}{2}}$$

Este parámetro determina las longitudes de onda donde la función Bessel tiene sus raíces y por lo tanto determina las longitudes de onda que caben completamente en el tubo de radio  $a$  que estamos modelando [19]. Para evaluar la constante utilizamos la condición  $V(a, \omega) = 0$ , condición de no deslizamiento sobre el cilindro, así obtenemos

$$C = \frac{(1 - i\omega t_m)}{\beta^2 J_0(\beta a)} \nabla P$$

y, por lo tanto, la solución final es

$$V(r, \omega) = \frac{(1 - i\omega t_m)}{\beta^2 J_0(\beta a)} J_0(\beta r) \nabla P - \frac{1 - i\omega t_m}{\beta^2} \nabla P,$$

que puede ser rearrreglada como

$$V(r, \omega) = -\frac{(1 - i\omega t_m)}{\beta^2 y} \left( 1 - \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta a)} \right) \nabla P. \quad (25)$$

Notemos que la solución sólo vale en el intervalo  $0 < r < a$  y que si no existe el gradiente de presiones no existe un perfil de velocidades. En principio, con este perfil dependiente de la frecuencia, podemos tomar la transformada inversa y describir su evolución en el tiempo.

En lugar de hacer esto seguiremos con nuestro modelo de tubos capilares y calcularemos el flujo promedio en un tubo. Así, nuevamente integramos sobre la sección transversal para obtener el flujo promedio

$$Q(\omega) = -2\pi \int_0^a \left[ -\frac{(1 - i\omega t_m)}{\beta^2 y} \left( 1 - \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta a)} \right) \nabla P \right] r dr.$$

Al integrar tenemos

$$Q(\omega) = \frac{(1 - i\omega t_m) \pi}{\beta^2 y} \left[ a^2 - \frac{2aJ_1(\beta a)}{\beta J_0(\beta a)} \right] \nabla P,$$

que podemos reescribir como

$$Q(\omega) = \frac{(1 - i\omega t_m) \pi a^2}{\beta^2 y} \left[ 1 - \frac{2J_1(\beta a)}{a\beta J_0(\beta a)} \right] \nabla P. \quad (26)$$

Al multiplicar por la porosidad, análogamente al cálculo de la sección anterior, podemos llegar a una relación para el flujo medio a través del medio poroso como

$$q(\omega) = \frac{\varepsilon \pi a^2 (1 - i\omega t_m)}{\beta^2 y} \left[ 1 - \frac{2J_1(\beta a)}{a\beta J_0(\beta a)} \right] \nabla P \quad (27)$$

y nuevamente obtenemos a una ecuación generalizada de Darcy:

$$q(\omega) = -\frac{K(\beta, \omega)}{\eta} \nabla P, \quad (28)$$

donde la permeabilidad dinámica está dada por

$$K(\beta, \omega) = -\frac{\varepsilon \pi a^2 (1 - i\omega t_m)}{\beta^2} \left[ 1 - \frac{2J_1(\beta a)}{a\beta J_0(\beta a)} \right]. \quad (29)$$

Notemos que la permeabilidad es una función respuesta, es decir, es una propiedad física del sistema que nos indica cómo responde el sistema ante cambios de presión con un flujo. En particular, la amplitud de este número complejo nos indica la magnitud de la respuesta, mientras que la parte imaginaria está ligada con la fase entre el estímulo, en este caso la presión, y la respuesta, el flujo. Esto es un ejemplo de las funciones respuestas complejas. Para un análisis general de la permeabilidad dinámica es conveniente definir un número adimensional dado por

$$\alpha = \frac{\rho a^2}{\eta t_m}. \quad (30)$$

Este parámetro está relacionado con el número de Deborah que nos indica la importancia relativa de los efectos viscosos y los elásticos del fluido en el problema. Como veremos adelante, este parámetro determina cuándo los efectos elásticos son importantes, es decir, cuando encontraremos resonancias en el flujo a través del medio poroso. En términos del parámetro  $\alpha$ ,  $\beta$  puede ser expresado como

$$\beta = \sqrt{\frac{\alpha \varpi}{a^2}}, \quad (31)$$

donde  $\varpi$  se ha definido como

$$\varpi(\omega) = (\omega^*)^2 + i\omega^*,$$

y la frecuencia adimensional es

$$\omega^* = t_m \omega.$$

Claramente el argumento de las funciones Bessel está dado por

$$\beta a = a \sqrt{\frac{\alpha \varpi}{a^2}} = \sqrt{\alpha \varpi}. \quad (32)$$

Con esta notación la permeabilidad se escribe como

$$K(\alpha, \omega) = -\frac{\varepsilon \pi a^4 (1 - i\omega t_m)}{\alpha \varpi} \left[ 1 - \frac{2J_1(\sqrt{\alpha \varpi})}{\sqrt{\alpha \varpi} J_0(\sqrt{\alpha \varpi})} \right]. \quad (33)$$

Este resultado para la permeabilidad dinámica ya fue obtenido usando una metodología de medio efectivo [20], o para el mismo problema [16] y para tubos concéntricos bajo campos magnéticos [21]; sin embargo, el desarrollo aquí presentado es más diáfano y sencillo. Un aspecto importante a notar es que las funciones de Bessel presentan oscilaciones y el hecho de que la permeabilidad sea un cociente de éstas es indicativo de un posible comportamiento resonante de las funciones de Bessel  $J_1$  y  $J_0$ . En la siguiente sección analizaremos estas resonancias.

#### 4. Incremento en la permeabilidad dinámica

Para analizar el comportamiento de la permeabilidad dinámica [Ec. (33)] es útil comparar su magnitud con respecto a la permeabilidad estática [Ec. (15)]. Por lo tanto definimos la forma adimensional de la permeabilidad dinámica con respecto a la permeabilidad estática como

$$K^*(\omega) = \frac{K(\omega)}{K(0)}.$$

La permeabilidad adimensional nos indica cuántas veces es mayor la permeabilidad dinámica con respecto a la estática;

caso de frecuencia cero. Explícitamente la forma adimensional para la permeabilidad dinámica está dada por

$$K^*(\omega) = \frac{8(1 - i\omega t_m)}{\alpha\varpi} \left[ 1 - \frac{2J_1(\sqrt{\alpha\varpi})}{\sqrt{\alpha\varpi}J_0(\sqrt{\alpha\varpi})} \right]. \quad (34)$$

Un punto importante aquí es que en el límite cuando  $t_m \rightarrow 0$  tenemos el comportamiento newtoniano. Para clarificar este punto analicemos el valor  $\alpha\varpi$  cuando  $t_m \rightarrow 0$ . En este caso

$$\begin{aligned} \lim_{t_m \rightarrow 0} \alpha\varpi &= \lim_{t_m \rightarrow 0} \frac{\rho a^2}{\eta t_m} \left( (\omega^*)^2 + i\omega^* \right) \\ &= \lim_{t_m \rightarrow 0} \frac{\rho a^2}{\eta} (t_m \omega^2 + i\omega) = i \frac{\rho a^2}{\eta} \omega \end{aligned}$$

y por lo tanto para el caso newtoniano la permeabilidad dinámica está dada por

$$\lim_{t_m \rightarrow 0} K^*(\omega) = -i \frac{8}{\lambda\omega} \left[ 1 - \frac{2J_1(\sqrt{i\lambda\omega})}{\sqrt{i\lambda\omega}J_0(\sqrt{i\lambda\omega})} \right], \quad (35)$$

donde

$$\lambda = \frac{\rho a^2}{\eta}.$$

Este resultado fue obtenido hace algunos años [22]. Con el objeto de comparar la permeabilidad dinámica para un fluido newtoniano y otro maxwelliano graficaremos las permeabilidades dinámicas dimensionales; aunque posteriormente para profundizar el análisis regresaremos a los resultados para la permeabilidad dinámica adimensional en el caso maxwelliano. En la Fig. 3 se observa el carácter disipativo del fluido newtoniano, es decir, la amplitud de las perturbaciones con frecuencias altas son atenuadas en comparación con las perturbaciones de frecuencias bajas. De hecho, cualquier perturbación es atenuada con respecto al estado estacionario,

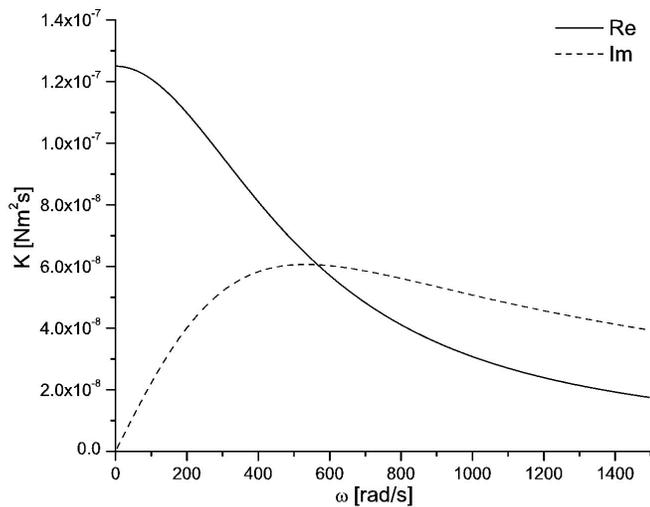


FIGURA 3. Respuesta en frecuencias de un fluido newtoniano, fluido sin tiempo de relajación.

$\omega = 0$ . Este comportamiento disipativo también se puede apreciar en la Fig. 4, donde se presenta el resultado para la permeabilidad dinámica con  $t_m \neq 0$  y  $\alpha = 11$ . Sin embargo, en el caso  $\alpha = 0.0021$ , la situación es dramáticamente diferente, aquí vemos un incremento en la permeabilidad dinámica de varios órdenes de magnitud, Fig. 5. Esto indica que el comportamiento elástico del fluido se manifiesta para frecuencias específicas y las perturbaciones con dicha frecuencia se transmiten eficientemente a lo largo del medio poroso. Al analizar detalladamente la transición entre la respuesta viscosa y la respuesta elástica se obtiene el valor crítico  $\alpha_c$  donde el comportamiento cambia de ser disipativo a elástico [20],

$$\alpha_c \simeq 11.64.$$

Hasta aquí hemos identificado un dramático cambio en la respuesta del sistema; pero los experimentales requieren al-

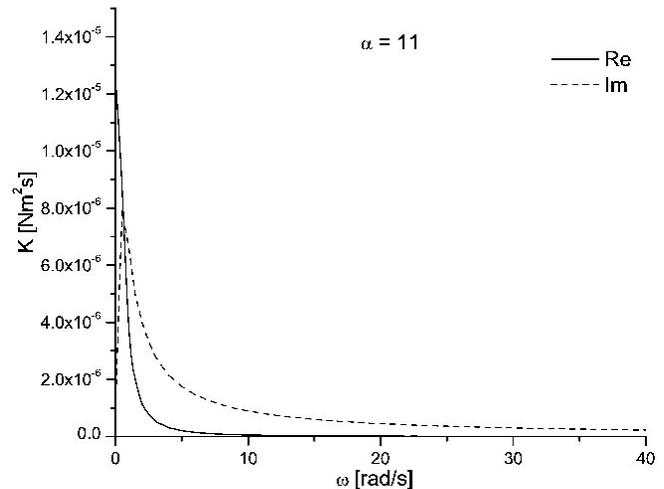


FIGURA 4. Respuesta en frecuencias fluido ligeramente maxwelliano.

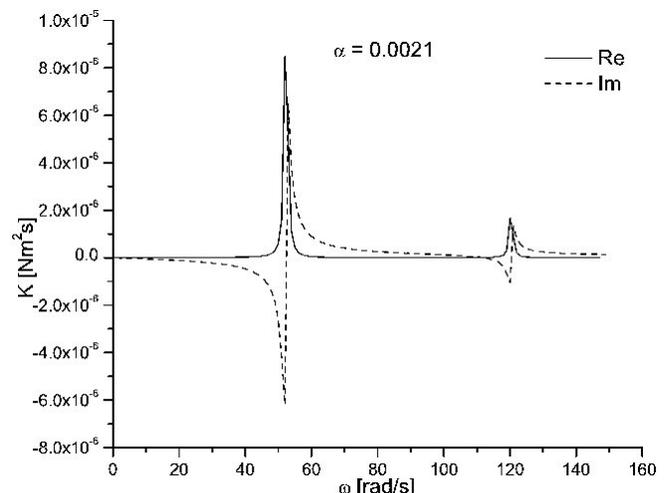


FIGURA 5. Respuesta en frecuencias, fluido maxwelliano.

gunos datos adicionales para intentar realizar los experimentos. Por ejemplo, ¿cuál es el valor máximo de la permeabilidad dinámica para un valor  $\alpha$  dado? y dado  $\alpha$ , ¿a qué frecuencia ocurre el máximo?, ¿existe algún gradiente de presión para el cual este incremento pueda ser medido y contribuya al transporte? Para responder a las primeras dos preguntas procedimos a calcular el máximo de la permeabilidad dinámica en términos del parámetro  $\alpha$ . Es posible realizar el cálculo analítico; pero debido a la complejidad del resultado no se permite vislumbrar el comportamiento en forma global. En la Fig. 6 se presenta el resultado en una forma visual. A la vista de estos resultados surge la inquietud de generar un ajuste que reproduzca la compleja relación entre la permeabilidad máxima y el parámetro  $\alpha$ . La correlación

$$K_{\text{máx}}^* \simeq 10^{\frac{3}{4}} \alpha^{-1}, \quad (36)$$

reproduce aproximadamente los valores numéricos y puede ser considerada una buena fórmula para el diseño de experimentos. Una situación semejante ocurre en la relación entre la frecuencia a la que ocurre el máximo y el valor de  $\alpha$ . En la Fig. 7 presentamos los valores reales de esta relación y su ajuste;

$$\omega_{\text{máx}}^* \simeq 10^{\frac{2}{5}} \alpha^{-1/2}, \quad (37)$$

mostrando también que esta última es una buena aproximación.

Con estos datos los científicos experimentales ya pueden diseñar sus dispositivos y verificar nuestras predicciones. En la próxima sección presentaremos una evidencia cualitativa de nuestras predicciones.

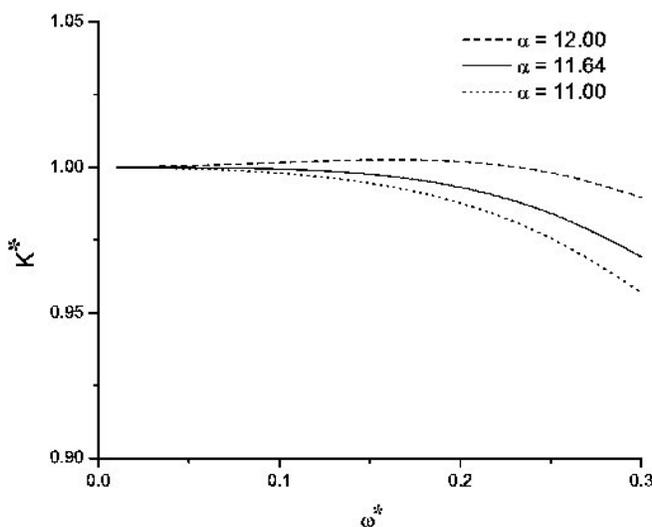


FIGURA 6. Comportamiento de la permeabilidad dinámica en función de alfa.

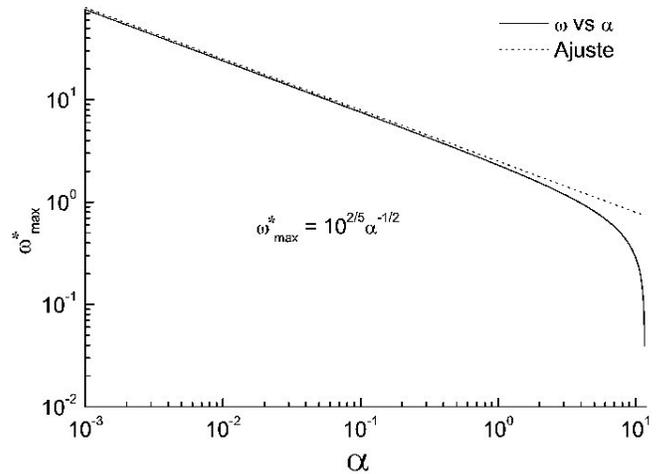


FIGURA 7. Ajuste exponencial de alfa en función de la frecuencia.

### 5. La frecuencia cardiaca humana

En esta sección desviaremos un poco nuestra atención sobre los medios porosos y aplicaremos nuestros hallazgos a un problema de un fluido viscoelástico en un tubo.

Dentro de la gran variedad de fluidos viscoelásticos, la sangre humana es uno de los que ha presentado mayor interés, de tal forma que existe una revista científica llamada *Biorehology* que presenta numerosos estudios del flujo sanguíneo en cada número y en muchos de ellos se modela a la sangre como un fluido de Maxwell.

Usaremos los ajustes de las fórmulas (36) y (37) para analizar la frecuencia óptima de bombeo de la sangre humana. Al usar los parámetros físicos de la sangre: viscosidad entre 5 y 20 cp [23], una densidad de 1.05 g/cm<sup>3</sup> [24, 25], el tiempo de relajación de la sangre fresca 1 s [24] y para el tubo podemos seleccionar un rango de radios de nuestras arterias entre 0.02 y 0.35 cm [24] esta elección puede parecer ingenua; pero únicamente servirá para ilustrar el orden de magnitud de las respuestas del sistema). Con esta información podemos obtener dos valores extremos para  $\alpha$  en los cuales ocurre el máximo en la permeabilidad. Al utilizar los valores adecuados para obtener el límite inferior llegamos a

$$\alpha_l = \frac{1.05(0.02)^2}{.2(1)} = .0021$$

y para el límite superior

$$\alpha_h = \frac{1.05(0.35)^2}{1(0.05)} = 2.57.$$

Como vemos, estos valores son menores que el valor crítico, entonces se tiene un sistema elástico en la sangre fluyendo en el sistema circulatorio. Por lo tanto, podemos obtener el valor de las frecuencias correspondientes a estos valores del parámetro  $\alpha$ . En el primer caso tenemos

$$\omega_{\text{máx } l} = 10^{\frac{2}{5}} / \sqrt{.0021} = 55 \text{ rad/s}$$

y en el segundo

$$\omega_{\text{máx}} = 10^{\frac{2}{5}} / \sqrt{2.57} = 1.57 \text{ rad/s}$$

Observando la Fig. 5, podemos confirmar la existencia de un valor máximo de permeabilidad para el valor  $\alpha = 0.0021$ .

Generalmente usamos las unidades de Hertz, convirtiendo estos dos datos llegamos a

$$\nu_{\text{máx}} \in \left( \frac{55}{2\pi}, \frac{1.57}{2\pi} \right) \text{ Hz} \quad \in (8.7, 0.25) \text{ Hz}.$$

Aquí debemos recordar que la frecuencia cardiaca para los humanos está entre 1 y 3 Hz. Este resultado nos indica que el corazón humano bombea la sangre a una frecuencia muy cercana a la óptima. Por otro lado, los parámetros físicos de la sangre en los mamíferos no cambian mucho y se sabe que un roedor puede tener una frecuencia cardiaca de 10 Hz, mientras que una ballena azul puede tener una frecuencia cardiaca de 0.5 Hz. Con este ajuste se ilustra que la posibilidad de un bombeo eficiente de fluidos viscoelásticos es un tópico que debe ser investigado con mayor detalle. Por lo tanto, parece que nuestro estudio simplificado del caso no estacionario de un flujo de Maxwell es adecuado y contiene la esencia de la física involucrada en el problema. Claramente existen muchos otros factores que deben ser considerados en la descripción de flujo sanguíneo; pero dado lo simple de nuestro modelo, una verificación experimental es requerida y por lo tanto motivamos la búsqueda de las resonancias el flujo de fluidos viscoelásticos fluyendo a través de medios porosos.

Ahora regresamos a la última pregunta que planteamos, sobre la existencia de algún tipo de gradiente de presión que permita ver este incremento en la permeabilidad. Con la solución del problema de flujo sanguíneo tenemos la pauta para estudiar otro sistema con gasto neto, esto lo haremos más adelante con un tren de pulsos gaussianos. En la siguiente sección mostramos un caso más sencillo que resulta ser completamente analítico y que puede servir para diseñar un dispositivo experimental que cuantitativamente confirme nuestro modelo.

## 6. Presión sinoidal en un fluido de Maxwell contenido en un tubo

En esta sección analizaremos un fluido de Maxwell oscilante en un tubo saturado de longitud  $l$ . Definamos el flujo oscilante como

$$\Delta p(t) = p_0 e^{-i\omega_0 t}, \quad (38)$$

donde  $p_0$  es una constante y  $\omega_0$  la frecuencia característica. Para poder ocupar la Ec.(25) es necesario que el flujo sea transformado al espacio de frecuencias, al usar la transformación (20) tenemos

$$\Delta P(\omega) = \frac{p_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt. \quad (39)$$

De manera directa obtenemos

$$\Delta P(\omega) = \frac{p_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{iu} du = \frac{p_0}{\sqrt{2\pi}} \delta(\omega_0 - \omega), \quad (40)$$

donde  $u = (\omega_0 - \omega)t$ . Por lo tanto

$$\nabla P(\omega) = \frac{p_0}{\sqrt{2\pi}l} \delta(\omega_0 - \omega). \quad (41)$$

Al introducir este resultado en la Ec. (25), llegamos a

$$V(r, \omega) = \frac{-(1 - i\omega t_m)}{\beta^2 y} \left( 1 - \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta a)} \right) \times \frac{p_0}{\sqrt{2\pi}l} \delta(\omega_0 - \omega). \quad (42)$$

Finalmente, al aplicar la transformación inversa, regresamos al espacio real y obtenemos

$$v(r, t) = \frac{-(1 - i\omega_0 t_m)}{\beta_0^2 y} \left( 1 - \frac{J_0(\beta_0 r)}{J_0(\beta_0 a)} \right) \times \frac{p_0}{l} \exp(-i\omega_0 t), \quad (43)$$

donde

$$\beta_0 = \left( \frac{\rho}{\eta t_m} \left[ (t_m \omega_0)^2 + i\omega_0 t_m \right] \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Al tomar los valores típicos de un fluido maxwelliano micelar (ver Ref. 26),  $\alpha = 0.123$ ;  $l = 1 \text{ m}$ , y una presión normalizada de 1 Hz, podemos generar el perfil de velocidades oscilatorio dependiente del tiempo (Fig. 8).

En la siguiente sección, exponemos la respuesta del flujo medio viscoelástico para un bombeo con gasto efectivo.

## 7. Tren de pulsos

Ahora, mostraremos cuantitativamente el aumento del flujo medio en bombeo viscoelástico. Para ello analizaremos un fluido maxwelliano contenido en un tubo saturado de longitud  $l$  y que es sometido a una presión de bombeo pulsante.

Definamos el tren de pulsos como

$$\Delta p(t) = p_0 \sum_{j=0}^5 e^{-(t-jT\pi)^2}, \quad (44)$$

donde  $T$  controla el periodo de tiempo entre dos pulsos. De esta manera, en el espacio de frecuencias

$$\Delta P(\omega) = \frac{p_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-\omega^2/4} \left[ 1 + \sum_{j=0}^5 e^{iT\pi j\omega} \right]. \quad (45)$$

Para una presión normalizada y  $T = 1$ , podemos apreciar este comportamiento en la Fig. 9.

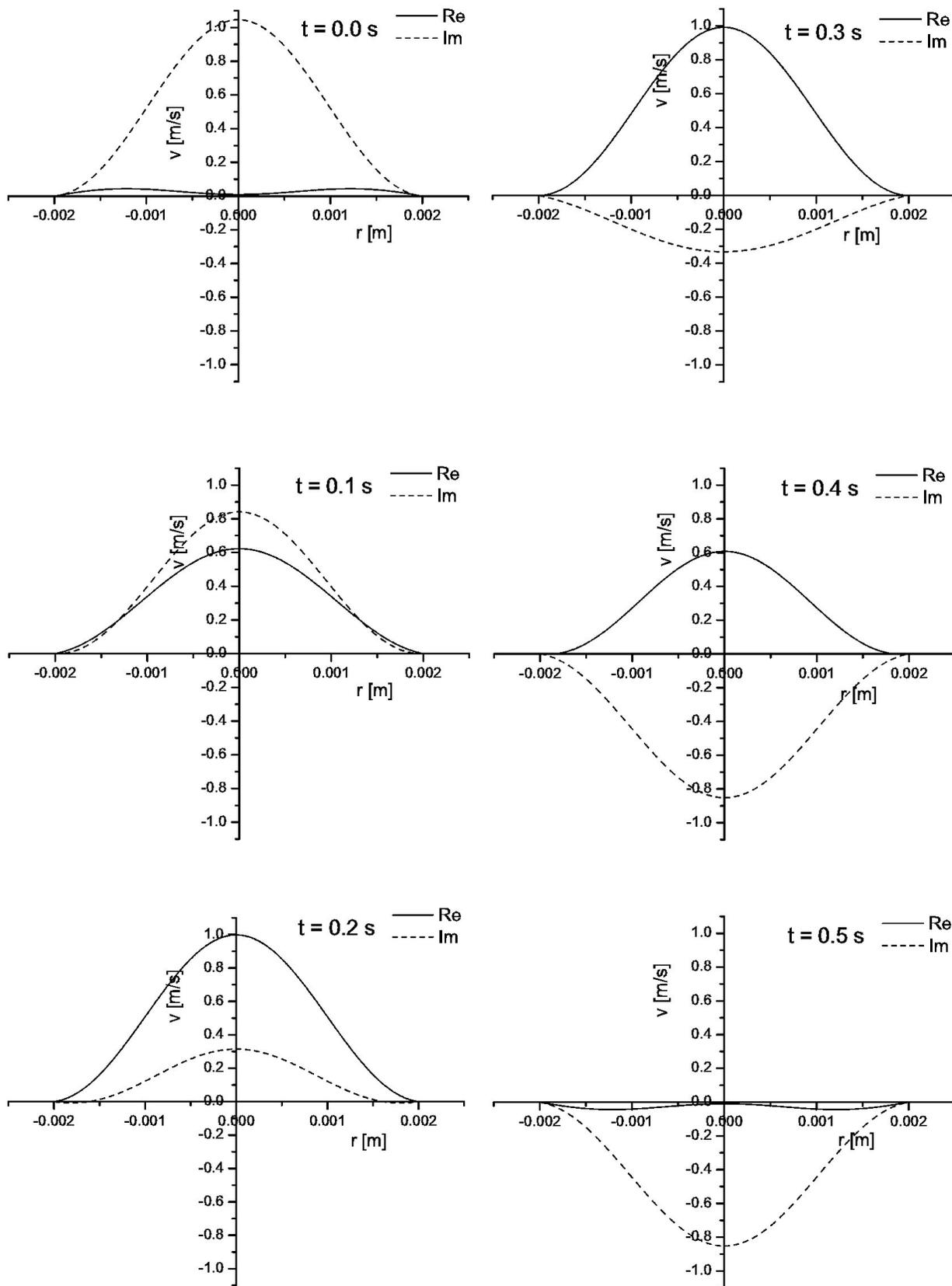


FIGURA 8. Perfil de velocidades del flujo sinoidal oscilatorio.

Como estamos interesados en analizar el comportamiento del flujo medio con este tipo de pulsaciones, entonces, siguiendo los pasos de la sección anterior y sustituyendo en la Ec.(26) tenemos el flujo en el dominio de las frecuencias.

$$Q(\omega) = \frac{p_0 K(\omega)}{\sqrt{2\pi\eta l}} e^{-\omega^2/4} \left[ 1 + \sum_{j=0}^5 e^{iT\pi j\omega} \right]. \quad (46)$$

Observamos que el gasto medio depende de la permeabilidad dinámica. Sólo para recordar veamos esta respuesta en la Fig. 10, en donde mostramos los resultados para un fluido con  $\alpha = 4.71$ ,  $l = 1\text{m}$  y  $p_0 = 1\text{Pa}$ .

Se observa que en este caso particular, la permeabilidad dinámica y la presión pulsante, tienen máximos apreciables en  $\omega = 2\text{ rad/s}$ , (Figs. 9 y 10). Para saber si ambos sistemas se acoplan para generar una respuesta similar en el flujo medio, apreciemos el comportamiento de la Ec. (46) (Fig. 11).

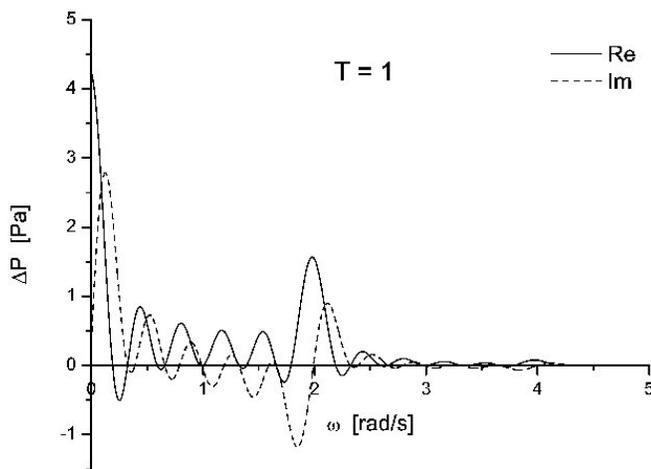


FIGURA 9. Presión en el espacio de frecuencias para un tren de pulsos Gaussiano.

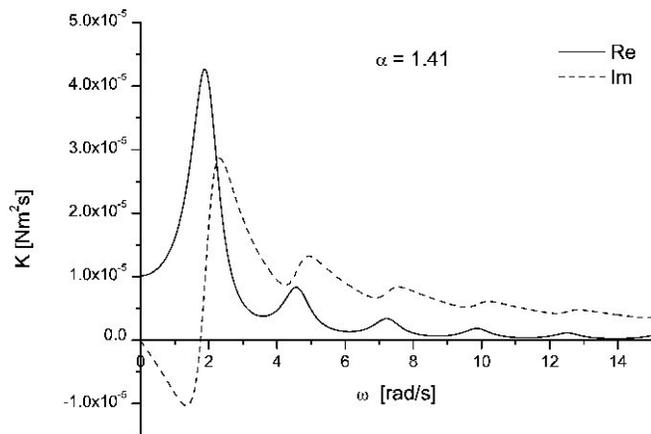


FIGURA 10. Permeabilidad dinámica para un tren de pulsos.

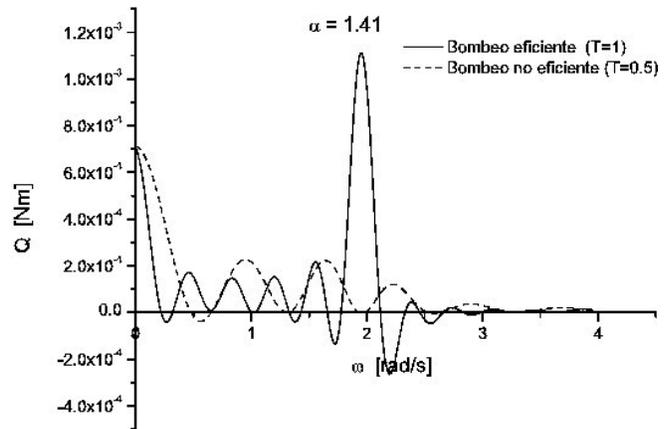


FIGURA 11. Gasto en términos de la frecuencia.

Finalmente, comparemos el flujo sometido a pulsaciones con  $T = 1$  y  $T = 0.5$  (con este periodo se generan pulsos con  $\omega = 1\text{ rad/seg}$ ) (Fig. 11). Apreciamos que existe un aumento considerable en el flujo medio, en el caso de bombeo eficiente la amplitud es seis veces mayor que en el no eficiente.

### 8. Conclusiones

En este trabajo hemos presentado una expresión para determinar las resonancias de la permeabilidad dinámica de fluidos viscoelásticos.

Los resultados teóricos y la evidencia cualitativa de la explicación de la frecuencia cardiaca humana, así como la obtención de la frecuencia óptima de bombeo para la sangre a través de las arterias, es razón para motivar la búsqueda de otras aplicaciones en campos de la física aplicada o la ingeniería. Presentamos el problema del bombeo viscoelástico, y aunque no es posible obtener un modelo analítico en el espacio real, podemos ver que el gasto medio tiene un incremento considerable cuando la frecuencia de bombeo corresponde a la resonancia de la permeabilidad. También presentamos el caso más sencillo de presión sinusoidal en el que el problema es completamente analítico en el espacio real, esto puede dar pauta a los experimentales para realizar sus mediciones y comprobar este modelo.

Para aplicaciones concretas a problemas de extracción de petróleo se requiere analizar el problema multifásico, donde el medio poroso no esté saturado, este problema ha sido recientemente abordado encontrándose resultados similares a los aquí presentados [27].

### Agradecimientos

Trabajo parcialmente apoyado por Proyecto DGAPA IN101100 y por CONACYT 38538 .

1. S. Whitaker, *Introduction to Fluid Mechanics*, (Pergamonn, N. Y., 1976).
2. L.S. García-Colín, y R.F. Rodríguez, *Fluidos Exóticos*, (Trillas, 1991).
3. Para ver una deducción termodinámica de esta ecuación se pueden consultar J.A. del Río, y M. López de Haro, *J. Non-Equilib. Thermodyn.* (1990) y F. Vázquez, y J.A. del Río, *Rev. Mex. Fís.* (1990).
4. J.P. Boon, *Molecular Hydrodynamics*, (Dover, N. Y., 1980).
5. O. Manero, y K. Walters, *Rheol. Acta* **19** (1980) 277.
6. A.E. Scheidegger, *J. Appli. Phys.* **25** (1954) 8.
7. J.A. Ochoa, *Rev. Mex. Fís.* **41** (1995) 3.
8. J.A. Ochoa, J.A. del Río, and S. Whitaker, *Chem. Eng. Sci.* **48** (1993).
9. E. Braun, *Un movimiento en ZigZag* (FCE, México, 1986).
10. A.B. Moslov y O.Y. Dinariev, *Sov. Phys. Tech. Phys.* **32** (1987).
11. R. Jullien, *Contem. Phys.* **28** (1987).
12. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, (W.H. Freeman and Company, 1977).
13. S. Whitaker, *Annual Reviews in Heat Transport* (1997).
14. M. Quintard and S. Whitaker, *International Journal of Heat & Mass Transfer* **38** (1995) 15.
15. S. Whitaker, *Method of Volume Averaging*. (Kluwer, Netherlands, 1999).
16. J.A. del Río, M. López de Haro, y S. Whitaker, *Phy. Rev. E* **58** (1998) 6323; **64** (2001) 5 039901.
17. I.G. Currie, *Fundamental Mechanics of Fluids*, (McGraw-Hill Press, 1974).
18. S. Whitaker, *Transport in Porous Media* **1** (1986) 3.
19. G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists* (Academic Press, 1970).
20. M. López de Haro, J.A. del Río y S. Whitaker, *Transp. Porous Media* **25** (1996) 167.
21. S. Cuevas y J. A. del Río, *Physical Review E*, **64** (2001) 016313.
22. M.Y. Zhou and P. Sheng, *Physical Review B* **39** 027 (1989) 12.
23. M. Nimomiya, F. Fujii, M. Niwa, K. Sakamoto, and H. Kanai, *Biorheology* **25** (1988) 319.
24. G.B. Thurston, *Biotheology* **13** (1976) 191.
25. H. Käβer, H. Kroemer, G. Altröck, and P. Heimburg, *Biorheology* **25** (1988) 727.
26. J.F. Berret, J. Apell, y G. Porte, *Langmuir* **9** (1993).
27. E. Corvera-Poiré, y J.A. del Río, <http://arxiv.org/abs/physics/0208078>.