

# Principio de invariancia de norma y rompimiento espontáneo de simetría en una partícula clásica

J. Mahecha G.

*Instituto de Física, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia*  
*e-mail: mahecha@fisica.udea.edu.co*

L.A. Sánchez D.

*Escuela de Física, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín*  
*e-mail: lasanche@perseus.unalmed.edu.co*

Recibido el 10 de enero de 2001; aceptado el 26 de marzo de 2003

Debido a que sólo los campos de materia tienen fase, con frecuencia se piensa que el principio de invariancia de norma puede inducir campos de norma solamente en sistemas cuánticos; pero esto no es necesario. En este artículo, de carácter pedagógico, se presenta un sistema clásico, constituido por una partícula en un potencial, que luego se usa como modelo para ilustrar el principio de invariancia de norma y el rompimiento espontáneo de simetría. Estos conceptos aparecen en el estudio de las transiciones de fase de segunda clase. Entre los fenómenos que presentan estas transiciones están: la ferroelectricidad, el ferromagnetismo, la superconductividad, los plasmones en un gas de electrones libres y la descripción de la masa de los bosones vectoriales en las teorías de campos de norma de Yang-Mills.

*Descriptores:* Invariancia de norma, rompimiento de simetría, mecánica clásica.

Due to the fact that only matter fields have phase, frequently is believed that the gauge principle can induce gauge fields only in quantum systems. But this is not necessary. This paper, of pedagogical scope, presents a classical system constituted by a particle in a classical potential, which is used as a model to illustrate the gauge principle and the spontaneous symmetry breaking. Those concepts appear in the study of second order phase transitions. Ferroelectricity, ferromagnetism, superconductivity, plasmons in a free electron gas, and the mass of vector bosons in the gauge field Yang-Mills theories, are some of the phenomena in which these transitions occur.

*Keywords:* Gauge invariance, symmetry breaking, classical mechanics.

PACS: 11.15.Ex; 11.30.-j; 45.20.Jj

## 1. Introducción

El principio de invariancia de norma, de acuerdo al cual cada una de las interacciones fundamentales entre fermiones elementales es mediada por el intercambio de los bosones de norma del grupo de simetría correspondiente, está en la base de las teorías modernas de partículas elementales [1, 2]. Su importancia es tal que cualquier modelo que pretenda hacer una descripción realista (renormalizable) de las interacciones fundamentales, debe primero asegurar que se cancelan todas las posibles anomalías que pueden poner en peligro su validez [3].

El grupo de simetría de una interacción fundamental puede ser abeliano, como en el caso del grupo  $U(1)_Q$  de transformaciones de fase de la electrodinámica; o puede contener factores no abelianos como en el caso del grupo  $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  del modelo de Wienberg-Salam que describe las interacciones fuertes ( $SU(3)_c$ ) y electrodébiles ( $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ ). Teorías basadas en grupos no abelianos de transformaciones de norma locales son llamadas teorías de Yang-Mills [4]. Si los parámetros asociados a un grupo de transformaciones de simetría son independientes de la localización espacio-temporal, la simetría es global; en caso contrario, es local. La simetría, a su vez, puede ser exacta como la descrita por el grupo  $SU(3)_c$  del color, caso en el cual los bosones de norma correspondientes son no masivos; o puede estar espontáneamente rota (oculta) debido a

que campos escalares, llamados campos de Higgs, adquieren valores esperados en el vacío distintos de cero que hacen que el estado vacío de la subyacente teoría cuántica de campos no sea invariante de norma aunque sí lo sea el lagrangiano. El teorema de Goldstone [5] asegura entonces la aparición de campos escalares sin masa asociados a grados de libertad no físicos que serán absorbidos por los bosones de norma del grupo de simetría rota, los cuales, como consecuencia, adquieren masa. Este fenómeno es el llamado mecanismo de Higgs [6]. En las Refs. [7] se presentan los detalles de la teoría general de las transformaciones de norma.

El presente trabajo tiene como finalidad ilustrar estas ideas con un sistema clásico muy simple en el cual se presenta invariancia bajo transformaciones de norma abelianas.

Sea una esfera de masa  $m$  que puede oscilar a lo largo del eje  $y$ , sujeta a un par de resortes. Su energía potencial es  $U(y) = -Cy^2 + By^4$ . Adicionalmente se la somete a una fuerza oscilante de la forma  $f_0 \cos \gamma t$ , donde  $\gamma$  es mucho mayor que la frecuencia de las oscilaciones libres. La oscilación forzada tiene una amplitud  $y_0$ . Al hallar la frecuencia de pequeñas oscilaciones (lineales) en función del parámetro  $T = y_0^2$ , se encuentra que hay un valor  $T_C$  en el cual esta frecuencia varía de manera discontinua [8].

Luego el modelo se modifica de la siguiente manera: Se toma una partícula cargada en un potencial  $U(\rho)$  similar a  $U(y)$ , con simetría cilíndrica, y también sometida al efecto

de la fuerza oscilante de alta frecuencia, cuando  $T < T_C$ , y además se coloca un campo magnético uniforme. Finalmente se analizan los efectos relacionados con la elección de la norma del potencial del campo electromagnético.

En este artículo se argumenta la presencia del “mecanismo de Higgs”, uno de los principales ingredientes del modelo estándar, en el sistema clásico descrito. Este trabajo tiene relación con otros aparecidos recientemente en la literatura. Se ha observado el rompimiento espontáneo de simetría en mecánica clásica de partículas descrita por medio de una función de distribución [9], igualmente en la simple colocación de un bloque rectangular sobre una cuña formada por dos superficies [10]. El problema de la invariancia de norma y su relación con las variables canónicas ha sido también estudiado [11]. T. Dittrich *et al.* [12] han estudiado efectos debidos a la adición de un término oscilante sobre el movimiento de partículas en un potencial del tipo “diente de sierra”.

### 2. Modelo mecánico

Se asume que  $m$  y  $k$  son tales que se puede ignorar el efecto del peso de  $m$ , y que  $l_0 > l$  ( $l_0 = l + d$ ) (véase la Fig. 1). La fuerza neta vertical sobre la esfera es [13]

$$F = -2k(s - l_0) \sin \theta = -2k(s - l - d) \sin \theta. \quad (1)$$

Se reemplaza  $s = (l^2 + y^2)^{1/2}$  y  $\sin \theta = y/(l^2 + y^2)^{1/2}$ , con lo cual

$$F = \frac{2kd}{l}y - k\frac{d+l}{l^3}y^3. \quad (2)$$

Se ve que cuando  $d = 0$  el resorte es intrínsecamente no lineal.

La energía potencial está dada por

$$\begin{aligned} U(y) &= -k\frac{l_0 - l}{l}y^2 + k\frac{l_0}{4l^3}y^4 \\ &= -Cy^2 + By^4. \end{aligned} \quad (3)$$

$C$  y  $B$  son positivas. Podríamos pensar que al orden más bajo,  $U(y) = -Cy^2$  representa un “oscilador armónico” con masa de signo erróneo.

Si  $x_e$  es una posición de equilibrio de  $U$ , se tiene para  $y \approx x_e$ ,

$$\begin{aligned} U(y) &\approx U(x_e) + \frac{1}{2}U''(x_e)(y - x_e)^2, \\ -\frac{dU(y)}{dy} &\approx -U''(x_e)(y - x_e). \end{aligned} \quad (4)$$

De

$$\begin{aligned} U' &= -2Cy + 4By^3 = y(-2C + 4By^2) \\ \text{y } U'' &= -2C + 12By^2 \end{aligned}$$

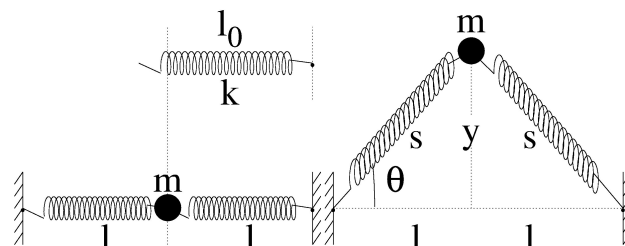


FIGURA 1. Sistema no lineal formado por una masa y dos resortes.

se sigue que las posiciones de equilibrio posibles son

$$x_0 = 0 \quad \text{y} \quad x_{\pm} = \pm \left(\frac{C}{2B}\right)^{1/2}, \quad (5)$$

en las cuales la segunda derivada vale  $U''(x_0) = -2C < 0$ , con lo cual  $x_0$  es inestable, y  $U''(x_{\pm}) = 4C > 0$ , con lo cual  $x_-$  y  $x_+$  son estables.

Por lo tanto, para movimientos cercanos a  $y = x_0$  y  $y = x_{\pm}$  se tiene

$$-\frac{dU(y)}{dy} \approx +2Cy, \quad -\frac{dU(y)}{dy} \approx -4C(y - x_{\pm}), \quad (6)$$

respectivamente. El alejamiento indefinido de  $x_0$  es caracterizado por  $\lambda = (2C/m)^{1/2}$  y las pequeñas oscilaciones alrededor de  $x_{\pm}$  por la frecuencia  $(4C/m)^{1/2}$ .

Ahora, se somete la esfera a una fuerza

$$f(t) = f_0 \cos \gamma t, \quad (7)$$

la cual induce oscilaciones forzadas  $-y_0 \cos \gamma t$ , donde  $f_0 = m(\lambda^2 + \gamma^2)y_0$ . Nótese que  $U(y)$  no admite pequeñas oscilaciones libres alrededor de  $x_0$  y que  $y_0$  decrece monótonamente con  $\gamma$ . Esto difiere del caso en el cual la posición de equilibrio  $x_0$  es estable,  $y_0$  tiene un máximo en la frecuencia de resonancia, y hay un desfase de  $\pi$  de la oscilación forzada respecto a la fuerza externa. (véase §22 en la Ref. 14). La ecuación del movimiento es

$$m\ddot{y} = -\frac{dU(y)}{dy} + f(t). \quad (8)$$

### 3. “Transición de fase”

Se asume ahora que  $y = x + y_0 \cos \gamma t$ , donde  $x$  es la componente de bajas frecuencias del desplazamiento [14].

$$m\ddot{x} - my_0\gamma^2 \cos \gamma t = -\frac{dU(x)}{dx} + f_0 \cos \gamma t. \quad (9)$$

Promediando los dos lados de la ecuación del movimiento (9) en un período de la oscilación de alta frecuencia se obtiene

$$m\ddot{x} = -\left\langle \frac{dU(x + y_0 \cos \gamma t)}{dx} \right\rangle, \quad (10)$$

donde

$$\frac{dU}{dx} = 2C(x + y_0 \cos \gamma t) + 4B(x + y_0 \cos \gamma t)^3. \quad (11)$$

Usando  $\langle \cos \gamma t \rangle = \langle \cos^3 \gamma t \rangle = 0$  y  $\langle \cos^2 \gamma t \rangle = 1/2$  se llega a

$$m\ddot{x} = 2Cx - 4Bx^3 - 6By_0^2x = 2(C - 3By_0^2)x - 4Bx^3. \quad (12)$$

La fuerza y la energía potencial efectivas son [14]

$$F_{ef} = 2(C - 3By_0^2)x - 4Bx^3$$

$$U_{ef} = -(C - 3By_0^2)x^2 + Bx^4 = Ax^2 + Bx^4, \quad (13)$$

donde  $A$  puede ser positiva o negativa al cambiar  $y_0$ . Además  $U_{ef} = U$  para  $y_0 = 0$ .

Si se definen las cantidades positivas  $T = y_0^2$  y  $T_C = C/(3B)$ ,

$$U_{ef} = -3B(T_C - T)x^2 + Bx^4. \quad (14)$$

$U_{ef}$  tiene la misma forma de  $U$  con un diferente coeficiente de  $x^2$ . La Fig. 2 sirve para representar a  $U_{ef}$  para  $T < T_C$ . En el modelo de la Fig. 1, el sistema dinámico obtenido de  $U$  puede sufrir una *bifurcación* que da lugar a la aparición de dos puntos de equilibrio estables cuando el origen se desestabiliza, cuando se varía el parámetro  $d$ . Pero acabamos de encontrar otra forma de realizar lo mismo, variando  $T$  o sea la amplitud de la fuerza aplicada de frecuencia muy alta.

Cuando  $T < T_C$  las posiciones de equilibrio  $x_{\pm}$  son estables y  $x_0$  es inestable, pero cuando  $T > T_C$  solo existe una posición de equilibrio,  $x_0$ , la cual es estable (Fig. 3).

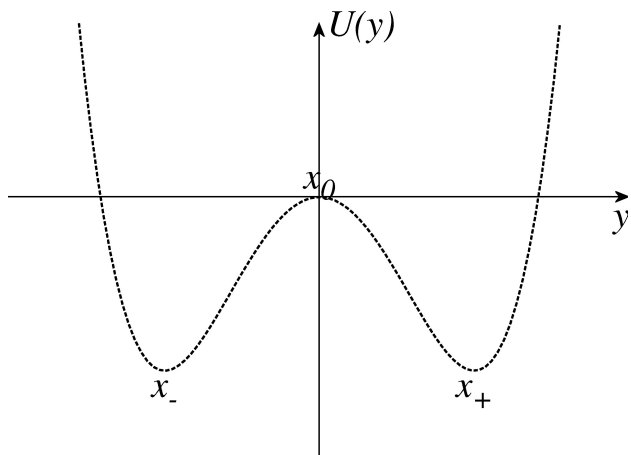


FIGURA 2. Dibujo de la energía potencial  $U$  como función de  $y$ . Como  $x_- = -x_+$ ,  $U$  tiene la simetría  $y \rightarrow -y$ , pero la oscilación estable no posee esta simetría.

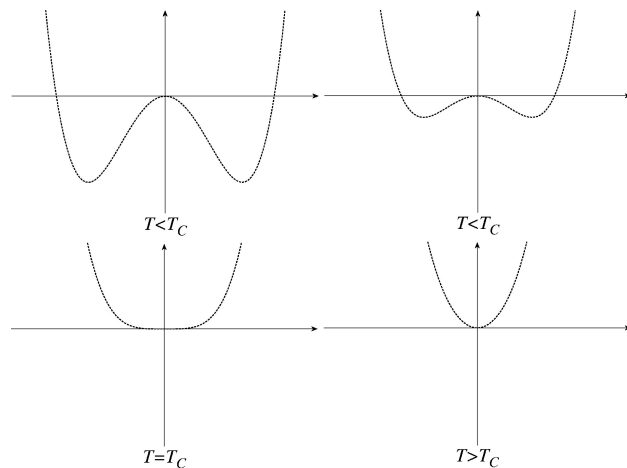


FIGURA 3. Deformación de  $U_{ef}$  cuando  $T$  aumenta continuamente desde valores  $T < T_C$  hasta  $T > T_C$ . En  $T = T_C$  el oscilador es intrínsecamente no lineal.

Si  $T < T_C$  la frecuencia de pequeñas oscilaciones alrededor de  $x_{\pm}$  es

$$\omega' = \left( -2\frac{A}{m} \right)^{1/2} = (6B)^{1/2}(T_C - T)^{1/2}, \quad (15)$$

y cuando  $T > T_C$  la frecuencia de pequeñas oscilaciones alrededor de  $x_0$  es

$$\omega' = \left( 2\frac{A}{m} \right)^{1/2} = (6B)^{1/2}(T - T_C)^{1/2}. \quad (16)$$

La derivada de la frecuencia  $\omega'$  respecto a  $T$  tiene un salto en  $T = T_C$ . (Fig. 4). La segunda derivada de  $U_{ef}(x)$  en  $x=0$ , dada por  $U''_{ef}(x) = -6B(T_C - T)$ , cambia de signo cuando  $T = T_C$ .

La aparición de  $U_{ef}$  se interpreta diciendo que la fuerza externa de alta frecuencia hace oscilar el valor del potencial original  $U$ , pero el valor medio de dicha oscilación puede cambiar la estabilidad de la posición de equilibrio de  $U$  [12].

Cuando  $T$ , o sea  $y_0$ , es grande, la masa  $m$  oscila alrededor de la posición de equilibrio  $x_0$ . En este caso el movimiento

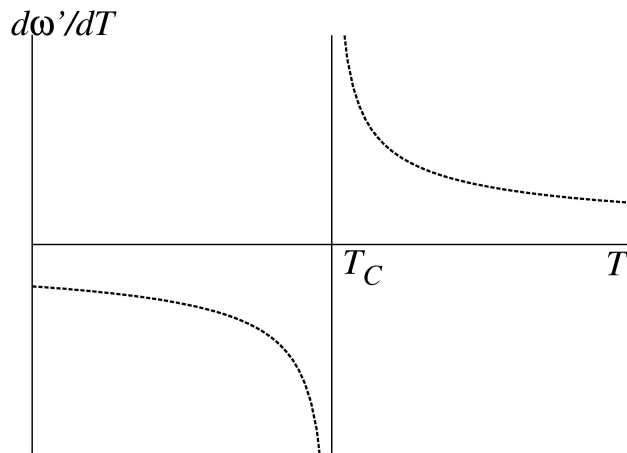


FIGURA 4. Discontinuidad de la derivada de la frecuencia en  $T = T_C$ .

mantiene la simetría con relación a la sustitución  $x \rightarrow -x$ . Cuando  $T$  baja hasta un valor  $T < T_C$ , la esfera oscilará alrededor de una de las dos posiciones de equilibrio  $x_{\pm}$ , en este caso el movimiento pierde la mencionada simetría.

El comportamiento de las frecuencias de oscilación como funciones de  $T$  es matemáticamente análogo a las transiciones de fase de segunda clase que se estudian en física estadística [15]. Todos los sistemas que presentan transiciones de fase poseen coordenadas macroscópicas, como la resistividad, el calor específico o la magnetización de una sustancia, las cuales son análogas de la coordenada lenta  $x$  de este problema. Las oscilaciones forzadas rápidas constituyen el análogo del fenómeno de transporte de calor y  $T = y_0^2$  es análogo de la temperatura.  $T_C$  es el análogo de la temperatura en la cual ocurre la transición de fase. En los alrededores de  $T = T_C$  la magnitud correspondiente a  $x_{\pm}$  (la resistividad por ejemplo) es pequeña,  $x_{\pm} \propto (T_C - T)^{1/2}$  así como también lo es la frecuencia de las oscilaciones propias. En rigor, en el modelo mecánico considerado se tiene una *bifurcación* que se comporta de manera análoga a una *transición de fase*.

Este sistema pertenece a la clase de universalidad de los sistemas que presentan transiciones de fase de segunda clase, según la denominación de Landau [15]. Allí se define  $\epsilon = (T - T_C)/T_C$ , el cual en este caso es una función de  $y_0$ ,  $l$  y  $d$ .  $x_{\pm}$  es el “parámetro de orden” que depende de  $\epsilon$  como

$$x_{\pm} = \pm \left( \frac{3T_C}{2} \right)^{1/2} \epsilon^{1/2}, \quad (17)$$

con esto el exponente del parámetro de orden es  $\beta = 1/2$ . Por otra parte la fuerza en  $T = T_C$  vale  $F_{ef}(T_C) = -4Bx^3$ , con lo cual el “exponente crítico” está dado por  $\delta = 3$ . Igualmente se pueden encontrar otros parámetros análogos a los que aparecen en transiciones de fase.

En esta clase de transiciones ocurre un cambio de simetría al variar de manera continua un parámetro. Usualmente la “fase” que se presenta para  $T > T_C$  tiene mayor simetría que la de  $T < T_C$ . Entre los fenómenos de transición de fase de segunda clase están: La ferroelectricidad de las perovskitas [15], el ferromagnetismo [15], la superconductividad [18], las oscilaciones en plasmas [6], y el mecanismo por el cual los bosones en las teorías de campos de norma de Yang-Mills adquieren masa [6], entre otros. También las oscilaciones transversas de una partícula cargada en un campo magnético no homogéneo constituyen un modelo mecánico de estas transiciones, véase el problema 10.8 en la referencia [8].

#### 4. El principio de invariancia de norma

Queremos ahora hacer compatible el comportamiento descrito con las propiedades del campo electromagnético bajo transformaciones de norma.

#### Ecuaciones de Maxwell

El campo electromagnético está descrito por las ecuaciones de Maxwell, las cuales en el sistema internacional de unidades toman la forma,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \\ \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}. \end{aligned} \quad (18)$$

#### Potenciales electromagnéticos

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (19)$$

#### Transformaciones de norma

$$\begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} - \vec{\nabla} \chi, \quad \phi' = \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t}. \end{aligned} \quad (20)$$

$(\vec{A}, \phi)$  y  $(\vec{A}', \phi')$  dan lugar a los mismos campos  $(\vec{E}, \vec{B})$ .

#### Transformaciones canónicas

Si se tiene un sistema mecánico cuyo hamiltoniano no depende del tiempo y una transformación canónica  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ , se cumple

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}, \quad H'(Q, P) = H(q, p), \quad (21)$$

donde  $F(q, Q)$  es la función generatriz de la transformación.

El lagrangiano está relacionado con el hamiltoniano por

$$L = \sum_i p_i \dot{q}_i - H. \quad (22)$$

En consecuencia, al realizar la transformación se obtiene un nuevo lagrangiano que está relacionado con el primero de la siguiente manera:

$$L(q, \dot{q}) = L'(Q, \dot{Q}) + \frac{dF}{dt}, \quad (23)$$

lo cual dice que en una transformación canónica el lagrangiano se afecta adicionando la derivada total respecto al tiempo de la función generatriz de la transformación, que como se sabe no cambia la dinámica del problema. Una transformación puntual es también canónica.

#### Notación 4-dimensional

Definimos  $x_4 = ict$  y el tensor métrico  $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ . Entonces la corriente es  $\vec{j}_{\mu} = (\vec{j}, ic\rho)$ , la cual cumple la ecuación de continuidad  $\partial^{\mu} j_{\mu} = 0$ .  $\rho$  es la densidad de carga. El potencial vectorial es  $A_{\mu} = (\vec{A}, i\phi/c)$ . El tensor de campo electromagnético es [16]

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}}. \quad (24)$$

Las ecuaciones de Maxwell expresadas en términos de los campos toman la forma

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = \mu_0 j_\mu, \quad (25)$$

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0.$$

Las ecuaciones de Maxwell expresadas en términos de los potenciales toman la forma

$$\square A_\nu - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu = \mu_0 j_\nu, \quad (26)$$

y la otra ecuación se satisface automáticamente por la expresión de los campos en términos de los potenciales.

Se pueden elegir convenientemente los potenciales. Usualmente se usa la invariancia de norma para restringir la clase de potenciales a usarse, por ejemplo la clase de los que satisfacen la condición de Lorentz

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (27)$$

Un paso adicional, la elección de la norma de Coulomb, escoge unívocamente el potencial dentro de los de dicha clase,

$$A_4 = 0, \quad \nabla \cdot \vec{A} = 0. \quad (28)$$

### La partícula cargada en un campo EM

El lagrangiano (no relativista),

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - q\phi + q\vec{v} \cdot \vec{A}. \quad (29)$$

Ecuación de Lagrange,

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (30)$$

Momento canónico,

$$\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A}. \quad (31)$$

Hamiltoniano,

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\phi. \quad (32)$$

El lagrangiano en un sistema de referencia que rota con velocidad angular definida por  $m\vec{\omega} \times \vec{r} = -q\vec{A}$ , al aplicar la transformación  $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}$  es,

$$L_r = \frac{1}{2} m \vec{v}_r^2 - \frac{q^2}{2m} \vec{A}^2 - q\phi. \quad (33)$$

Cuando  $\vec{B}$  es homogéneo se tiene  $\vec{A} = -\vec{r} \times \vec{B}/2$  y por tanto  $\vec{\omega} = -q\vec{B}/(2m)$ , la frecuencia de Larmor. En este caso,

$$L_r = \frac{1}{2} m \vec{v}_r^2 - \frac{q^2}{8m} \vec{B}^2 (x^2 + y^2) - q\phi. \quad (34)$$

### Acción e invariancia bajo transformaciones de norma

Si los potenciales que aparecen en el lagrangiano de la Ec. (29) se someten a una transformación de norma, éste es reemplazado por

$$\begin{aligned} L' &= \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - q\left(\phi + \frac{\partial\chi}{\partial t}\right) + q\vec{v} \cdot (\vec{A} - \nabla\chi) \\ &= \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - q\phi + q\vec{v} \cdot \vec{A} - q \frac{d\chi}{dt}. \end{aligned} \quad (35)$$

La acción de Hamilton es

$$S = \int_0^t L dt. \quad (36)$$

Si la función arbitraria  $\chi$  se escoge tal que  $\chi = 0$  en  $t = 0$ , entonces la acción de Hamilton se transforma en

$$S' = S - q\chi. \quad (37)$$

Por propiedades de la acción de Hamilton se tiene que la dinámica de la partícula es independiente de la elección de la norma.

Si la función de onda semiclásica es [17]

$$\Psi = a e^{iS/\hbar}, \quad (38)$$

se obtiene que un cambio de norma produce un cambio en la fase, así,

$$\Psi' = \Psi e^{-iq\chi/\hbar}. \quad (39)$$

Una transformación de norma en los potenciales electromagnéticos no tiene consecuencias observables en mecánica clásica porque sólo da lugar a la adición a la lagrangiana de la derivada total respecto al tiempo de una función arbitraria de las coordenadas espacio-temporales. Esto está asociado a un cambio de fase de la función de onda, que en mecánica cuántica tampoco tiene efectos observables. El argumento puede invertirse: La adición de la derivada total de una función arbitraria implica la presencia de un campo vectorial  $A_\mu$  que experimenta una transformación de norma. Esta es la forma clásica del principio de invariancia de norma. En mecánica cuántica se tiene que el tipo de interacción está determinado por los cambios de fase de la función de onda.

Si se realiza una transformación canónica de las variables mecánicas del sistema, de acuerdo a la Ec. (23) se adiciona la derivada total respecto al tiempo de la función generatriz. En consecuencia, al combinar los dos efectos se puede decir que el lagrangiano quedará invariante (e igualmente la fase de la función de onda semiclásica) si se realiza una transformación de norma tal que

$$q\chi = F. \quad (40)$$

Como  $F$  es función de las coordenadas, se tiene que cada transformación canónica puede compensarse con una transformación de norma *local*. Si esto es así, el lagrangiano queda

invariante y se tiene que esa combinación de transformaciones representa una *simetría del lagrangiano*.

En conclusión, exigir invariancia de norma bajo transformaciones canónicas infinitesimales (las cuales son locales en el espacio de fases) requiere la introducción de una interacción con el campo electromagnético. La invariancia de norma local genera dinámica.

### 5. Simetría oculta

Sea el problema de la partícula cargada que se mueve con la energía potencial  $U(\vec{\rho}) = -C\rho^2 + B\rho^4$ . Puede considerarse como una generalización del sistema de la Fig. 1. Suponemos que este  $U$  no es de naturaleza electromagnética. En nuestro análisis tampoco son de naturaleza electromagnética las oscilaciones de frecuencia rápida que determinan el tipo de estabilidad del punto con  $\rho = 0$ .  $U(\vec{\rho})$  es una superficie con la forma de un sombrero mexicano. Sólo se consideran movimientos en el plano  $x - y$ .  $U(\rho)$  no depende del ángulo  $\phi_e$  que hace  $\rho$  con el eje  $x$ ,  $H$  tiene la simetría de rotación alrededor del eje  $z$  por un ángulo arbitrario.

Como se vio, el estado de equilibrio estable se alcanza no en  $\rho = 0$ , donde  $U = 0$ , sino sobre un círculo de radio  $\rho_e = \sqrt{C/(2B)}$ , donde  $U$  es negativo. Es claro que cualquier punto del círculo es una posible posición de equilibrio. Todos esos puntos son igualmente estables y aceptables como “el” estado base, difieren sólo por la “fase”  $\phi_e$ . Esos “estados base” que difieren sólo por  $\phi_e$  son equivalentes, ahí reside la simetría. El “rompimiento espontáneo de la simetría” ocurre cuando se escoge un valor particular de  $\phi_e$ . Así, si se toma  $\phi_e = 0$  se tiene  $\vec{\rho}_e = \sqrt{C/(2B)}\hat{i}$ .

Es evidente de la Ec. (40) que al tomar el equilibrio en

$$\vec{\rho}_e = \left(\frac{C}{2B}\right)^{1/2} (\hat{i} \cos \phi_e + \hat{j} \sin \phi_e), \quad (41)$$

con  $\phi_e$  arbitrario, se produce un cambio en el lagrangiano que puede compensarse con una transformación de norma sobre  $A_\mu$ , y por lo tanto dicha elección es una simetría del lagrangiano.

Por efecto de un campo magnético  $\vec{B}$  se induce un momento magnético  $\vec{\mu}$  que a su vez interactúa con el campo para dar la energía adicional  $E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ , cuyo valor es

$$\frac{q^2}{8m} \vec{B}^2 (x^2 + y^2), \quad (42)$$

que coincide con el término dependiente de  $B$  en la Ec. (34).

Como consecuencia del diamagnetismo, el campo magnético que experimenta la carga no coincide con  $\vec{B}$ , sino que es menor debido al campo de dirección opuesta que se crea de acuerdo a la ley de Lenz, “el campo diamagnético interno”. El momento magnético es proporcional a la corriente y esta a la densidad de carga.

El diamagnetismo está asociado a las llamadas corrientes de apantallamiento diamagnético, las cuales a su vez dan lugar a la aparición de un “término de masa” en la ecuación de

onda para el fotón.  $\vec{j}_{scr}$  es proporcional al potencial vectorial,

$$\vec{j}_{scr} = -\frac{q\rho}{m}(\vec{A} - \vec{\nabla}\phi), \quad (43)$$

donde  $\rho$  es la densidad de carga, en este caso dada por una  $\delta$  de Dirac por tenerse una partícula puntual. Puede generalizarse par incluir objetos no puntuales como cuerdas o membranas. Esta ecuación (sin el término de la norma) es análoga a la de London de la superconductividad.

La ecuación de Maxwell (26) para  $A_\nu$ , luego de imponer la condición de Lorentz, y de utilizar una norma dependiente de  $\phi_e = -\tan^{-1}(y/x)$ , toma la forma

$$(\square + M^2)A_\nu = 0, \quad (44)$$

donde  $M^2 = q\rho/m$ . Es la ecuación de Proca. (Compárese con el resultado de la Ref. 9). La Ec. (44) representa el campo de una partícula libre vectorial de masa  $M$ . El sistema original tiene cuatro grados de libertad, dos modos de oscilación de la partícula y dos estados de polarización del campo. El rompimiento espontáneo de simetría y la elección apropiada de la norma han dado lugar a un sistema equivalente en el cual la partícula tiene sólo un modo de oscilación pero el campo tiene tres estados de polarización. A este resultado se llega fácilmente, en estrecha analogía con el campo bosónico cargado interactuante con el campo EM, a partir de la densidad lagrangiana del sistema formado por el campo y la partícula [19]. (También es relevante para el presente modelo una discusión análoga a la de la Ref. 20 acerca del término de masa).

### 6. Conclusión

Se analizó un sistema constituido por una partícula en un potencial  $U(\rho)$ . Se encontró que se presentan tres fenómenos relacionados: La existencia de una “transición de fase”, más precisamente de una bifurcación, que se puede atribuir a un campo rápidamente oscilante, en la cual el origen de coordenadas cambia su tipo de estabilidad. A su vez, cuando el origen se desestabiliza aparece un conjunto de nuevas posiciones estables equivalentes relacionadas entre si por el grupo  $U(1)$ . Una posición de equilibrio cualquiera se puede mapear en la localizada sobre el eje  $x$  al escoger la norma del potencial vectorial correspondiente al ángulo de la rotación requerida (“rompimiento de la simetría”). La escogencia de esta norma da lugar a la aparición de un “término de masa” en la ecuación de onda que determina el potencial vectorial. Esta masa depende de las corrientes diamagnéticas del sistema. A su vez las oscilaciones de la partícula cargada alrededor de la nueva posición de equilibrio representan el “campo de Higgs” y su masa es positiva. (Véase el comentario que sigue a la Ec. (3)).

Una conclusión de este ejercicio es que el sistema analizado podría tomarse como un “sistema modelo” del principio de invariancia de norma y sus efectos conexos. Una realización macroscópica del modelo puede ser difícil a causa de la pequeñez de las corrientes diamagnéticas. Fenómenos de

este tipo se podrían presentar en estados de Rydberg de un átomo hidrogenoide en un campo magnético. También cam-

pos de norma no abelianos pueden encontrarse en sistemas de espines clásicos en campos magnéticos.

- 
1. A. Salam y J.C. Ward, *Nuovo Cim.* **19** (1961) 165.
  2. S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1264; A. Salam, en *Elementary Particle Theory*, ed: N. Svartholm (Almqvist and Forlag, Stockholm, 1968); S.L. Glashow, *Nucl. Phys.* **22** (1961) 579; J. Leite Lopez, *Nucl. Phys.* **8** (1958) 234.
  3. J.C. Ward, *Phys. Rev.* **78** (1950) 1824; Y. Takahashi, *Nuovo Cim.* **6** (1957) 370.
  4. C.N. Yang y R. Mills, *Phys. Rev.* **96** (1954) 191.
  5. J. Goldstone, *Nuovo Cim.* **19** (1961) 154; Y. Nambu, *Phys. Rev. Lett.* **4** (1962) 380.
  6. P.W. Anderson, *Phys. Rev.* **130** (1963) 439; P.W. Higgs, *Phys. Rev. Lett.* **12** (1964) 132; P.W. Higgs, *Phys. Rev.* **145** (1966) 1156; T.W. Kibble, *Phys. Rev.* **155** (1967) 1554.
  7. K. Moriyasu, *An Elementary primer for Gauge Theory* (World Scientific, Singapore, 1983); T.P. Cheng y Ling-Fong Li, *Am J. Phys.* **56** (1988) 586.
  8. G.L. Kotkin y V.G. Serbo, *Problemas de mecánica clásica* (Mir, Moscú, 1980).
  9. N. Ogawa, "A Note on Gauge Principle and Spontaneous Symmetric Breaking in Classical Particle Mechanics", hep-th/9801115.
  10. A. Acus, "Can spontaneous symmetry breaking occurs in a potential with one minimum?" physics/0003030.
  11. I.B. Khriplovich y A.I. Milstein, "Gauge invariance and canonical variables" physics/9904003.
  12. H. Schanz, M. Otto, R. Ketzmerick y T. Dittrich, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 070601.
  13. J. B. Marion, *Classical dynamics*. Second edition (Academic Press, New York, 1970) Ch. 5.
  14. L. Landau y E. Lifshitz, *Mecánica clásica* (Reverté, Barcelona, 1980) §30.
  15. L. Landau y E. Lifshitz, *Physique statistique*. Mir, Moscou, 1967. Ch. XIV.
  16. L. Landau, E. Lifshitz, *Theorie du Champ* (Mir, Moscou, 1967) Ch. III.
  17. L. Landau y E. Lifshitz, *Mécanique quantique* (Mir, Moscou, 1980) §6.
  18. J. Bardeen, L.N. Cooper y J.R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **106** (1957) 162.
  19. F. Halzen y A.D. Martin, *Quarks & Leptons* (J. Wiley, New York, 1984) Ch. 14.
  20. I.J.R. Aitchison y A.J.G. Hey, *Gauge theories in particle physics* (I.O.P. Publishing. Bristol, 1996) Ch. 13.