

# Porqué y cómo exponenciamos matrices hamiltonianas

Kurt Bernardo Wolf

Centro de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Autónoma de México,  
Apartado Postal 48–3, Cuernavaca, Morelos 62251, México

Recibido el 21 de junio de 2002; aceptado el 18 de noviembre de 2002

Las trayectorias de puntos masa en la mecánica clásica de osciladores, y de rayos de luz en la óptica geométrica paraxial, se obtienen exponenciando matrices. Las matrices hamiltonianas representan y clasifican mediante equivalencia las dinámicas posibles de los sistemas lineales. En mecánica unidimensional y en guías de onda planas son posibles los sistemas armónico, repulsivo, o el libre; esto es bien conocido y sólo requiere de matrices de  $2 \times 2$  con 3 parámetros independientes. Aquí abordamos el problema de sistemas mecánicos en dos dimensiones, que coincide con el de las guías de onda ópticas en tres dimensiones, donde se requiere de matrices de  $4 \times 4$  con 10 parámetros. Conocida la estructura de los eigenvalores, reducimos la exponencial de una matriz hamiltoniana a una suma de sus cuatro primeras potencias, con coeficientes que calculamos analíticamente, resolvemos la degeneración presente en el plano de eigenvalores, y comentamos sobre los sistemas lineales ondulatorios a los que se aplican estos resultados. Ponemos énfasis en las referencias que han tratado los tópicos contenidos en este trabajo, las cuales se detallan en párrafos separados.

*Descriptor:* Sistemas hamiltonianos; transformaciones canónicas; álgebras y grupos simplécticos; exponenciación de matrices; órbitas de equivalencia.

The trajectories of mass points in the classical mechanics of oscillators, and light rays in geometric paraxial optics, are obtained exponentiating matrices. hamiltonian matrices represent and classify through equivalence the possible dynamics of linear systems. In one-dimensional mechanics and plane waveguides, the possible systems are harmonic, repulsive, or free; this is well known and only requires  $2 \times 2$  matrices with 3 independent parameters. Here we address the problem of mechanical systems in two dimensions, which coincides with that of waveguides in three dimensions, where  $4 \times 4$  matrices are required, with 10 parameters. Knowing the eigenvalue structure, we reduce the exponential of a hamiltonian matrix to the sum of its first four powers, with coefficients that we compute analytically, and resolve the degeneracy which is present in the eigenvalue plane. We comment on the linear wave systems where these results are applied.

*Keywords:* Hamiltonian systems; canonical transformations; symplectic groups and algebras; matrix exponentiation; equivalence orbits.

PACS: 02.10.Sp; 02.20.Sv; 03.65.Sq; 42.15.Eq; 42.30.Kr

## 1. Introducción

Existen muchas técnicas para exponenciar matrices, por lo general adecuadas a los motivos por los cuales se hace necesaria la operación. En estas páginas nos proponemos inicialmente describir trayectorias de puntos masa en mecánica de dos dimensiones o, equivalentemente, de rayos de luz en óptica geométrica de tres dimensiones, cuya dinámica sea *lineal*. Decimos que la dinámica de un sistema físico es lineal, cuando una combinación lineal de vectores que representan condiciones iniciales lleva a una trayectoria descrita por un vector que es la misma combinación lineal de las trayectorias. Tales sistemas pueden representarse por matrices hamiltonianas, y el conjunto de todas las trayectorias bajo el sistema se obtiene exponenciando estas matrices, las cuales pueden ser aplicadas a todos los vectores de condiciones iniciales.

Los sistemas lineales son mucho más generales que los dos modelos físicos en los que basamos este artículo (mecánica clásica y óptica geométrica); su propósito mediano es abstraer las propiedades de simetría dinámica con las herramientas de álgebras y grupos de Lie. Los resultados han sido aplicados por el autor a sistemas cuánticos y ondulatorios, discretos y finitos (análisis de señales y procesamiento de imágenes pixeladas). Aquí trabajaremos con sistemas de 1 y 2 dimensiones, cuya dinámica está representada por matrices de  $2 \times 2$  y de  $4 \times 4$ , y son éstas las que debemos ex-

ponenciar. Recordamos que la serie exponencial de una matriz  $\mathbf{m} = (m_{i,j})$  es, al igual que para números,

$$\begin{aligned} \exp \mathbf{m} &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M \frac{1}{n!} \mathbf{m}^n \\ &= \mathbf{1} + \mathbf{m} + \frac{1}{2} \mathbf{m}^2 + \frac{1}{6} \mathbf{m}^3 + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Cuando las matrices son de  $N \times N$ , la serie para cada uno de los elementos de matriz  $\exp \mathbf{m}$  converge por lo menos tan rápido como la serie exponencial de  $N \max\{m_{i,j}\}$ , por lo que los algoritmos numéricos convergen, aunque más lentamente.

Exponenciar matrices mediante algoritmos numéricos es un problema que ha sido ampliamente estudiado con el advenimiento de la computación (véase, por ejemplo, el libro clásico de Donald Knuth sobre el arte de la computación citado en la Ref. 1). Además del cálculo bruto de los elementos de la serie (1), un método favorito se basa en el teorema de Cayley-Hamilton (que reduce esta serie a una suma de  $N$  potencias de  $\mathbf{m}$ ), aunque éste es inestable cuando dos o más de los  $N$  eigenvalores de  $\mathbf{m}$  están degenerados, es decir, tienen el mismo valor. Bajo la Ref. 2 hay tres trabajos que consideramos representativos de las discusiones en torno a este tema, todos con el título “A method for calculating  $e^{A t}$ ”, el primero basado en el teorema de Cayley-Hamilton, y los dos segundos por autores distintos pero con el mismo título, “A

novel method for evaluating  $e^{At}$  in closed form”, que comentan sobre el primero. Como dijimos antes, nosotros estamos interesados en matrices de  $2 \times 2$  y de  $4 \times 4$ , las cuales adicionalmente son hamiltonianas, cuyas propiedades definiremos en la próxima Sección, y cuyos casos de mayor interés son precisamente aquéllas que tienen eigenvalores degenerados. Y para estos casos daremos resultados analíticos, y no meramente numéricos.

La Sec. 2 presenta los actores principales: ecuaciones de Hamilton, hamiltonianos y matrices de transformación que preservan la estructura hamiltoniana del sistema. La acción se centra en la Sec. 3, donde seguimos las trayectorias a lo largo del tiempo o del eje óptico del sistema. Probamos las armas con el caso de sistemas mecánicos unidimensionales y sistemas ópticos planos en la Sec. 4, donde el álgebra consiste en matrices de  $2 \times 2$ . En este caso es inmediato dividir la serie de Taylor de la función exponencial en dos series trigonométricas, o hiperbólicas, y arribamos predictiblemente a la tricotomía de los sistemas lineales en armónicos, repulsivos y libres.

Nos enfrentamos con las matrices de  $4 \times 4$  en las Secs. 5 y 6, donde dividimos la serie de Taylor exponencial en cuatro y damos el resultado explícito. Hemos visto, en el contexto de las aplicaciones de la transformada fraccional de Fourier producida por medios ópticos al procesamiento de señales, que la estructura del conjunto de sistemas astigmáticos no está lo suficientemente entendida. En concreto, citamos un libro reciente, destacado en la Ref. 3, que fraccionaliza la transformada de Fourier con el propósito de captar la parte más significativa de una señal unidimensional orientando una ventana en el espacio fase de acuerdo con las características del aparato de medición; aunque la técnica es aplicada a imágenes bidimensionales, dos trabajos del autor con R. Simon, referidos en [4], abordan el problema de clasificar los sistemas astigmáticos generales, el primero bajo el título de Structure of the set of paraxial optical systems, analiza los sistemas astigmáticos generales, formen o no imagen, y el segundo, Fractional Fourier transform in two dimensions, aborda la definición general de tales transformadores de Fourier para mostrar que se trata de un conjunto de 4 parámetros. La variedad de sistemas astigmáticos tiene 10 parámetros libres, la cual es cualitativamente mayor que lo que permiten los 3 parámetros del caso de  $2 \times 2$ . Además, estamos interesados en la clasificación completa de los sistemas posibles, en saber cuáles son equivalentes y cuáles no, y encontrar los sistemas más sencillos que representen cada clase de equivalencia. Para ello es necesario referirnos a las estructuras de eigenvalores de los hamiltonianos en la Sec. 7, y así poder reconocer y distinguir entre los casos degenerados, pues la clasificación por eigenvalores es necesariamente incompleta. Esta sección está basada en la Ref. 5, titulada “Hamiltonian orbit structure of the set of paraxial optical systems”, donde hemos formulado el método para clasificar los sistemas sobre un círculo y distinguir entre las degeneraciones que ocurren para algunos de sus puntos. Algunos motivos más serán expuestos en la Sec. 8 a guisa de conclusiones.

## 2. Porqué las matrices

La mecánica clásica y la óptica geométrica comparten su formulación hamiltoniana, la una en el tiempo y la otra a lo largo del eje óptico del sistema. La Ref. 6 contiene varios trabajos de G. Torres de Castillo y del autor de este trabajo, publicados en las secciones de enseñanza y de investigación de la *Revista Mexicana de Física*. Los títulos dan cuenta de los tópicos tratados: Estructuras simplécticas en la física matemática, “Orbitas y principios variacionales para sistemas hamiltonianos conservativos”, “La ecuación de Hamilton-Jacobi para sistemas hamiltonianos”, “Las tres caras de Hamilton en la óptica geométrica y en la mecánica”, “Geometry and dynamics in refracting systems”, “Lagrangian and hamiltonian formulations of geometrical anisotropic optics”, “On dynamical symmetry groups”, “Geometrical optics in the optical length geometry” y “Alternative hamiltonians in classical mechanics and geometrical optics”.

En mecánica, un punto de masa  $m$  en movimiento a tiempo  $z$ , se describe mediante su vector de posición  $\mathbf{q}(z)$  y su vector de momento  $\mathbf{p}(z) = m d\mathbf{q}(z)/dz$ ; éstas son 6 coordenadas  $(\mathbf{p}(z), \mathbf{q}(z))$  cuando el espacio ambiente tiene 3 dimensiones. De manera similar, en óptica geométrica un rayo de luz en un medio transparente e inhomogéneo, con índice de refracción  $n(\mathbf{q}, z)$  diferenciable, se describe como es indicado en la Fig. 1: por su posición  $\mathbf{q}(z)$  al atravesar un plano (“pantalla”) perpendicular al eje óptico en  $z$ , y por su vector momento en ese punto,  $\mathbf{p}(z) = n(\mathbf{q}, z) d\mathbf{q}(z)/dz$ , donde  $|d\mathbf{q}(z)/dz| = \tan \theta \approx \theta$  es la inclinación del rayo, supuesta pequeña en la aproximación paraxial (cerca del eje); en el mundo de 3 dimensiones, las pantallas tienen 2, y los rayos quedan descritos por 4 coordenadas  $(\mathbf{p}(z), \mathbf{q}(z))$ .

Trasladándonos con  $z$ , generamos trayectorias  $(\mathbf{p}(z), \mathbf{q}(z))$  que obedecen las ecuaciones de Hamilton

$$\frac{d\mathbf{q}(z)}{dz} = \frac{\partial H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, z)}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}(z)}{dz} = -\frac{\partial H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, z)}{\partial \mathbf{q}},$$

$$\frac{dH(\mathbf{p}, \mathbf{q}, z)}{dz} = \frac{\partial H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, z)}{\partial z}, \quad (2)$$

donde  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, z)$  es la función hamiltoniana —o el hamiltoniano— del sistema. (Un libro clásico que expone las construcciones lagrangiana y hamiltoniana de la mecánica está citado en la Ref. 7.) En mecánica, el hamiltoniano es la energía cinética más la potencial,

$$H_{\text{mec}} = \frac{1}{2}|\mathbf{p}|^2/m + V(\mathbf{q}, z),$$

mientras que en la aproximación paraxial de la óptica es

$$H_{\text{opt}} = -\sqrt{n^2 - |\mathbf{p}|^2} \approx \frac{1}{2}|\mathbf{p}|^2/n_o + \nu(\mathbf{q}, z),$$

donde el índice de refracción es  $n(\mathbf{q}, z) = n_o - \nu(\mathbf{q}, z)$  con  $|\nu|^2 \approx 0$ . La primera ecuación de Hamilton (2) es puramente geométrica, porque dice que la trayectoria evoluciona a lo largo de su tangente; la segunda ecuación contiene la

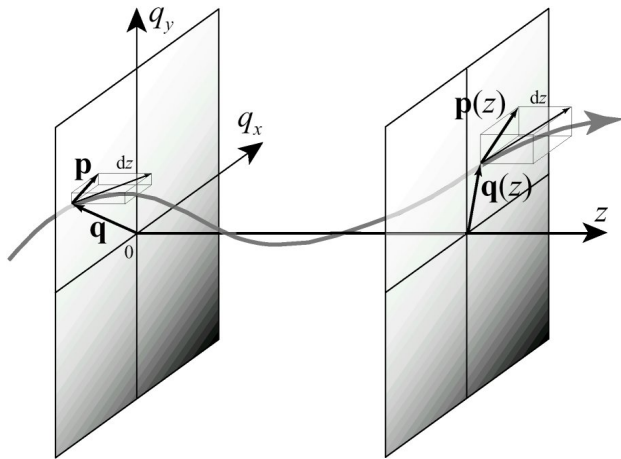


FIGURA 1. En óptica geométrica de tres dimensiones y en mecánica de dos dimensiones (plano  $x-y$ ), una trayectoria (rayo de luz) se determina por su intersección  $\mathbf{q}(z) \in \mathbb{R}^2$  con una pantalla en  $z$  (eje óptico), y por su vector momento  $\mathbf{p}(z) \in \mathbb{R}^2$  sobre la pantalla, el cual es (un factor escalar veces) la proyección de la tangente al rayo,  $(d\mathbf{q}(z)/dz, 1)$  (primera ecuación de Hamilton). En óptica, el factor es el índice de refracción local  $n(\mathbf{q}, z)$ ; en mecánica es la masa del punto. El momento cambia en respuesta al medio (segunda ecuación de Hamilton). Recorriendo  $z \in \mathbb{R}$  se genera la trayectoria en el espacio fase  $(\mathbf{p}(z), \mathbf{q}(z))$ . Para ángulos pequeños, la óptica y la mecánica se rigen por las mismas ecuaciones.

dinámica del sistema, porque especifica el cambio en la dirección de esa tangente debido a las inhomogeneidad del potencial o del índice de refracción. La tercera ecuación de Hamilton en (2) involucra el hamiltoniano y nos afirma que su evolución depende únicamente del medio, y no de la trayectoria del punto masa o del rayo. Sistemas mecánicos u ópticos que se rigen por las ecuaciones de Hamilton se reconocen como sistemas hamiltonianos, y su teatro de acción es el espacio fase cuyos puntos describimos por sus coordenadas  $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^4$ .

Podemos asociar matrices  $\mathbf{m}$  con un subconjunto importante de sistemas hamiltonianos: los sistemas cuyos hamiltonianos son funciones cuadráticas de las coordenadas del espacio fase,

$$H(\mathbf{m}; \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}\mathbf{p} \cdot \mathbf{c} \mathbf{p} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{a} \mathbf{p} - \frac{1}{2}\mathbf{q} \cdot \mathbf{b} \mathbf{q} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & -\mathbf{a}^\top \end{pmatrix}, \quad (3)$$

y cuyas ecuaciones de Hamilton (2) resultan lineales en el espacio fase,

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \mathbf{p}(z) \\ \mathbf{q}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & -\mathbf{a}^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}(z) \\ \mathbf{q}(z) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Puesto que  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{c} \mathbf{p} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{c}^\top \mathbf{p}$ , la submatriz  $\mathbf{c} = \mathbf{c}^\top$  es simétrica, y también lo es  $\mathbf{b} = \mathbf{b}^\top$ . La submatriz  $\mathbf{a}$  no tiene restricción, pero su aparición acompañada de su transpuesta nos indica que la matriz  $\mathbf{m}$  no es general, sino que obedece una restricción importante:

$$\mathbf{m}\Omega = -\Omega\mathbf{m}^\top, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\Omega^{-1}, \quad (5)$$

que la define como matriz hamiltoniana. Aquí trabajamos con 2-vectores  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$ , de modo que  $\mathbf{m}$  es una matriz de  $4 \times 4$ ;  $\mathbf{c}$  y  $\mathbf{b}$  contienen 3 parámetros cada uno y  $\mathbf{a}$  tiene 4, de modo que los hamiltonianos (3) y sus matrices hamiltonianas asociadas tienen 10 parámetros libres. Si el espacio real tuviera una dimensión menos (mecánica lineal u óptica plana),  $\mathbf{m}$  tendría solamente 3 parámetros.

Los parámetros del hamiltoniano y de su matriz asociada (3) en general dependen del tiempo y, en la vecindad de cada  $z$ , generan los siguientes sistemas

	ELEMENTOS	en MECÁNICA	en ÓPTICA
	$ c  > 0$	energía cinética	propagación libre
	$\mathbf{b}$	—	lente delgada
	$\mathbf{c} + \mathbf{b}$	oscilador	guía de ondas
	$ \mathbf{b}  < 0$	armónico	transf. de Fourier
	$ \mathbf{b}  > 0$	repulsivo	transf. hiperbólica
$\mathbf{a} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	—	—	magnificador
$\mathbf{a} = a \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	momento angular	—	—

### 3. Porqué las exponenciamos

Imponemos una restricción más a los sistemas hamiltonianos que queremos considerar: que sean independientes de  $z$ . En mecánica esto quiere decir que los potenciales serán independientes del tiempo,  $V(q_x, q_y) = -(1/2)\mathbf{q} \cdot \mathbf{b} \mathbf{q}$ ; en óptica, el índice de refracción  $\nu(q_x, q_y)$  será independiente de la tercera

dimensión  $z$  y por ello llamaremos al medio guía de ondas. Esta “guía” puede ser armónica, repulsiva o libre, y distinta sobre los ejes  $x$  y  $y$  de la pantalla —astigmática, o puede contener momento angular, como los hamiltonianos en la óptica de aceleradores de partículas; estas aplicaciones están resumidas en la Ref. 8, por Alex J. Dragt, titulada Elementary

and advanced Lie algebraic methods with applications to accelerator design, electron microscopes, and light optics. Como producto de un taller temático llevado a cabo en 1985, se reunieron varios trabajos que abordan la teoría de estos sistemas, citados en la Ref. 9. Para estos sistemas independientes de  $z$ , las ecuaciones de Hamilton (4) dan la solución general:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}(z) \\ \mathbf{q}(z) \end{pmatrix} = \exp \left[ z \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & -\mathbf{a}^\top \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{p}(0) \\ \mathbf{q}(0) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Y por ello tenemos que saber cómo exponenciar matrices hamiltonianas.

La exponencial de una matriz hamiltoniana es una matriz que cumple una condición que deriva de (5):

$$\mathbf{M}(z) = \exp(z\mathbf{m}) \Rightarrow \mathbf{M}\mathbf{\Omega}\mathbf{M}^\top = \mathbf{\Omega}, \quad (8)$$

y se llama la condición canónica; las matrices que la cumplen se llaman canónicas. Llevan también la nomenclatura de *simplécticas*, introducida por Hermann Weyl en su libro clásico de 1928, citado en [10], cuyos aspectos más contemporáneos han sido desarrollados en el libro [11], y especialmente detallados en el libro [12]. La condición canónica (8) para las matrices hamiltonianas se verifica usando  $\mathbf{\Omega}\mathbf{m}^\top\mathbf{\Omega}^{-1} = -\mathbf{m}$  para reemplazar  $\mathbf{\Omega}\exp(z\mathbf{m})^\top = \exp(-z\mathbf{m})\mathbf{\Omega}$  en el miembro izquierdo de (8). La condición (8) implica varias condiciones sobre las submatrices:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{B}^\top, \mathbf{A}^\top\mathbf{C}, \mathbf{B}^\top\mathbf{D}, \mathbf{C}\mathbf{D}^\top \text{ simétricas,} \\ \mathbf{A}\mathbf{D}^\top - \mathbf{B}\mathbf{C}^\top = \mathbf{1}. \end{cases} \quad (9)$$

El producto de dos matrices canónicas es una matriz canónica;  $\mathbf{1}$  es canónica; la inversa  $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{\Omega}\mathbf{M}^\top\mathbf{\Omega}$  existe y es canónica, y la asociatividad vale; en consecuencia, las matrices canónicas de  $2D \times 2D$  forman los grupos llamados *simplécticos reales* y son denotados por  $\mathbf{Sp}(2D, \mathfrak{R})$ . Conversamente, la parte infinitesimal del grupo,  $\mathbf{M} \approx \mathbf{1} + \varepsilon\mathbf{m}$ ,  $\varepsilon^2 \approx 0$ , determina que de la condición canónica (8)–(9) siga la condición hamiltoniana (5). Las matrices hamiltonianas forman las álgebras de Lie  $\mathbf{sp}(2D, \mathfrak{R})$ , llamadas también *simplécticas*: si  $\mathbf{m}_1$  y  $\mathbf{m}_2$  son hamiltonianas, así lo es su combinación lineal y su conmutador  $\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_2\mathbf{m}_1$ .

El hecho que las matrices  $\mathbf{M}(z)$  que representan la evolución de un sistema lineal contengan restricciones, significa que la transformación del espacio fase  $(\mathbf{p}(0), \mathbf{q}(0)) \mapsto (\mathbf{p}(z), \mathbf{q}(z))$  no puede ser arbitraria, sino que

debe obedecer las consecuencias geométricas. De (8) se sigue que  $|\det \mathbf{M}| = 1$  (de hecho,  $\det \mathbf{M} = +1$ ), que en (7) implica que el elemento de volumen  $d\mathbf{p} d\mathbf{q}$  se conserva, como si el espacio fase fuese un líquido incompresible —no se pierden ni ganan puntos masa ni rayos. Las demás condiciones canónicas implican la conservación de las ecuaciones de Hamilton (2); esta canonicidad se deja sentir sólo cuando  $D \geq 2$ , pues en el caso de  $D = 1$  dimensión, cualquier matriz de  $2 \times 2$  con determinante 1 es canónica.

#### 4. Cómo exponenciamos matrices (de $2 \times 2$ )

Como dijimos, hay muchos métodos numéricos para exponenciar matrices; métodos analíticos son menos, o funcionan para ciertos conjuntos de matrices, como las diagonales, donde sus elementos simplemente se exponencian, o las nilpotentes, cuya serie de Taylor es finita. Generalmente se trata de diagonalizar la matriz o llevarla a forma triangular, exponenciar ésta y transformar de regreso. Las matrices hamiltonianas (3) son especiales: tienen dimensión par  $2D$ ,  $D(2D + 1)$  parámetros, son reales y tienen traza cero; sus eigenvalores vienen en parejas conjugadas ( $\lambda$  y  $\lambda^*$ ) y simétricas ( $\lambda$  y  $-\lambda$ ); su ecuación de eigenvalores contiene sólo potencias pares de  $\lambda$  (véase por ejemplo, la Ref. 12).

En el caso  $D = 1$  de matrices de  $2 \times 2$ ,  $\mathbf{m} \in \mathbf{sp}(2, \mathfrak{R})$ , es sencillo encontrar los eigenvalores

$$\det(\mathbf{m} - \lambda\mathbf{1}) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & -a - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (10)$$

$$\lambda^2 + \Delta = 0, \quad \Delta = \det \mathbf{m} = -(a^2 + bc) \in \mathfrak{R} \quad (11)$$

$$\Rightarrow \lambda^\pm = \pm\sqrt{-\Delta} = \pm\sqrt{a^2 + bc}. \quad (12)$$

Recordamos ahora el teorema de Cayley-Hamilton (referimos al lector al libro [13] que, entre muchos otros, demuestra este teorema): la matriz cumple su propia ecuación de eigenvalores (11); es decir, para  $n \in \{0, 1, 2, \dots\} = \mathcal{Z}_0^+$ ,

$$\mathbf{m}^2 = -\Delta\mathbf{1} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{m}^{2n} = (-\Delta)^n\mathbf{1}, \\ \mathbf{m}^{2n+1} = (-\Delta)^n\mathbf{m}. \end{cases} \quad (13)$$

De aquí, la serie exponencial de Taylor puede dividirse en dos: los términos pares acumularán coeficientes de  $\mathbf{1}$  y los términos impares de  $\mathbf{m}$ . Así,

$$\exp(z\mathbf{m}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \mathbf{m}^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \mathbf{m}^{2n+1} = \mathbf{1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \Delta^n + \mathbf{m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \Delta^n \quad (14)$$

$$= \begin{cases} \mathbf{1} \cosh(z\lambda) + \mathbf{m} \frac{1}{\lambda} \sinh(z\lambda), & \lambda \in \mathfrak{R}, \\ \mathbf{1} \cos(z|\lambda|) + \mathbf{m} \frac{1}{|\lambda|} \sin(z|\lambda|), & \lambda \in i\mathfrak{R}. \end{cases} \quad (15)$$

Las series de matrices trigonométricas y exponenciales convergen en todo el plano complejo. El resultado es válido también en el límite  $\Delta \rightarrow 0^\pm$  de sistemas libres [pues  $\cos(z\sqrt{\Delta}) \rightarrow 1$ ,  $\sin(z\sqrt{\Delta})/\sqrt{\Delta} \rightarrow z$ , con  $\lambda$  acercándose al origen desde el eje real o desde el eje imaginario], donde  $\mathbf{m}$  es triangular inferior. Verificamos el resultado (15) checando que  $\mathbf{M}(z_1)\mathbf{M}(z_2) = \mathbf{M}(z_1 + z_2)$ .

Consideramos que dos o más sistemas hamiltonianos lineales que pueden ser transformados el uno en el otro son equivalentes. Por ello (en  $D$  dimensiones) definimos la órbita de  $\mathbf{m}$  como

$$\text{órbita } \mathbf{m} = \{ \alpha \mathbf{M} \mathbf{m} \mathbf{M}^{-1} \in \text{sp}(2D, \mathbb{R}) \mid 0 \neq \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{M} \in \text{Sp}(2D, \mathbb{R}) \}. \quad (16)$$

Ésta es una relación de equivalencia que divide a  $\text{sp}(2D, \mathbb{R})$  en conjuntos disjuntos. Las trayectorias generadas por estos hamiltonianos (con  $z \in \mathbb{R}$ ) son subgrupos en  $\text{Sp}(2D, \mathbb{R})$  que también son equivalentes entre sí, y que obedecen esencialmente a la misma dinámica. Dado que las transformaciones de similaridad (16) conservan la estructura de los eigenvalores de la matriz hamiltoniana  $\mathbf{m}$ , multiplicándolos sólo por el factor  $\alpha \neq 0$ , podremos utilizar esta estructura para caracterizar las órbitas (volveremos a este punto en la Sec. 7). En cada órbita podemos elegir un hamiltoniano representativo que sea el más sencillo. [Por ejemplo, véanse los hamiltonianos ‘útiles’ dados en la lista (6).]

En  $D = 1$  dimensiones, los sistemas lineales están clasificados por el signo del determinante  $\Delta = \det \mathbf{m}$ , y las órbitas de  $\text{sp}(2, \mathbb{R})$  son tres:

órbita (sistema)	{ determinante eigenvalores representante	matriz exponencial en $\text{Sp}(2, \mathbb{R})$
elíptica (armónico)	$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \lambda = \pm i\sqrt{\Delta} \\ H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) \end{cases}$	$\exp z \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos z \lambda  & -\sin z \lambda  \\ \sin z \lambda  & \cos z \lambda  \end{pmatrix},$
parabólica (libre)	$\begin{cases} \Delta = 0 \\ \lambda = 0 \text{ doble} \\ F = \frac{1}{2}p^2 \end{cases}$	$\exp z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix},$
hiperbólica (repulsivo)	$\begin{cases} \Delta < 0 \\ \lambda = \pm\sqrt{-\Delta} \\ R = \frac{1}{2}(p^2 - q^2) \end{cases}$	$\exp z \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh z\lambda & \sinh z\lambda \\ \sinh z\lambda & \cosh z\lambda \end{pmatrix}.$

### 5. El caso de matrices de $4 \times 4$

Seguiremos ahora el proceso de la sección anterior para exponenciar matrices hamiltonianas de  $4 \times 4$ , y anotaremos algunos resultados sobre órbitas de  $\text{sp}(4, \mathbb{R})$  en la sección

siguiente. En mecánica, los sistemas que representan son osciladores de varios tipos (incl. libres y/o momento angular) en dos dimensiones,  $x$  y  $y$ , mientras que en óptica son guías de onda a lo largo del eje  $z$ . El hamiltoniano cuadrático más general y su matriz asociada son

$$H(\mathbf{m}; \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \left. \begin{aligned} &= \frac{1}{2}c_x p_x^2 + \frac{1}{2}c_y p_y^2 + c_\times p_x p_y \\ &\quad - \frac{1}{2}b_x q_x^2 - \frac{1}{2}b_y q_y^2 - b_\times q_x q_y \\ &\quad - a_x q_x p_x - a_y q_y p_y \\ &\quad - a_{xy} q_x p_y - a_{yx} q_y p_x \end{aligned} \right\} \leftrightarrow \mathbf{m} = \begin{pmatrix} a_x & a_{xy} & b_x & b_\times \\ a_{yx} & a_y & b_\times & b_y \\ c_x & c_\times & -a_x & -a_{yx} \\ c_\times & c_y & -a_{xy} & -a_y \end{pmatrix}, \quad (18)$$

donde distinguimos los 4 términos en coordenadas cruzadas ( $a_{xy}, a_{yx}, b_\times, c_\times$ ), de los 6 términos en coordenadas separadas ( $a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y$ ).

Con los 10 parámetros de  $\mathbf{m}$ , la ecuación de eigenvalores es

$$\det(\mathbf{m} - \lambda \mathbf{1}) = \lambda^4 + \Gamma \lambda^2 + \Delta = 0, \quad (19)$$

donde

$$\Gamma = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ c_x & -a_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ c_y & -a_y \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} a_{xy} & b_\times \\ c_\times & -a_{yx} \end{vmatrix}, \quad (20)$$

y  $\Delta = \det \mathbf{m}$ , que puede ser escrito agrupando los términos separados y los cruzados,

$$\Delta = \Delta^{\text{separ}} + \Delta^{\text{cruz}}, \tag{21}$$

$$\Delta^{\text{separ}} = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ c_x & -a_x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ c_y & -a_y \end{vmatrix} - 2a_x a_y a_{xy} a_{yx} + a_{xy}^2 a_{yx}^2 + a_{xy}^2 b_y c_x + a_{yx}^2 b_x c_y, \tag{22}$$

$$\Delta^{\text{cruz}} = b_x^2 c_x^2 - b_x^2 c_x c_y - c_x^2 b_x b_y + 2b_x c_x (a_x a_y + a_{xy} a_{yx}) - 2b_x (a_x a_{yx} c_y + a_y a_{xy} c_x) - 2c_x (a_x a_{xy} b_y + a_y a_{yx} b_x). \tag{23}$$

Los eigenvalores —que discriminan entre órbitas— son

$$\lambda = \pm \sqrt{-\frac{1}{2}\Gamma \pm \sqrt{(\frac{1}{2}\Gamma)^2 - \Delta}}. \tag{24}$$

En la Fig. 2 ilustramos el plano  $\Gamma$ - $\Delta$ , asociando sus regiones y fronteras con los patrones de eigenvalores (24). Como las órbitas hamiltonianas están definidas en (16) módulo un factor de escala  $\alpha \neq 0$  que multiplica a  $\Gamma$  por  $\alpha^2$  y  $\Delta$  por  $\alpha^4$  (sin cambiar sus signos), los puntos del plano  $\Gamma$ - $\Delta$  (excepto el origen) pueden deslizarse (es decir, son equivalentes) a lo largo de las semi-parábolas  $\Delta = \beta\Gamma^2$ ,  $\beta \in \mathfrak{R}$ , y las podemos considerar proyectadas sobre los puntos del círculo  $\Gamma^2 + \Delta^2 = 1$  en la figura. El punto origen  $\Gamma = \Delta = 0$  será contado separadamente.

Usamos nuevamente el teorema de Cayley-Hamilton, el cual para matrices de  $4 \times 4$  provee una relación entre tres potencias de la matriz hamiltoniana  $\mathbf{m}$ ,

$$\mathbf{m}^4 = -\Gamma\mathbf{m}^2 - \Delta\mathbf{1}, \tag{25}$$

con  $\Gamma$  y  $\Delta$  dadas por (20) y (21)–(23). En consecuencia, en cualquier serie de Taylor de matrices convergente, todas las potencias pares de  $\mathbf{m}$  mayores a 3 podrán reemplazarse por  $\mathbf{m}^0 = \mathbf{1}$  y  $\mathbf{m}^2$ , y las impares por  $\mathbf{m}$  y  $\mathbf{m}^3$ . En vez de dividir la serie exponencial en 2 series trigonométricas como en la sección anterior, ahora tendremos que dividirla en 4. Así, podemos proponer

$$\mathbf{m}^{4n} = \alpha_n \mathbf{m}^2 + \beta_n \mathbf{1}, \tag{26}$$

$$\mathbf{m}^{4n+1} = \alpha_n \mathbf{m}^3 + \beta_n \mathbf{m}, \tag{27}$$

$$\mathbf{m}^{4n+2} = (-\Gamma\alpha_n + \beta_n)\mathbf{m}^2 - \Delta\alpha_n \mathbf{1}, \tag{28}$$

$$\mathbf{m}^{4n+3} = (-\Gamma\alpha_n + \beta_n)\mathbf{m}^3 - \Delta\alpha_n \mathbf{m}. \tag{29}$$

Multiplicando (26) por  $\mathbf{m}^4$  y usando (25) repetidamente, obtenemos las siguientes relaciones de recurrencia para los coeficientes,

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= (\Gamma^2 - \Delta)\alpha_n - \Gamma\beta_n, & \alpha_0 &= 0, & \alpha_1 &= -\Gamma, \\ \beta_{n+1} &= \Gamma\Delta\alpha_n - \Delta\beta_n, & \beta_0 &= 1, & \beta_1 &= -\Delta. \end{aligned} \tag{30}$$

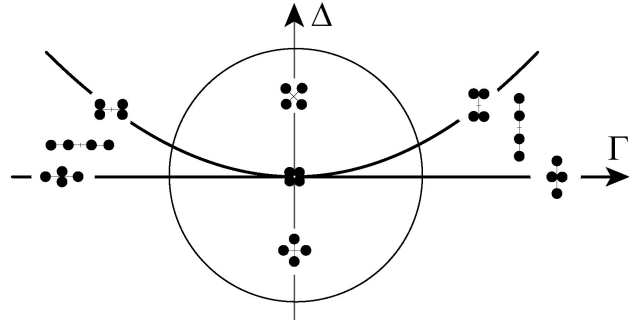


FIGURA 2. El plano  $\Gamma$ - $\Delta$  de los hamiltonianos en  $D = 2$  dimensiones y la estructura de sus eigenvalores. La parábola  $\Delta = (1/4)\Gamma^2$  y la línea  $\Delta = 0$  dividen el plano en 4 regiones, 4 fronteras y el centro. Bajo equivalencia de escala, los puntos del plano (excepto el origen) se proyectan a lo largo de semi-parábolas  $\Delta = \beta\Gamma^2$  (sin cambiar los signos),  $\beta \in \mathfrak{R}$ , sobre los puntos del círculo.

Sin embargo, esto no da lugar a una forma (analítica y sencilla) que resulte sumable para los coeficientes  $\{\alpha_n\}$  y  $\{\beta_n\}$  de la serie exponencial. Necesitamos una base más adecuada que la base de potencias de la matriz hamiltoniana.

Para encontrar coeficientes cuya recurrencia no esté trenzada como (30), proponemos para las potencias múltiplos de 4 [cf. (26)] la forma

$$\mathbf{m}^{4n} = \gamma_n^+ (\mathbf{m}^2 + v^+ \mathbf{1}) + \gamma_n^- (\mathbf{m}^2 + v^- \mathbf{1}), \tag{31}$$

pidiendo que los dos sumandos se reproduzcan separadamente bajo multiplicación por  $\mathbf{m}^4$ , es decir,

$$(\mathbf{m}^2 + v^\pm \mathbf{1})\mathbf{m}^4 = \mu^\pm (\mathbf{m}^2 + v^\pm \mathbf{1}). \tag{32}$$

Entonces obtenemos dos relaciones de recurrencia independientes:

$$\gamma_n^\pm = \mu^\pm \gamma_{n-1}^\pm = (\mu^\pm)^n \gamma_0^\pm. \tag{33}$$

Usando (25) dos veces e igualando los coeficientes de  $\mathbf{m}^2$  y  $\mathbf{1}$ , encontramos los dos eigenvalores en (32), que son

$$\begin{aligned} \mu^\pm &= -\Delta + \frac{1}{2}\Gamma \left( \Gamma \mp \sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[ \Gamma \mp \sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta} \right]^2 = (\lambda^\pm)^4, \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} \mu^+ + \mu^- &= \Gamma^2 - 2\Delta, \\ \mu^+ - \mu^- &= -\Gamma\sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta}, & \mu^+ \mu^- &= \Delta^2. \end{aligned} \tag{35}$$

Notamos en (34) la relación  $\mu^\pm = (\lambda^\pm)^4$  con los eigenvalores de la matriz hamiltoniana  $\mathbf{m}$  dada en (24). Los coeficientes  $v^\pm$  de  $\mathbf{1}$  en (32) se encuentran de la misma manera, y

participan en varias relaciones útiles:

$$v^\pm = \frac{1}{2}\Gamma \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta} = -(\lambda^\mp)^2, \\ (v^\pm)^2 = \mu^\mp, \tag{36}$$

$$v^+ + v^- = \Gamma, \quad v^+ - v^- = \sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta}, \\ v^+v^- = \Delta,$$

$$\mu^+v^+ - \mu^-v^- = -\Delta\sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta}, \\ \mu^\pm + \Delta = \Gamma\Delta/v^\pm = \Gamma v^\mp. \tag{37}$$

La expresión  $\sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta}$  es ubícuca; en la Fig. 2, arriba de la parábola  $\Delta = (1/4)\Gamma^2$ , ésta es imaginaria pura, y real debajo; sobre ella es cero.

La forma que propusimos en (31) para  $\mathbf{m}^{4n}$  debe ser complementada para las demás potencias; multiplicando esta ecuación por  $\mathbf{m}^2$  obtenemos la misma forma,

$$\mathbf{m}^{4n+2} = \delta_n^+(\mathbf{m}^2 + v^+\mathbf{1}) + \delta_n^-(\mathbf{m}^2 + v^-\mathbf{1}). \tag{38}$$

[Cf. (26) y (28)]. Igualando los coeficientes del término  $\mathbf{m}^2$ , encontramos

$$\delta_n^\pm = (-\Gamma + v^\pm)\gamma_n^\pm = -\frac{\mu^\pm + \Delta}{\Gamma}\gamma_n^\pm \\ = \mp \frac{(\mu^\pm)^{n+1} + \Delta(\mu^\pm)^n}{\Gamma\sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta}}, \tag{39}$$

que satisface la misma relación de recurrencia que las  $\gamma_n^\pm$ 's en (33); los coeficientes de  $\mathbf{1}$  son consistentes con (33) porque  $\delta_n^\pm v^\pm = -\Delta\gamma_n^\pm$ . Finalmente, la relación entre las dos bases,  $\alpha_n, \beta_n$  en (26) y  $\gamma_n^\pm$  en (31), es

$$\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v^+ & v^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_n^+ \\ \gamma_n^- \end{pmatrix}, \\ \gamma_n^\pm = \frac{\mp(v^\mp\alpha_n - \beta_n)}{\sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta}}. \tag{40}$$

### 6. Los cuartos de la serie exponencial

Con los resultados obtenidos, podemos ahora dividir la serie de Taylor de una función  $f(\mathbf{m})$  en cuatro subseries [cf. (14)] con el índice  $\ell = 4n + k$ , para  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$  y  $n \in \mathcal{Z}_0^+$ .

Escribimos

$$f(\mathbf{m}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^3 f_{4n+k} \mathbf{m}^{4k+n} \\ = F_0\mathbf{1} + F_1\mathbf{m} + F_2\mathbf{m}^2 + F_3\mathbf{m}^3 \tag{41}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ f_{4n}[\gamma_n^+(\mathbf{m}^2 + v^+\mathbf{1}) + \gamma_n^-(\mathbf{m}^2 + v^-\mathbf{1})] \right. \\ + f_{4n+1}[\gamma_n^+(\mathbf{m}^2 + v^+\mathbf{1})\mathbf{m} + \gamma_n^-(\mathbf{m}^2 + v^-\mathbf{1})\mathbf{m}] \\ + f_{4n+2}[\delta_n^+(\mathbf{m}^2 + v^+\mathbf{1}) + \delta_n^-(\mathbf{m}^2 + v^-\mathbf{1})] \\ \left. + f_{4n+3}[\delta_n^+(\mathbf{m}^2 + v^+\mathbf{1})\mathbf{m} + \delta_n^-(\mathbf{m}^2 + v^-\mathbf{1})\mathbf{m}] \right\}. \tag{42}$$

$$= \sum_{\pm} A^\pm(\mathbf{m}^2 + v^\pm\mathbf{1}) + \sum_{\pm} B^\pm(\mathbf{m}^2 + v^\pm\mathbf{1})\mathbf{m}, \tag{43}$$

donde

$$\begin{cases} A^\pm = \sum_{n=0}^{\infty} (f_{4n}\gamma_n^\pm + f_{4n+2}\delta_n^\pm), \\ B^\pm = \sum_{n=0}^{\infty} (f_{4n+1}\gamma_n^\pm + f_{4n+3}\delta_n^\pm), \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} F_0 = A^+v^+ + A^-v^-, \\ F_1 = B^+v^+ + B^-v^-, \\ F_2 = A^+ + A^-, \\ F_3 = B^+ + B^-. \end{cases} \tag{44}$$

Los coeficientes de la serie exponencial  $f(x) = \exp x$  en (41) son  $f_\ell = 1/\ell!$ , con  $\ell = 4n + k$ . Esta serie es excepcional porque permite dividirse en cuatro series (que parecen no estar en las tablas) y que, indicando  $\sum_{n=0}^{\infty}$  simplemente por  $\sum$ , podemos reconocer inmediatamente:

$$\sum \frac{x^{4n}}{(4n)!} = \frac{1}{2}(\cosh x + \cos x), \\ \sum \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} = \frac{1}{2}(\sinh x + \sin x), \\ \sum \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} = \frac{1}{2}(\cosh x - \cos x), \\ \sum \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} = \frac{1}{2}(\sinh x - \sin x). \tag{45}$$

Como en (43) los coeficientes  $\gamma_n^\pm$  (y  $\delta_n^\pm$ ) contienen potencias  $n$  (y  $n + 1$ ) de las  $\mu^\pm$ 's en (34) que hemos dividido en cuatro, necesitaremos sus raíces cuartas: los eigenvalores de  $\mathbf{m}$ ,  $\lambda^\pm$ . El signo de  $\lambda^\pm$  es superfluo porque las series resultantes serán funciones pares de  $\lambda^\pm$ ; para incorporar los eigenvalores como factores en las series (45), usamos

$$(\lambda^+)^2 + (\lambda^-)^2 = -\Gamma, \quad (\lambda^+)^2 - (\lambda^-)^2 = \sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta}, \\ \lambda^+\lambda^- = \sqrt{\Delta}. \tag{46}$$

Así, las expresiones en (43) se reducen a las series siguientes:

$$\begin{aligned} \sum \frac{z^{4n}}{(4n)!} \gamma_n^\pm &= \frac{\pm 1}{2\sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta}} \\ &\times [\cosh(z\lambda^\pm) + \cos(z\lambda^\pm)], \\ \sum \frac{z^{4n+1}}{(4n+1)!} \gamma_n^\pm &= \frac{\pm 1}{2\sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta}} \\ &\times \frac{1}{\lambda^\pm} [\sinh(z\lambda^\pm) + \sin(z\lambda^\pm)], \\ \sum \frac{z^{4n+2}}{(4n+2)!} \delta_n^\pm &= \frac{\mp 1}{2\sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta}} \\ &\times [\cosh(z\lambda^\pm) - \cos(z\lambda^\pm)], \\ \sum \frac{z^{4n+3}}{(4n+3)!} \delta_n^\pm &= \frac{\mp 1}{2\sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta}} \\ &\times \frac{1}{\lambda^\pm} [\sinh(z\lambda^\pm) - \sin(z\lambda^\pm)]. \end{aligned} \quad (47)$$

De la primera y tercera suma resultan los coeficientes  $A^\pm$  en (44), mientras que la segunda y cuarta resultan  $B^\pm$ , como sigue:

$$A^\pm(z) = \frac{\pm 1}{2\Gamma\sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta}} \times (U \cosh(z\lambda^\pm) + V \cos(z\lambda^\pm)), \quad (48)$$

$$B^\pm(z) = \frac{\pm 1}{2\Gamma\sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta}} \times \frac{1}{\lambda^\pm} (U \sinh(z\lambda^\pm) + V \sin(z\lambda^\pm)), \quad (49)$$

donde

$$\begin{aligned} U &= \Gamma - (\lambda^+)^2 + (\lambda^-)^2 = 2\Gamma, \\ V &= \Gamma + (\lambda^+)^2 + (\lambda^-)^2 = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Mantuvimos a  $V$  en (48)–(50) hasta encontrar que el término desaparece, para aclarar que la función exponencial se construye sólo con las funciones hiperbólicas. Cuando los eigenvalores  $\lambda^\pm$  son reales, como en el oscilador/guía repulsiva en (17), tendremos subgrupo y trayectorias no acotadas. Cuando los eigenvalores son imaginarios puros, las funciones hiperbólicas en (50) se vuelven trigonométricas [con  $\cosh ix = \cos x$ ,  $(ix)^{-1} \sinh ix = x^{-1} \sin x$ ], y los elementos del subgrupo y las trayectorias serán acotadas; en (50) esto equivale al intercambio entre  $U$  y  $V$ . Cuando los eigenvalores sean cero debemos tener algún cuidado tomando el límite. Finalmente, de (44) encontramos la serie exponencial

$$\exp(z\mathbf{m}) = E_0(z)\mathbf{1} + E_1(z)\mathbf{m} + E_2(z)\mathbf{m}^2 + E_3(z)\mathbf{m}^3, \quad (51)$$

en términos de las cuatro potencias más bajas de  $\mathbf{m}$ , y con los coeficientes

$$E_0(z) = \frac{1}{2}(\cosh z\lambda^+ + \cosh z\lambda^-) + \frac{\Gamma}{2\sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta}}(\cosh z\lambda^+ - \cosh z\lambda^-) = -\frac{1}{2\sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta}}(\lambda^- \cosh z\lambda^+ - \lambda^+ \cosh z\lambda^-), \quad (52)$$

$$E_1(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sinh z\lambda^+}{\lambda^+} + \frac{\sinh z\lambda^-}{\lambda^-}\right) + \frac{\Gamma}{2\sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta}}\left(\frac{\sinh z\lambda^+}{\lambda^+} - \frac{\sinh z\lambda^-}{\lambda^-}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta}}\left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+} \sinh z\lambda^+ + \frac{\lambda^+}{\lambda^-} \sinh z\lambda^-\right), \quad (53)$$

$$E_2(z) = \frac{1}{\sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta}}(\cosh z\lambda^+ - \cosh z\lambda^-), \quad (54)$$

$$E_3(z) = \frac{1}{\sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta}}\left(\frac{\sinh z\lambda^+}{\lambda^+} - \frac{\sinh z\lambda^-}{\lambda^-}\right). \quad (55)$$

Podemos verificar estas ecuaciones checando que se cumplen las condiciones iniciales,  $E_k(0) = \delta_{k,0}$ , y que se satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dz} \exp z\mathbf{m} = \mathbf{m} \exp z\mathbf{m} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dz} E_0(z) = -\Delta E_3(z), & \frac{d}{dz} E_1(z) = E_0(z), \\ \frac{d}{dz} E_2(z) = E_1(z) - \Gamma E_3(z), & \frac{d}{dz} E_3(z) = E_2(z). \end{cases} \quad (56)$$

Los eigenvalores  $\lambda^\pm$  coinciden sobre la parábola

$$\Gamma^2 - 4\Delta = 0$$

de la Fig. 2, como podemos ver en (24), y entonces habrá ceros en los denominadores de los coeficientes (52)–(55). Para analizar lo que sucede en estos casos, dejare-

mos  $\lambda^+, \lambda^- \rightarrow \lambda$ , y nos acercaremos a la parábola  $\varepsilon = \sqrt{\Gamma^2 - 4\Delta} \rightarrow 0$  aproximando  $\varepsilon^2 \approx 0$ . Así podemos desarrollar a primer orden

$$(\lambda^\pm)^2 = -\frac{1}{2}\Gamma \pm \frac{1}{2}\varepsilon \Rightarrow \lambda^\pm \approx \lambda \pm \varepsilon/4\lambda, \quad \lambda = \sqrt{-\frac{1}{2}\Gamma}, \quad (57)$$



$$\Rightarrow \cosh z\lambda^\pm \approx \cosh z\lambda \pm \frac{1}{4}z\varepsilon \frac{\sinh z\lambda}{\lambda}, \quad (58)$$

$$\frac{\sinh z\lambda^\pm}{\lambda^\pm} \approx \frac{\sinh z\lambda}{\lambda} \pm \frac{\varepsilon}{4\lambda^2} \left( z \cosh z\lambda - \frac{\sinh z\lambda}{\lambda} \right). \quad (59)$$

Reemplazamos estas aproximaciones en (53)–(55), cancelando los  $\varepsilon$  en los denominadores, y luego tomamos el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Así obtenemos

$$E_0(z) = \cosh z\lambda - \frac{1}{2}\lambda^2 z \frac{\sinh z\lambda}{\lambda}, \quad (60)$$

$$E_1(z) = \frac{\sinh z\lambda}{\lambda} - \frac{1}{2} \left( z \cosh z\lambda - \frac{\sinh z\lambda}{\lambda} \right), \quad (61)$$

$$E_2(z) = \frac{1}{2} z \frac{\sinh z\lambda}{\lambda}, \quad (62)$$

$$E_3(z) = \frac{1}{2\lambda^2} \left( z \cosh z\lambda - \frac{\sinh z\lambda}{\lambda} \right), \quad (63)$$

sea que tomemos  $\varepsilon$  real (límite desde arriba de la parábola de la Fig. 2,  $(1/4)\Gamma^2 > \Delta$ ) o imaginaria pura (desde abajo,  $(1/4)\Gamma^2 < \Delta$ ).

Podemos ahora deslizarnos sobre la parábola para llegar al origen del plano  $\Gamma$ - $\Delta$  que, según veremos, es altamente degenerado. Desarrollamos en series de  $\lambda$  los coeficientes (60)–(63) reteniendo sólo los términos independientes de  $\lambda$ . Así encontramos

$$\begin{aligned} E_0(z) &= 1, & E_1(z) &= z, \\ E_2(z) &= \frac{1}{2}z^2, & E_3(z) &= \frac{1}{6}z^3. \end{aligned} \quad (64)$$

Este límite es distinto del que obtenemos cuando nos acercamos al origen sobre la línea  $\Gamma = 0$ ; cuando la matriz  $\mathbf{m}$  es nilpotente (como en propagación libre, donde  $\mathbf{m}^2 = \mathbf{0}$ ), la matriz exponencial se reduce a menos términos aún ( $1 + z\mathbf{m}$  en ese caso).

Sobre la parábola de la Fig. 2 están todos los sistemas isótropos, es decir, aquéllos invariantes bajo rotaciones alrededor del eje  $z$ ; corresponden a hamiltonianos de osciladores centrales o de guías de onda cilíndricas, sin o con momento angular. Tienen una pareja simétrica, real o imaginaria, de eigenvalores doblemente degenerados. Constatamos de la forma general (18), anulando términos cruzados (excepto por momento angular  $a_{xy} = -a_{yx}$ ), que  $\Delta = (1/4)\Gamma^2$ , y que ya sus cuadrados son múltiplos de la matriz unidad de  $4 \times 4$ ,  $\mathbf{m}^2 = \lambda^2 \mathbf{1}$ . En consecuencia, cualquier serie de Taylor (41), en particular la exponencial (52)–(55), se reduce a solamente dos términos —como el caso sencillo de las matrices de  $2 \times 2$  en (15). [Notamos que en el caso  $2 \times 2$ , es  $\Delta^{(2 \times 2)}$  el determinante que aparece en  $\mathbf{m}^2 = -\Delta^{(2 \times 2)} \mathbf{1}$ , mientras que en el caso de  $4 \times 4$  es  $\mathbf{m}^2 = \pm \sqrt{|\Delta^{(4 \times 4)}|} \mathbf{1}$ ; así,  $\Delta^{(4 \times 4)} \leftrightarrow (\Delta^{(2 \times 2)})^2$ .]

Sumamos los coeficientes de  $\mathbf{1}$  y  $\mathbf{m}^2$ , y los de  $\mathbf{m}$  y  $\mathbf{m}^3$ , para encontrar

$$\begin{aligned} (E_0 + \lambda^2 E_2)(z) &= \cosh z\lambda, \\ (E_1 + \lambda^2 E_3)(z) &= \frac{\sinh z\lambda}{\lambda}, \end{aligned} \quad (65)$$

recuperando así los dos sumandos del caso de  $2 \times 2$ . Los resultados de esta sección cumplen el propósito central del artículo. Sin embargo, debemos aclarar que la clasificación de órbitas de sistemas  $\text{sp}(4, \mathbb{R})$  mediante los puntos del plano  $\Gamma$ - $\Delta$  de la Fig. 2 es incompleta, pues existe degeneración.

### 7. Degeneración en el plano de eigenvalores

El motivo por el cual la clasificación de órbitas hamiltonianas mediante sus eigenvalores no es completa, es porque la relación de equivalencia entre hamiltonianos definida en (16) se hace con matrices canónicas, las cuales son sólo un subconjunto de todas las matrices. Dos hamiltonianos equivalentes bajo transformaciones lineales (en general no-canónicas) pueden no serlo bajo el subconjunto. Por ello pueden haber dos o más hamiltonianos que pertenezcan a órbitas distintas, pero que compartan el mismo punto en el plano  $\Gamma$ - $\Delta$  de la Fig. 2.

El problema de eigenvalores en las álgebras simplécticas fue abordado hace tiempo en el contexto de la mecánica celeste; un ejemplo de esta línea de investigación está contenido en la Ref. 14, titulada Canonical forms for symplectic and Hamiltonian matrices, en la cual los autores clasifican la estructura de eigenvalores de las matrices hamiltonianas de  $2D \times 2D$  dimensiones, aunque no resuelven sus degeneraciones. En el contexto de la mecánica cuántica de osciladores, con el antecedente de su aplicación en física nuclear, la clasificación de las órbitas de hamiltonianos fue estudiada por Moshinsky y Winternitz en la Ref. [15], titulada Quadratic Hamiltonians in phase space and their eigenstates. Este artículo se refiere al problema bi-dimensional, el cual es aplicable a la óptica (mas sólo a la mecánica bidimensional; la tridimensional requiere de las seis dimensiones del espacio fase físico). Existen otros estudios en el contexto de teoría de grupos que dan resultados sobre este problema, entre ellos dos artículos reunidos bajo la Ref. 16, titulados Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. III. The de Sitter groups, y Maximal abelian subalgebras of real and complex symplectic Lie algebras. Si bien el propósito de esos estudios es enciclopédico —y más general que el requerido aquí, sabemos (por comunicación privada de uno de los autores) que han glosado sobre algunos de los puntos degenerados analizados en la Ref. 5. Sin embargo, son las órbitas genéricas las que han servido de herramienta en la óptica cuántica, concretamente en la clasificación de los haces gaussianos con *twist* (así se han dado a llamar los que portan momento angular neto) que aparecen en los dos artículos citados en la Ref. 17, titulados Anisotropic Gaussian Schell-model beams: Passage through optical systems and associated invariants, y Optical phase space, Wigner representation,

and invariant quality parameters. La industria de láseres requiere de la caracterización de los parámetros de calidad de haces gaussianos; ejemplo de ello es uno de los artículos de George Nemeş, fundador de la compañía Astigmat, citado en la Ref. 18 y titulado Measurement of all ten second-order moments of an astigmatic beam by the use of rotating simple astigmatic (anamorphic) optics. Cabe aclarar que, analizando las referencias anteriores, las clasificaciones encontradas en las Refs. 15 y 16 no cuentan el mismo número de órbitas, mientras que las aplicaciones a los haces gaussianos en las Refs. 17 y 18 solamente utilizan 2 de las órbitas existentes —aquellas que son compactas. Afortunadamente las discrepancias se reducen a puntos aislados del plano  $\Gamma$ - $\Delta$  de la Fig. 2, que aquí resolvemos en la Fig. 3, la cual explicaremos en esta sección.

En la Ref. 5 (“Hamiltonian orbit structure of the set of paraxial optical systems”) abordamos el problema de la clasificación completa de órbitas para los sistemas astigmáticos en la óptica paraxial, utilizando un accidente fortuito: el álgebra de Lie  $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$  es isomorfa al álgebra  $\mathfrak{so}(3, 2)$ , llamada de anti-de Sitter, la cual genera rotaciones y aceleraciones en un espacio de 5 dimensiones con métrica  $(+, +, +, -, -)$ . El grupo de transformaciones  $\text{SO}(3, 2)$  fue objeto de la curiosidad de P.A.M. Dirac, el cual en la Ref. 19, titulada “A

remarkable representation of the 3+2 de Sitter group”, escrito en 1963, cuya intención fue dar pie a generalizaciones de su conocida ecuación del electrón —en esos años surgirían los modelos  $\text{su}(3)$  de partículas elementales. La propuesta fue retomada por Fronsdal y varios colaboradores para teorías de campo de partículas relativistas, en artículos como el dado en la Ref. 20, titulado “Elementary particles in a curved space”. Este modelo tiene problemas por sus dos dimensiones de tiempo, como fue apuntado por Phillips y Wigner en la Ref. 21. Sin embargo, el modelo es interesante *per se*, y sigue siendo tópicico de investigación, como indica la Ref. 22, titulada “Integral-spin fields on (3+2)-de Sitter space”.

La estructura del grupo  $\text{SO}(3, 2)$  es bastante más transparente que la de su grupo simpléctico  $\text{Sp}(4, \mathbb{R})$  (la correspondencia de elementos es 1:2 de modo que son grupos homeomorfos [23]). Por ello, la búsqueda de clases de equivalencia de hamiltonianos paraxiales ópticos fue convertida, en la Ref. 5, en un problema geométrico de rotaciones y aceleraciones en diversos planos, mediante un proceso sistemático e intuitivo. El primer paso utiliza transformadores fraccionales de Fourier y magnificadores para llevar al hamiltoniano en cuestión a una de tres formas básicas, cada una caracterizada por una subálgebra de  $\mathfrak{so}(3, 2)$ : hamiltonianos separables [subálgebra  $\mathfrak{so}(2, 2) = \mathfrak{sp}(2, \mathbb{R})_x \oplus \mathfrak{sp}(2, \mathbb{R})_y$ , regiones  $\Delta < (1/4)\Gamma^2$  debajo de la parábola en las Figs. 2 y 3], hamiltonianos lorentzianos [subálgebra  $\mathfrak{so}(3, 1)$  como en relatividad, región  $\Delta > (1/4)\Gamma^2$  arriba de la parábola], y hamiltonianos (pseudo-) euclideos [subálgebra  $\mathfrak{iso}(2, 1) = \mathfrak{i}_3 \mathfrak{sp}(2, \mathbb{R})$ , sobre la parábola  $\Delta = (1/4)\Gamma^2$ ]; esta primera clasificación ya fue comentada arriba. Los siguientes pasos son los análisis de órbitas de estas subálgebras. Finalmente, se verifica la equivalencia o no entre estas sub-órbitas cuando la similitud se extiende al grupo completo  $\text{Sp}(4, \mathbb{R})$ .

Denotamos por  $H_x, R_x, F_x$  a los hamiltonianos de oscilador/guía de ondas armónico, repulsivo y libre (17) sobre el eje  $x$ , y  $H_y, R_y, F_y$  sobre el eje  $y$ . Sean  $H = H_x + H_y$ ,  $R = R_x + R_y$ ,  $F = F_x + F_y$  los hamiltonianos isotrópicos correspondientes, y  $M = \mathbf{q} \times \mathbf{p}$  el momento angular. Con esta nomenclatura, el resumen de la clasificación de órbitas hamiltonianas de la Ref. 5 en la Fig. 3 es la siguiente:

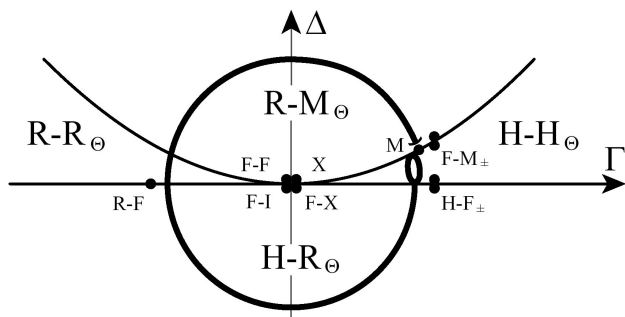


FIGURA 3. El plano  $\Gamma$ - $\Delta$  y el círculo unitario (de la Fig. 2), identificando las regiones, fronteras y puntos aislados de órbitas hamiltonianas y su degeneración. Hay 4 regiones de hamiltonianos:  $H-H_\theta$ ,  $H-R_\theta$  y  $R-R_\theta$  son separables, y  $R-M_\theta$  es lorentziana. En las fronteras entre regiones existen 6 órbitas degeneradas:  $H-F_\pm$ ,  $R-F$ ,  $F-M_\pm$  y  $M$ ; y 6 órbitas cohabitan el centro:  $F-F_{0,\pm}$ ,  $X$ ,  $F-I$  y  $F-X$ .

**Separables:**

región	$H-H_\theta$	$H_x \cos \theta + H_y \sin \theta,$	$\Gamma = \alpha^2 > 0, 0 \leq \Delta = \frac{1}{4} \sin^2 2\theta \leq \frac{1}{4} \Gamma^2,$	$-\frac{1}{4}\pi < \theta \leq \frac{1}{4}\pi;$
región	$H-R_\theta$	$H_x \cos \theta + R_y \sin \theta,$	$\Gamma = \frac{1}{2} \alpha^2 \cos 2\theta \in \mathbb{R}, \Delta \leq 0,$	$0 < \theta < \frac{1}{2}\pi;$
región	$R-R_\theta$	$R_x \cos \theta + R_y \sin \theta,$	$\Gamma = -\alpha^2 < 0, 0 \leq \Delta \leq \frac{1}{4} \Gamma^2,$	$0 \leq \theta \leq \frac{1}{4}\pi;$
órbitas	$H-F_\sigma$	$H_x + \sigma F_y,$	$\Gamma > 0, \Delta = 0,$	$\sigma \in \{-1, +1\};$
órbita	$R-F$	$R_x + F_y,$	$\Gamma < 0, \Delta = 0;$	
órbitas	$F-F_\sigma$	$F_x + \sigma F_y,$	$\Gamma = 0, \Delta = 0,$	$\sigma \in \{-1, 0, +1\}.$

**Lorentzianas:**

región	$R-M_\theta$	$R \cos \theta + M \sin \theta,$	$\Gamma = \frac{1}{2} \alpha^2 \cos 2\theta \in \mathbb{R}, \Delta \geq \frac{1}{4} \Gamma^2,$	$0 < \theta < \frac{1}{2}\pi;$
órbita	$M$	$M,$	$\Gamma > 0, \Delta = \frac{1}{4} \Gamma^2;$	
órbita	$X$	$q_x p_y,$	$\Gamma = 0, \Delta = 0.$	

Euclidianas:

órbitas	F-M <sub>±</sub>	$F \pm M,$	$\Gamma > 0, \Delta = \frac{1}{4}\Gamma^2;$
órbita	F-I	$p_x p_y + \frac{1}{2}(q_x p_x - q_y p_y),$	$\Gamma = 0, \Delta = 0;$
órbita	F-X	$\frac{1}{2}(p_x + p_y)^2 + q_x p_y,$	$\Gamma = 0, \Delta = 0.$

Recorremos el círculo de órbitas de la Fig. 3 (el parámetro  $\theta$  usado arriba no guarda relación con el ángulo sobre el círculo), comenzando con la región H-H<sub>θ</sub> de osciladores anisótropos y guías de onda astigmáticas, cuyas trayectorias en el espacio real oscilan en  $x$  y  $y$  (con frecuencias en general diferentes) y son acotadas. Vemos que en toda esta región hay degeneración doble  $\pm\theta$  (reflexión que intercambia los ejes  $x$  y  $y$ ), excepto en sus fronteras ( $H_x \equiv H_y$  en  $\theta = 0$  y  $H$  en  $(1/4)\pi$ ). En la frontera inferior (el eje  $+\Gamma$ ) convive la pareja degenerada H-F<sub>±</sub> de hamiltonianos  $H_x \pm F_y$  con trayectorias que oscilan en una dirección y son rectas en la otra, que no son acotadas. La región H-R<sub>θ</sub> es abierta y corresponde a potenciales como sillas de montar, cuyas trayectorias oscilan en una dirección y escapan exponencialmente al infinito en la otra. Esta región embona de manera continua con las dos regiones vecinas; en la frontera izquierda (el eje  $-\Gamma$ ) está degenerado el hamiltoniano  $R_x + F_y$ . Las regiones R-R<sub>θ</sub> y R-M<sub>θ</sub> embonan en  $R$  sin degeneración, pero la frontera derecha de R-M<sub>θ</sub> es abierta: allí,  $M$  se cuenta como órbita separada porque, a diferencia de las tres regiones anteriores, sus trayectorias en una guía de ondas son espirales sobre un cilindro y están nuevamente acotadas. Esa frontera también alberga la pareja degenerada F-M<sub>±</sub> (cuyas trayectorias son espirales derechas o izquierdas sobre conos, y no son acotadas), y el hamiltoniano  $H$  de oscilador armónico isótropo que pertenece a la primera región.

### 8. Conclusiones

Habiendo detallado el “cómo”, queremos concluir nuevamente con el “porqué” de nuestra motivación original por exponenciar matrices hamiltonianas. Los hamiltonianos cuadráticos (de osciladores y sistemas ópticos paraxiales) son la primera aproximación a potenciales y a guías de onda más generales, que se tratan mediante desarrollo en series de perturbaciones y aberraciones de orden superior. También hemos soslayado en este estudio los términos lineales que éstos pueden contener, como los osciladores fuera de centro (que se encuentran en la misma órbita que los osciladores centrados bajo traslaciones), —o a la caída libre,  $(1/2)p^2 + gq, g \neq 0$ . Esta última es nueva (está tratada en la Ref. 24, Sección 10.2), pero sólo ocurre cuando  $q^2$  está ausente. El formalismo de matrices puede ampliarse con una columna para acomodar términos del hamiltoniano que son lineales en espacio fase; hace falta conocer solamente los coeficientes del desarrollo

en cuatro potencias de la función  $\mathbf{m}^{-1}(\exp(z\mathbf{m})-1)$ , y esto se puede obtener de (52)–(55) inmediatamente.

La clasificación de las órbitas hamiltonianas sirve, por una parte, para guiar la intuición sobre la naturaleza oscilatoria, hiperbólica, libre o espiral de las trayectorias, pero también para saber cuál es la forma más sencilla a la cual puede reducirse el hamiltoniano, y distinguir entre las dinámicas que no son equivalentes. Nuestros resultados para  $D = 1$  son bien conocidos, y para  $D = 2$  presentamos algunos nuevos. En principio, el mismo método puede aplicarse para  $D = 3$  y 4, puesto que las ecuaciones de eigenvalores son en  $\lambda^2$  y ecuaciones de hasta cuarto grado tienen solución analítica; sólo faltaría poder dividir la serie exponencial en 6 y 8 sub-series. Aparte del caso  $D = 3$  en mecánica, estas generalizaciones no parecen tener modelo que las requiera.

En un contexto más amplio, el resultado (52)–(55) para  $D = 2$  nos permite integrar la evolución de cualquier hamiltoniano, de oscilador en mecánica, o de guía de ondas paraxial en óptica, no solamente en mecánica clásica y en óptica geométrica, sino también en mecánica cuántica y en óptica ondulatoria. Porque existe un homomorfismo (módulo fases) entre sistemas hamiltonianos clásicos y sistemas cuánticos/ondulatorios. En éstos, la función de onda evoluciona bajo las transformadas integrales canónicas introducidas por Moshinsky y Quesne [25], en dos artículos contiguos titulados “Linear canonical transformations and their unitary representations”, y “Canonical transformations and matrix elements”, y un trabajo presentado en el XV Congreso de Solvay. En la Ref. 24, dedicamos los capítulos 9 y 10 a estas transformadas, cuyo núcleo (*kernel*) es la función de Green del sistema. Esta herramienta se aplica *verbatim* a la óptica paraxial ondulatoria, incluyendo las transformadas de Fresnel para la propagación libre de la óptica, la multiplicación por fases correspondiente a lentes delgadas, y la transformada fraccional de Fourier, bajo propagación en una guía de ondas armónica.

### Agradecimientos

Agradezco el apoyo de Guillermo Kröttsch con las figuras de este artículo, las conversaciones de Jorge A. Flores sobre exponenciación de matrices, la colaboración estrecha de Sameen Ahmed Khan en el problema de las órbitas del álgebra simpléctica, y la generosidad del proyecto DGAPA–UNAM IN112300 *Óptica Matemática*.

1. D.E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Vol. 1: *Fundamental Algorithms* (3<sup>a</sup> edición, Addison Wesley, Reading, Mass., 1997).
2. E.J. Mastacusa, *Proc. IEEE (Letters)* **57** (1969) 1328; M. Vidyasagar, *IEEE Trans. Automatic Control* **15** (1970) 600; Y.L. Kuo y M.L. Liou, *IEEE Trans. Automatic Control* **16** (1971) 521.
3. H.M. Ozaktas, Z. Zalevsky, y M. Alper Kutay, *The Fractional Fourier Transform* (John Wiley, Chichester, 2001).
4. R. Simon y K.B. Wolf, *J. Opt. Soc. Am. A* **17** (2000) 342; R. Simon y K.B. Wolf, *J. Opt. Soc. Am. A* **17** (2000) 2368.
5. S.A. Khan y K.B. Wolf, *J. Opt. Soc. Am. A* **19** (2002) 2436.
6. G. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 301; G. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 691; G. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fís.* **36** (1989) 478; G. Krötzsch y K.B. Wolf, *Rev. Mex. Fís.* **36** (1990) 724; K.B. Wolf y G. Krötzsch, *Eur. J. Phys.* **16** (1995) 14; G. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fís.* **41** (1995) 229; G. Torres del Castillo y J.L. Calvario Acócal, *Rev. Mex. Fís.* **43** (1997) 1630. G. Torres del Castillo y C.J. Pérez Ballinas, *Rev. Mex. Fís.* **46** (2000) 220; G. Torres del Castillo y A. Bernal Bautista, *Rev. Mex. Fís.* **46** (2000) 551.
7. H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1950); A. Gerrard y J.M. Burch, *Introduction to Matrix Methods in Optics* (Wiley, New York, 1975) —y muchos libros más recientes.
8. A.J. Dragt, *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A* **258** (1987) 339.
9. S. Steinberg, “Lie series, Lie transformations, and their applications”. En: *Lie Methods in Optics*, Ed. por J. Sánchez-Mondragón y K.B. Wolf. Lecture Notes in Physics, Vol. 250 (Springer Verlag, Heidelberg, 1986) Capítulo 3, p. 45; A.J. Dragt, E. Forest y K.B. Wolf, Foundations of a Lie algebraic theory of geometrical optics, *ibid.* Capítulo 4, p. 105.
10. H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics* (3<sup>a</sup> Edición, Dover, Nueva York, 1960).
11. R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications* (Wiley, Nueva York, 1974).
12. M. Kauderer, *Symplectic Matrices, First Order Systems and Special Relativity* (World Scientific, Singapur, 1994).
13. P. Dennerly y A. Krzywicki, *Mathematics for Physicists* (Harper & Row, Nueva York, 1967), p. 158.
14. A.J. Laub y K. Meyer, Canonical forms for symplectic and hamiltonian matrices, *Cel. Mech.* **9** (1974) 213.
15. M. Moshinsky y P. Winternitz, *J. Math. Phys.* **21** (1980) 1667.
16. J. Patera, R.T. Sharp, P. Winternitz, y H. Zassenhaus, *J. Math. Phys.* **18** (1977) 2259; J. Patera, P. Winternitz, y H. Zassenhaus, *J. Math. Phys.* **24** (1983) 1973.
17. R. Simon, E.C.G. Sudarshan, y N. Mukunda, *Phys. Rev. A* **31** (1985) 2419; R. Simon y N. Mukunda, *J. Opt. Soc. Am. A* **17** (2000) 342.
18. G. Nemeş y A.E. Siegman, *J. Opt. Soc. Am. A* **11** (1994) 2257.
19. P.A.M. Dirac, A remarkable representation of the 3+2 de Sitter group, *J. Math. Phys.* **4** (1963) 901
20. C. Fronsdal, *Rev. Mod. Phys.* **37** (1965) 201.
21. T.O. Philips y E.P. Wigner, De Sitter space and positive energy, en: *Group Theory and its Applications*, Ed. por E.M. Loeb (Academic Press, Nueva York, 1968), p. 631.
22. J.P. Gazeau y M. Hans, *J. Math. Phys.* **29** (1988) 2533.
23. Los grupos simplécticos  $\text{Sp}(2D, \mathfrak{R})$  fueron bautizados *simplécticos* por Hermann Weyl (véase [10]), con *συμπλεκτικός*, epíteto formado con el prefijo *σύν-* y la palabra *+πλέκειν*, que significa tejer, trenzar, o —de la misma raíz, *plegar*— para expresar su imbricada naturaleza.
24. K.B. Wolf *Integral Transforms in Science and Engineering* (Plenum Publ. Corp., Nueva York, 1979).
25. C. Quesne y M. Moshinsky, *J. Math. Phys.* **12** (1971) 1772; M. Moshinsky y C. Quesne, *J. Math. Phys.* **12** (1971) 1780; M. Moshinsky y C. Quesne, Oscillator systems, en: *Proceedings of the 15th Solvay Conference in Physics (1970)* (Gordon and Breach, New York, 1974).