

La auto-interacción alineal de un modo normal de Rossby en un océano rectangular

DAVID SERRANO, FEDERICO GRAEF y ALEJANDRO PARES-SIERRA

Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE)
Apdo. Postal 2732, Ensenada, B. C. 22800, Mézico

(Manuscrito recibido 16 de nov., 1994; aceptado en forma final 25 de mayo, 1995)

RESUMEN

Se estudia la auto-interacción de un modo normal de Rossby en una cuenca rectangular por medio de un modelo analítico y uno numérico. La auto-interacción a primer orden produce un forzamiento transitorio con el doble de la frecuencia del modo y un forzamiento estacionario. El forzamiento estacionario tiene como respuesta dos giros: uno anticiclónico en la parte norte de la cuenca y el otro ciclónico en la parte sur. La respuesta directa al forzamiento transitorio no satisface la condición a la frontera de flujo normal cero en las paredes meridionales. El fluido se ajusta generando ondas de Rossby, de tal forma que la suma de la función corriente de estas ondas (solución homogénea) y la función corriente forzada resulte nula en las paredes. Entre las componentes de la solución perturbativa a primer orden, la que tiene mayor importancia es la solución estacionaria. Los términos advectivos juegan un papel decisivo en la circulación de la cuenca si ésta es relativamente pequeña; por el contrario, para cuencas grandes los términos alineales tienen poco peso. En los resultados del modelo numérico se aprecia un desfase en la función corriente respecto a la solución analítica, presumiblemente por el efecto de la discretización en el modelo numérico. La solución analítica hasta primer orden difiere apreciablemente de la solución numérica alineal conforme la amplitud de la condición inicial se incrementa, indicándonos que la solución analítica es válida para números de β -Rossby pequeños.

ABSTRACT

The self-interaction of a Rossby normal mode in a rectangular basin is studied by means of an analytical and a numerical model. The analytical approach is based on perturbation methods. At first order in the nonlinearities, the self-interaction produces a steady forcing and a transient forcing oscillating at twice the frequency of the mode. Both the steady and the transient forcing can never be resonant. The response to the steady forcing has an anticyclonic gyre in the northern half of the basin and a cyclonic one in the southern half. The direct response to the transient forcing does not satisfy the boundary condition of no normal flow at the meridional walls. The fluid then adjusts by generating free Rossby waves (homogeneous solution) to balance out the forced flow normal to the walls. Among the components of the perturbative solution at first order, the steady solution is the most important one. The advective terms in the QG potential vorticity equation play an important role in the circulation of the basin if this is relatively small; on the contrary, for relatively big basins the nonlinear terms are not important. For small amplitudes, the numerical solution agrees with the analytical solution, except for a delay in the period, i.e. the period of the numerical solution is slightly larger (order 10% for the cases run here) than the period of the analytical solution. This is presumably due to the effect of the discretization in the numerical model which leads to a difference between the analytical and numerical frequency of a Rossby wave. The solution to first order differs appreciably from the numerical solution as the amplitude of the normal mode (initial condition) is increased, indicating that the analytical solution is valid for small β -Rossby numbers.

I. Introducción

El estudio de la circulación oceánica en una cuenca cerrada ha sido el eje principal en el que se ha basado el análisis de una gran variedad de modelos oceánicos que tienen por forzamiento el esfuerzo estacionario del viento. Trabajos como los realizados por Stommel (1948) y Munk (1950) han sido de gran importancia para lograr un mayor entendimiento de la circulación oceánica a gran escala.

La respuesta del océano a un forzamiento con dependencia temporal puede ser discutida en términos de los modos normales de oscilación (Pedlosky, 1987). El primero en discutir la circulación estacionaria producida por la auto-interacción de un modo normal de Rossby en una cuenca rectangular fue Pedlosky (1965). Sin embargo, la auto-interacción de un modo también produce un forzamiento transitorio o dependiente del tiempo que oscila con una frecuencia del doble de la frecuencia del modo. La respuesta a este forzamiento, hasta donde sabemos, no ha sido estudiada. Un resultado interesante es que dicho forzamiento no puede ser resonante.

El estudio de la solución completa a primer orden de la auto-interacción de un modo normal de Rossby permite comparar la solución estacionaria con la transitoria, y la solución hasta primer orden con la solución que arroja un modelo numérico. El principal resultado es que entre las componentes de la solución perturbativa a primer orden, la que tiene mayor importancia es la solución estacionaria.

El presente trabajo tiene como objetivo el estudiar la auto-interacción alinear débil de los modos normales de Rossby en un océano ideado como una caja con tapa rígida y fondo plano. Se hace uso de un modelo analítico y uno numérico, comparando sus resultados. En ambos modelos la dinámica es cuasi-geostrófica y la ecuación gobernante es la ecuación de vorticidad potencial cuasi-geostrófica (EVPCG). Se hace uso de una variante del modelo empleado por Holland (1978), consistiendo en un modelo de una sola capa y sin forzamiento. Para la parte analítica se emplea un método como el desarrollado por Graef-Ziehl (1990).

La organización del trabajo es la siguiente: En la sección II se presenta la formulación del problema, así como la solución analítica a orden líder. En la sección III el problema a primer orden es resuelto, haciendo énfasis en que los términos alineales juegan un papel más importante para cuencas relativamente pequeñas. Los resultados gráficos del problema lineal y alinear se muestran en la sección IV. En la sección V se describe el modelo numérico empleado, así como los resultados que se obtienen para el caso lineal y alinear de los modos normales de Rossby. Finalmente la sección VI lo integran las conclusiones.

II. Formulación del problema y solución a orden líder

El sistema de coordenadas es cartesiano con x hacia el Este y y hacia el Norte. La ecuación gobernante es la ecuación de vorticidad potencial cuasi-geostrófica (Pedlosky, 1987), que en un océano barotrópico con tapa rígida y fondo plano es

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} + J(\psi, \nabla^2 \psi) = 0 \quad (2.1)$$

En (2.1) t es el tiempo, ψ es la función corriente cuasi-geostrófica, β el gradiente en la dirección norte de la vorticidad planetaria, J representa el operador Jacobiano $J(a, b) = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x}$ y ∇^2 es el operador Laplaciano horizontal.

La condición de contorno es de que no exista flujo normal en las paredes del océano caja. En

el caso que nos ocupa, un océano barotrópico con tapa rígida en una región simplemente conexa, la condición de contorno puede escribirse como

$$\psi = 0 \text{ en } x = 0, X_0 \text{ y } y = 0, Y_0, \quad (2.2)$$

donde X_0 y Y_0 son las dimensiones del océano en x y y .

Buscaremos una solución analítica de (2.1) y (2.2) por medio de una expansión perturbativa

$$\psi = \psi_0 + \epsilon \psi_1 + \epsilon^2 \psi_2 + \dots$$

En la expresión anterior $\epsilon = 1$ juega el papel de un parámetro de ordenamiento. Estrictamente hablando, si se usaran variables adimensionales ϵ sería el número de β -Rossby, $\epsilon = \frac{U}{\beta L^2}$, donde U y L son escalas de velocidad y de longitud horizontal respectivamente. Supondremos que el término alineal en (2.1) es $O(\epsilon)$ y entonces escribimos (2.1) como

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \epsilon J(\psi, \nabla^2 \psi) = 0. \quad (2.3)$$

El problema a orden cero es

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi_0}{\partial t} + \beta \frac{\partial \psi_0}{\partial x} = 0 \quad (2.4)$$

$$\text{y } \psi_0 = 0 \text{ @ } x = 0, X_0 \text{ y } y = 0, Y_0, \quad (2.5)$$

que es el problema lineal de los modos normales de Rossby en una cuenca cerrada (Longuet-Higgins, 1964; Pedlosky, 1987).

La solución que escogemos a orden líder es un modo normal de Rossby (Pedlosky, 1987), esto es

$$\psi_0 = A \cos(\sigma) \text{sen}(kx) \text{sen}(ly), \quad (2.6)$$

donde:

$$\sigma = px + \omega t, \quad p = \frac{\beta}{2\omega}, \quad k = \frac{m\pi}{X_0}, \quad l = \frac{n\pi}{Y_0}.$$

La frecuencia del modo se expresa como

$$\omega = \frac{-\beta}{2(k^2 + l^2)^{1/2}}. \quad (2.7)$$

Cada modo normal consiste de una onda viajera con rapidez de fase dirigiéndose hacia el oeste, modulada por el producto de funciones seno que satisfacen las condiciones a la frontera. La solución (2.6) puede escribirse usando identidades trigonométricas como la suma de cuatro

ondas de Rossby (OR) planas

$$\begin{aligned} \psi_o = \frac{A}{4} \{ & \cos(\vec{K}_1 \cdot \vec{K} + \omega t) + \cos(\vec{K}_3 \cdot \vec{X} + \omega t) - \\ & \cos(\vec{K}_2 \cdot \vec{X} + \omega t) - \cos(\vec{K}_4 \cdot \vec{X} + \omega t) \} \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde

$$\begin{aligned} \vec{K}_1 = (p - k, l), \quad \vec{K}_3 = (p + k, -l), \\ \vec{K}_2 = (p + k, l), \quad \vec{K}_4 = (p - k, -l), \end{aligned} \quad (2.9)$$

son los vectores número de onda de las OR, $\vec{X} = (x, y)$ y

$$\omega = \Omega(\vec{K}_i) = \Omega(k_i, l_i) \equiv \frac{\beta k_i}{k_i^2 + l_i^2}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (2.10)$$

III. Solución al problema a primer orden

Las ecuaciones de perturbación a primer orden son

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi_1}{\partial t} + \beta \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = -J[\psi_o, \nabla^2 \psi_o] \quad (3.1)$$

$$\psi_1 = 0 \quad @ \quad x = 0, X_o \quad \text{y} \quad y = 0, Y_o. \quad (3.2)$$

La única pero importante diferencia entre el problema a primer orden y el problema a orden cero es el término no homogéneo en el lado derecho de (3.1).

El cálculo del término no homogéneo o forzamiento para ψ_1 es algebraicamente laborioso pero directo. La forma en que lo obtuvimos fue usar (2.8) y calcular las interacciones alineales entre las cuatro ondas que conforman el modo. Por ejemplo, la interacción de la onda 1 con la onda 4 y la onda 2 con la onda 3 son cero, debido a que sus longitudes de onda son iguales. El resultado final de estas interacciones es

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla^2 \psi_1}{\partial t} + \beta \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = & -\frac{TA^2}{16} \{ \cos(2(\sigma + ly)) - \cos(2(\sigma - ly)) \} \\ & - \frac{EA^2}{16} \{ \cos(2(ly - kx)) - \cos(2(ly + kx)) \}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde:

$$E = \frac{\beta^2 kl}{\omega^2} = \frac{4mn\pi^4}{X_o Y_o} \left(\frac{m^2}{X_o^2} + \frac{n^2}{Y_o^2} \right) \quad \text{y} \quad T = \frac{2\beta k^2 l}{\omega}.$$

Notamos que el forzamiento consta de dos términos, cada uno con amplitud proporcional al cuadrado de A : el primero con dependencia temporal y espacial (término transitorio) oscilando con el doble de la frecuencia de la solución a orden líder, y el segundo sólo con dependencia espacial (término estacionario). Cabe destacar que sólo las interacciones de la onda 1 con la onda 3 y de la 2 con la 4 contribuyen al término estacionario, y las interacciones de la 1 con la 2 y de la 3 con la 4 contribuyen al término transitorio.

El problema para ψ_1 es inhomogéneo pero lineal y por tanto la solución o respuesta para cada término inhomogéneo puede ser considerada por separado, sumando después sus resultados. La solución para ψ_1 se escribe como

$$\psi_1 = \psi_{1h} + \psi_{1pe} + \psi_{1pt}, \quad (3.4)$$

donde ψ_{1h} , ψ_{1pe} y ψ_{1pt} es una solución homogénea, una solución particular para el forzamiento estacionario y una solución particular para el forzamiento transitorio de (3.3), respectivamente.

III.1 Solución Estacionaria

La ecuación diferencial que satisface ψ_{1pe} es

$$\begin{aligned} \beta \frac{\partial \psi_{1pe}}{\partial x} &= -\frac{EA^2}{16} \{ \cos(2ly - kx) - \cos(2ly + kx) \} \\ &= -\frac{EA^2}{8} \text{sen}(2ly) \text{sen}(2kx), \end{aligned} \quad (3.5)$$

la cual al ser integrada en x se obtiene

$$\psi_{1pe} = \frac{\beta l A^2}{16\omega^2} [\text{sen}(2ly) \cos(2kx) + f(y)], \quad (3.6)$$

donde $f(y)$ es una función arbitraria de y . Si escogemos $f(y) = -\text{sen}(2ly)$ entonces $\psi_{1pe} = 0$ en $x = 0, X_o$ y también en $y = 0, Y_o$. Por lo tanto

$$\psi_{1pe} = \frac{\beta l A^2}{16\omega^2} \text{sen}(2ly) [\cos(2kx) - 1]. \quad (3.7)$$

La solución particular estacionaria correspondiente al primer modo, i.e. $m = 1, n = 1$, presenta dos giros a través de la cuenca. El giro en la zona norte muestra circulación anticiclónica mientras que el giro en la zona sur tiene circulación ciclónica (Fig. 1). La intensidad de ambos depende de la amplitud dada al problema lineal. Si la amplitud del modo se escoge como

$$A = \frac{8\omega^2}{\beta l}, \quad (3.8)$$

entonces la solución estacionaria tiene igual importancia que la solución lineal, ya que para esta amplitud, la máxima amplitud de ψ_{1pe} es igual a A .

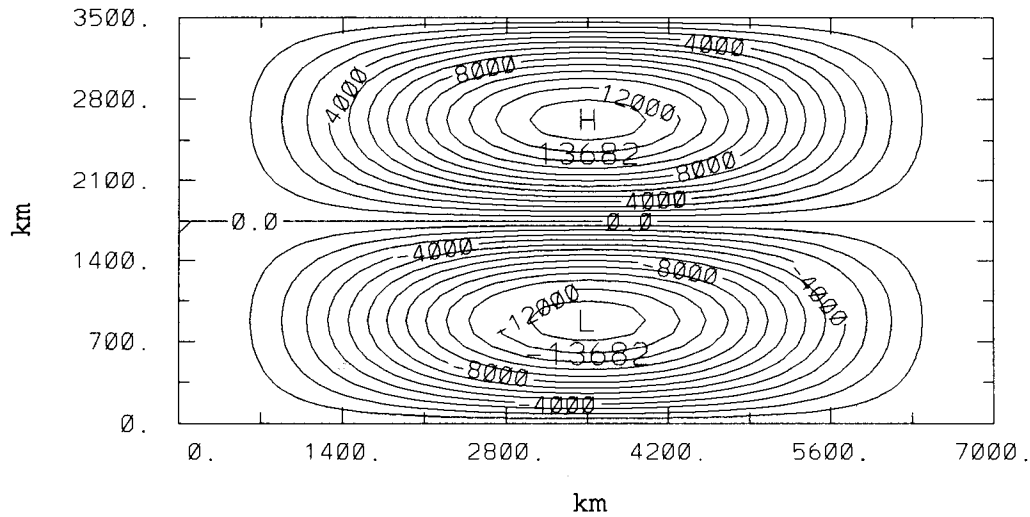


Fig. 1. Contornos de $\psi_{1_{pe}}$, para una cuenca de $X_o = 7000$ km por $Y_o = 3500$ km, centrada en los 45° latitud norte.

Nótese que las amplitudes en la Figura 2b, que es una cuenca con dimensiones siete veces más grande que la Figura 2a, son 100 veces más grandes. Sin embargo, la importancia que tiene la $\psi_{1_{pe}}$ para esta cuenca es prácticamente despreciable, indicándonos que para cuencas lo suficientemente grandes los términos advectivos tienen un papel poco importante. Por otra parte, en ambas figuras se puede apreciar la intercepción de las diferentes curvas con la línea recta, indicándonos que para esa amplitud la solución a orden líder y la solución particular estacionaria tienen el mismo peso, perdiendo el carácter de solución perturbativa para amplitudes mayores a la amplitud de intercepción (3.8).

Por otra parte Marshall (1993) presenta una solución particular de los modos de Fofonoff para una cuenca rectangular rotada respecto a los círculos de latitud (i.e. sus costas no están alineadas en las direcciones Norte-Sur, Este-Oeste) y sin rotar. Es interesante que su solución en la cuenca no rotada, al igual que nuestra solución particular estacionaria, presenta dos giros: uno anticiclónico en la parte superior de la cuenca y el otro ciclónico en la parte inferior. Tomando en cuenta que los modos de Fofonoff son soluciones estacionarias exactas de la EVPCG y nuestra solución $\psi_{1_{pe}}$ satisface el término estacionario de la EVPCG perturbada hasta primer orden, es posible que haya alguna relación entre estas soluciones, aunque por el momento esto es sólo una especulación.

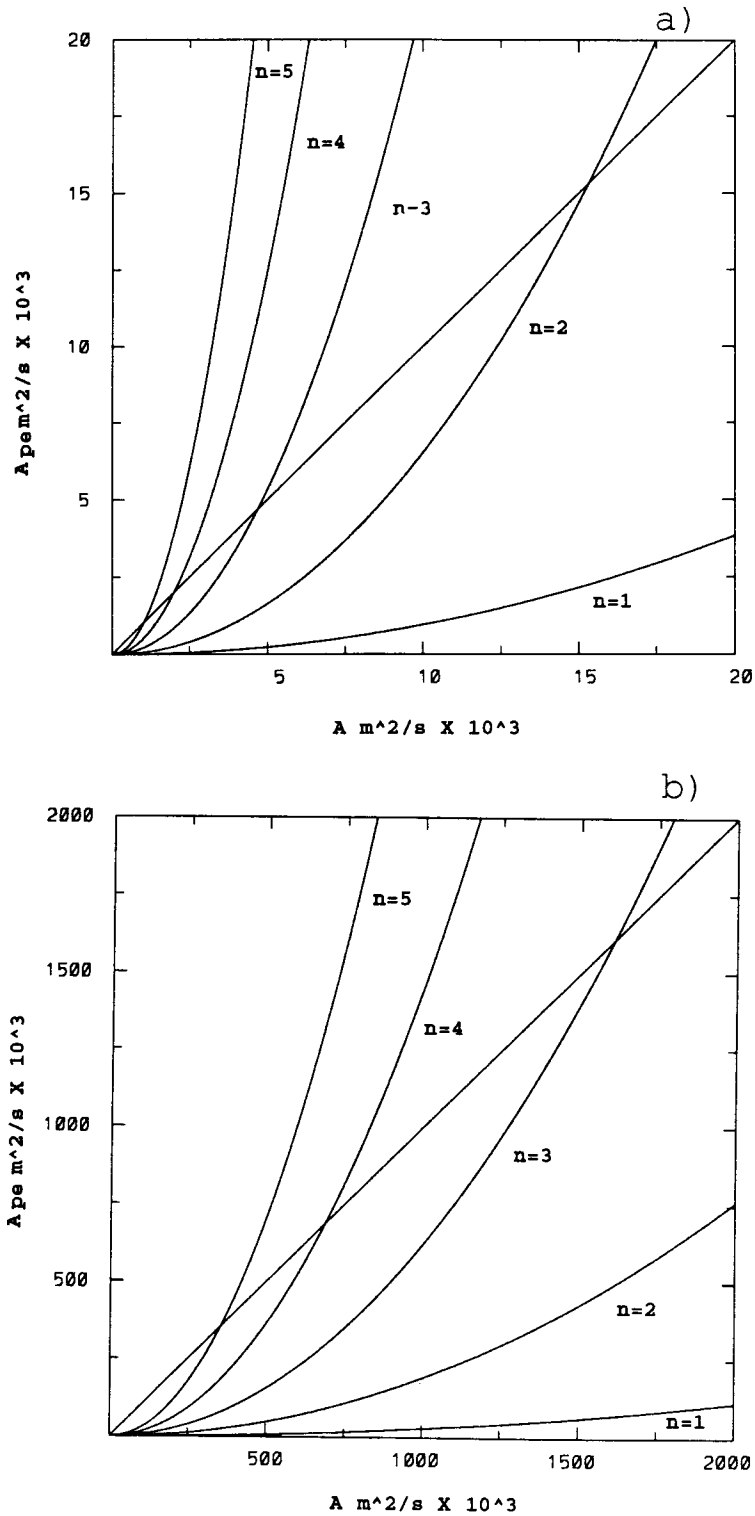


Fig. 2. a) A (amplitud de ψ_o) vs. $A_{pe} = \frac{2EA^2X_o}{16\beta m\pi}$ (máxima amplitud de ψ_{1pe}) como función de n y A ; $m = 1$ y n toma los valores de 1 a 5 para una cuenca $X_o = 1000$ km por $Y_o = 500$ km centrada en los 32° latitud norte. La intercepción de las diferentes curvas con la línea recta nos indica que para esa amplitud ψ_o y ψ_{1pe} tienen igual importancia. b) Como en a, para una cuenca de $X_o = 7000$ km por $Y_o = 3500$ km centrada en los 45° latitud norte.

III.2 Solución Transitoria

La ecuación que satisface $\psi_{1_{pt}}$ es

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi_{1_{pt}}}{\partial t} + \beta \frac{\partial \psi_{1_{pt}}}{\partial x} = \frac{TA^2}{8} \text{sen}(2\sigma) \text{sen}(2ly), \quad (3.9)$$

habiendo reescrito el término no homogéneo utilizando una identidad trigonométrica.

Se propone una solución periódica forzada de (3.9) de la forma

$$\psi_{1_{pt}} = B \cos(2\sigma) \text{sen}(2ly). \quad (3.10)$$

Para que (3.10) sea solución de (3.9) se requiere que

$$B = \frac{TA^2}{8 \left[\frac{\beta^2}{\omega} + 8\omega l^2 \right]}, \quad (3.11)$$

quedando completamente determinada $\psi_{1_{pt}}$. La solución particular transitoria presenta un desfase de 90° respecto al forzamiento, además de no satisfacer las condiciones de contorno en las fronteras meridionales ($x = 0, X_o$). Por lo tanto $\psi_{1_{pt}}$ debe ser suplementada por una solución de la ecuación homogénea asociada a (3.3), requiriendo que ambas soluciones al ser sumadas satisfagan las condiciones de contorno.

De (3.11) se ve claramente que el denominador de B nunca se anula, i.e. el forzamiento transitorio no puede ser resonante. En otras palabras, la frecuencia del forzamiento, 2ω , nunca puede ser igual a la frecuencia de una OR libre con vector número de onda igual al del forzamiento, es decir $2\omega \neq \Omega \left(\frac{\beta}{\omega}, \pm 2l \right)$. El denominador en (3.11) se puede escribir como

$$\frac{\beta^2}{\omega} + 8\omega l^2 = \left[2\omega - \Omega \left(\frac{\beta}{\omega}, \pm 2l \right) \right] \left[\left(\frac{\beta}{\omega} \right)^2 + (2l)^2 \right].$$

Esto significa que, para amplitudes pequeñas, el flujo transitorio es neutralmente estable a las OR que lo produjeron (Graef y Magaard, 1994) o que no hay intercambio apreciable de energía entre el flujo transitorio y las ondas que lo originaron.

III.3 Solución Homogénea

La solución homogénea ψ_{1_h} satisface

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi_{1_h}}{\partial t} + \beta \frac{\partial \psi_{1_h}}{\partial x} = 0. \quad (3.12)$$

Nos interesa una solución de la ecuación (3.12), tal que

$$\psi_{1_h} + \psi_{1_{pt}} = 0 \text{ en } x = 0, X_o \text{ y } y = 0, Y_o. \quad (3.13)$$

Proponemos como solución homogénea

$$\psi_{1h} = \text{sen}(2ly)\Phi(x, t), \quad (3.14)$$

que al ser sustituida en (3.12) resulta

$$\partial_t \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 4l^2 \Phi \right] + \beta \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0. \quad (3.15)$$

Para resolver (3.15) notamos que la onda forzada ψ_{1pt} tiene frecuencia 2ω por lo que se sugiere que Φ sea escrita como la superposición de dos OR planas de frecuencia 2ω y que tome valores reales, i.e.

$$\Phi = ce^{i(K_1x+2\omega t)} + c^* e^{-i(K_1x+2\omega t)^*} + de^{i(K_2x+2\omega t)} + d^* e^{-i(K_2x+2\omega t)^*}, \quad (3.16)$$

donde c y d son constantes complejas y el asterisco denota el complejo conjugado (c.c.). La relación de dispersión que satisface cada onda es

$$2\omega = \frac{\beta K}{K^2 + 4l^2}, \quad (3.17)$$

y K_1 y K_2 son las raíces de la ecuación cuadrática que resulta para K de (3.17); recordando que $p = \beta/(2\omega)$, tenemos

$$K_1, K_2 = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - 4l^2}. \quad (3.18)$$

Para encontrar c y d aplicamos (3.13). Obviamente $\psi_{1pt} + \psi_{1h} = 0$ en $y = Y_o$ y en $y = 0$. Imponiendo $\psi_{1pt} + \psi_{1h} = 0$ en $x = 0, X_o$ resulta

$$\Phi = -\frac{B}{2} \left\{ \frac{e^{i2pX_o} - e^{iK_2X_o}}{e^{iK_1X_o} - e^{iK_2X_o}} \right\} [e^{i(K_1x+2\omega t)} - e^{i(K_2x+2\omega t)}] - \frac{B}{2} e^{i(K_2x+2\omega t)} + c.c., \quad (3.19)$$

Ahora regresemos a la expresión (3.18) para determinar K_1 y K_2 , que dependiendo del valor que tome el radicando R consta de tres casos:

Primer caso: $R < 0 \Rightarrow K_1 = K_2^*$, definiendo

$$K_1 = a + ib_1 \text{ y } K_2 = a - ib_1 \text{ donde } a = \frac{p}{2} \text{ y } b_1 = \sqrt{-a^2 + 4l^2},$$

reemplazando K_1 y K_2 en (3.19) por sus expresiones correspondientes en términos de a y b_1 y haciendo unas cuantas manipulaciones obtenemos la expresión de $\Phi(x, t)$ para el caso $K_1 = K_2^*$

$$\Phi(x, t) = -B \frac{\text{senh}(b_1 x)}{\text{senh}(b_1 X_o)} [\cos(2pX_o + 2\omega t + a(x - X_o)) - e^{b_1 X_o} \cos(2\omega t + ax)] - B e^{b_1 x} \cos(2\omega t + ax). \quad (3.20)$$

Segundo caso: $R > 0 \Rightarrow K_1 \neq K_2$, ahora definimos

$$K_1 = a + b_2 \text{ y } K_2 = a - b_2 \text{ donde } b_2 = \sqrt{a^2 - 4l^2}.$$

Sustituyendo K_1 y K_2 en (3.19) con sus expresiones en términos de a y b_2 y de nueva cuenta haciendo un poco de álgebra se tiene:

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) = -B \frac{\text{sen}(b_2 x)}{\text{sen}(b_2 X_o)} [\cos(2pX_o + 2\omega t + a(x - X_o)) - \cos(2\omega t - b_2 X_o + ax)] - \\ B \cos[(a - b_2)x + 2\omega t]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Tercer caso: $R = 0 \Rightarrow K_1 = K_2 = K$, la solución propuesta (3.16) es una solución incompleta, proporcional a e^{iKx} . La otra solución linealmente independiente en este caso es proporcional a $x e^{iKx}$, por lo que la solución es ahora

$$\Phi(x, t) = g e^{i(Kx+2\omega t)} + g^* e^{-i(Kx+2\omega t)^*} + x h e^{i(Kx+2\omega t)} + x h^* e^{-i(Kx+2\omega t)^*}. \quad (3.22)$$

De nueva cuenta para obtener las constantes g y h se impone $\psi_{1pt} + \psi_{1h} = 0$ en $x = 0$ y en $x = X_o$, resultando

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) = -B \cos(ax + 2\omega t) - \frac{x B}{X_o} [\cos(2(pX_o + \omega t) + a(x - X_o)) \\ - \cos(ax + 2\omega t)]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Sustituyendo la relación de dispersión (2.7) en el radicando R para los tres casos, las desigualdades que resultan ($R < 0$, $R > 0$, y $R = 0$) son función sólo de las dimensiones de la cuenca X_o y Y_o al considerar el caso $m = n$. Resulta que $R < 0$ si y sólo si $Y_o < \sqrt{15}X_o$.

Al ver el globo terráqueo nos damos cuenta que las grandes cuencas como el Pacífico Norte, el Océano Índico o el Atlántico Norte en las que se tienen registros de ondas planetarias, las cuencas resultan ser más largas que anchas ($Y_o < X_o$) o al menos con dimensiones similares. Por lo tanto el primer caso, $R < 0$, es el más relevante desde el punto de vista oceanográfico (para $m = n$).

Finalmente la expresión de la solución homogénea considerando $K_1 = K_2^*$ es:

$$\begin{aligned} \psi_{1h} = -B \text{sen}(2ly) \times \\ \left\{ \frac{\text{senh}(b_1 x)}{\text{senh}(b_1 X_o)} [\cos(2pX_o + 2\omega t + a(x - X_o)) - e^{b_1 X_o} \times \right. \\ \left. \cos(2\omega t + ax)] + e^{b_1 x} \cos(2\omega t + ax) \right\}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Hay que hacer notar que la amplitud que tiene esta solución es B . Por último la solución a

primer orden se consigue al sumar (3.7), (3.10) y (3.24) i.e.

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= \psi_{1_{pe}} + \psi_{1_{pt}} + \psi_{1_h} \\
 &= \frac{\beta l A^2}{16\omega^2} \text{sen}(2ly) [\cos(2kx) - 1] + \\
 &\quad B \cos(2\sigma) \text{sen}(2ly) - \\
 &\quad B \text{sen}(2ly) \left\{ \frac{\text{senh}(b_1 x)}{\text{senh}(b_1 X_o)} [\cos(2pX_o + 2\omega t + a(x - X_o)) \right. \\
 &\quad \left. - e^{b_1 X_o} \cos(2\omega t + ax)] + e^{b_1 x} \cos(2\omega t + ax) \right\}. \tag{3.25}
 \end{aligned}$$

IV. Solución a orden líder y primer orden

En esta sección se presentan los contornos de la solución al problema a orden cero y a primer orden. Las dimensiones de la cuenca que se ha escogido son de 7000 km de largo por 3500 km de ancho centrada en los 45° latitud norte. La amplitud A de la función corriente al problema lineal es de 7.0×10^5 m²/s, que corresponde a una velocidad máxima geostrófica de 45 cm/s.

La solución a orden líder es sumamente regular, el campo de ψ_o presenta la deriva de los centros de alta y baja presión dirigiéndose hacia el oeste, representando giros anticiclónicos y ciclónicos respectivamente, alternándose para una misma área al transcurrir medio periodo de tiempo. El periodo de oscilación (analítico) del modo normal de Rossby es $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$, el cual para la cuenca anteriormente descrita es de 9.017 días considerando $m = n = 1$ (ver Fig. 3).

La solución perturbativa a primer orden es proporcional al cuadrado de la amplitud A e inversamente proporcional a las dimensiones de la cuenca; para amplitudes pequeñas y para cuencas grandes como el Pacífico y el Atlántico Norte la contribución que tiene la solución a primer orden es casi imperceptible; por el contrario, para amplitudes grandes y cuencas relativamente pequeñas la solución a primer orden tiene un peso considerable.

La contribución que aporta la solución transitoria más la solución homogénea a ψ_1 es mínima, ya que sus amplitudes son mucho menores que la amplitud de la solución particular estacionaria. La razón entre las amplitudes de $\psi_{1_{pe}}$ y $\psi_{1_{pt}}$ es expresada por:

$$\frac{A_{pe}}{B} = 1 + 3 \left(\frac{nX_o}{mY_o} \right)^2 > 1; \tag{4.1}$$

que para nuestro caso y en general para las razones $\frac{X_o}{Y_o} = 2$ con $n = m$ resulta ser igual a 13. La expresión (4.1) nos indica que el cociente entre estas amplitudes es mayor a 1; es decir, que entre las soluciones que conforman la solución a primer orden, la que tiene mayor importancia es la solución particular estacionaria.

El efecto que producen $\psi_{1_{pt}}$ y ψ_{1_h} a la solución a primer orden es el alargamiento y encogimiento de los dos giros de la solución estacionaria a intervalos de $T/4$, además de recorrer

ligeramente los centros de baja y alta presión en la dirección este-oeste.

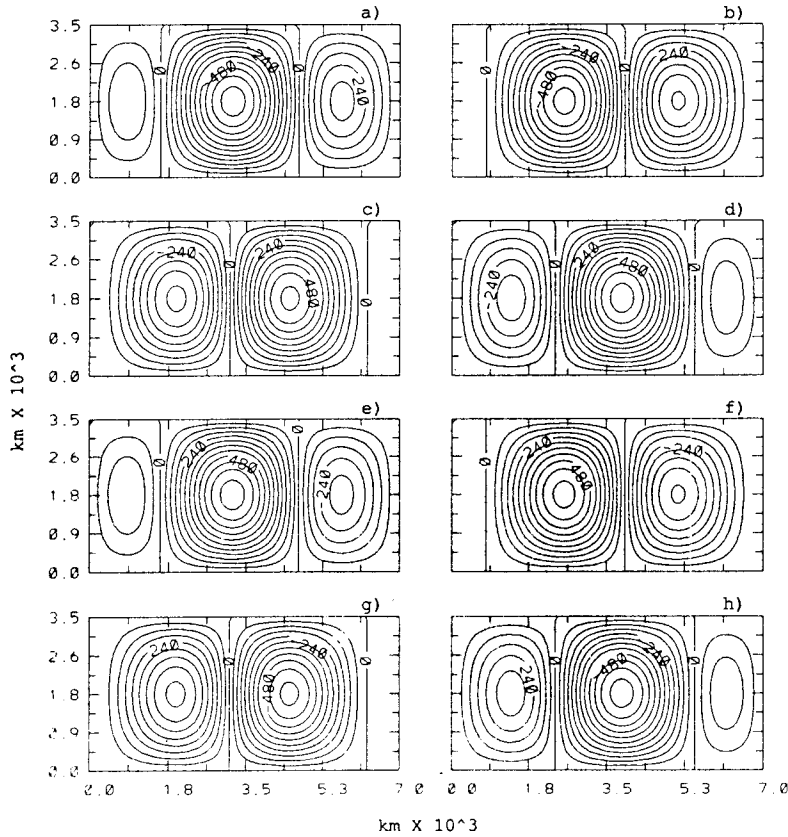


Fig. 3. Contornos instantáneos de ψ_0 separados por un octavo de periodo: a) $\psi_0(t = 0)$; b) $\psi_0(t = T/8)$; c) $\psi_0(t = 2T/8)$; d) $\psi_0(t = 3T/8)$; etc, etc. Los giros derivan hacia occidente. Parámetros: $\eta = \nu = 1$, $A = 7.0 \times 10^5 \text{ m}^2/\text{s}$, $T = 9.017 \text{ días}$, $\theta_0 = 45^\circ$ latitud norte, $X_0 = 7000 \text{ km}$ y $Y_0 = 3500 \text{ km}$.

La suma de $\psi_0 + \psi_1$ produce la compresión (expansión) del giro ciclónico (anticiclónico) en la parte superior de la cuenca, experimentando el efecto contrario la parte inferior, dando la sensación que los giros se “bambolean” conforme transcurre el tiempo. Este efecto es mucho más notorio conforme se incrementa la magnitud de A , ya que los términos advectivos tienen mayor importancia. En la Figura 4 apenas se alcanza a distinguir este efecto.

Una forma de ver la validez de la solución al problema a primer orden, es el comparar la norma entre el término forzante de la EVPCG perturbada a segundo orden (primer término no incluido) y uno de los términos que se incluyen en la ecuación a primer orden. En la Figura 5 se muestra el promedio, el máximo y el mínimo de la razón $\Gamma = \frac{\|J(\psi_0, \nabla^2 \psi_1) + J(\psi_1, \nabla^2 \psi_0)\|}{\beta \|\partial_x \psi_1\|}$ a lo largo de un periodo T para diferentes amplitudes y en una cuenca como la antes descrita.

La razón Γ , que es una función periódica en el tiempo de frecuencia 2ω , fue evaluada numéricamente debido a lo complejo que resultó el álgebra al calcular los Jacobianos del numerador.

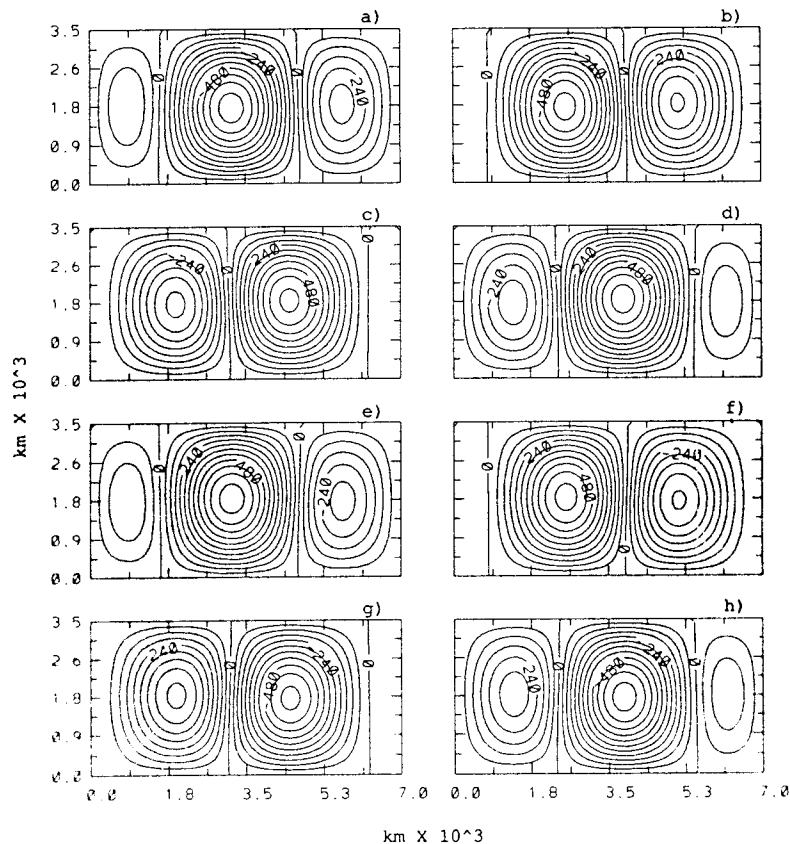


Fig. 4. Contornos instantáneos de $\psi_0 + \psi_1$ separados por un octavo de periodo T : a) $\psi_0 + \psi_1(t = 0)$; b) $\psi_0 + \psi_1(t = T/8)$; c) $\psi_0 + \psi_1(t = 2T/8)$; d) $\psi_0 + \psi_1(t = 3T/8)$; etc, etc. Parámetros como en Figura 3.

Como se puede ver, para las amplitudes de la Figura 5, que corresponden a velocidades geostróficas de 10 cm/s a 58 cm/s, Γ se mantiene entre 0.03 y 0.16, indicándonos que la solución a primer orden es bastante buena y que la contribución que tendría la solución a segundo orden estaría entre el 2% y el 16% dependiendo de la amplitud.

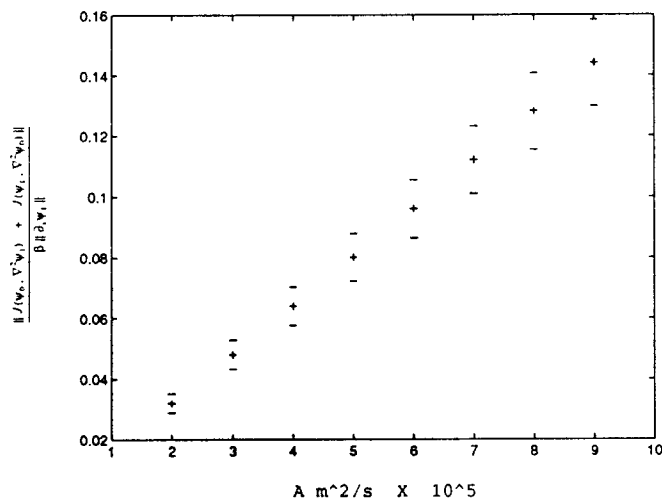


Fig. 5. Promedio, máximo y mínimo a lo largo de un periodo T de la razón $\Gamma = \frac{\|J(\psi_0, \nabla^2 \psi_1) + J(\psi_1, \nabla^2 \psi_0)\|}{\beta \|\partial_x \psi_1\|}$ para diferentes amplitudes, en una cuenca de 7000 km por 3500 km centrada en los 45° latitud norte.

V. Solución numérica

V.1. Modelo numérico

El modelo numérico resuelve la EVPCG empleando el esquema temporal de salto de rana. Esto es, la derivada en tiempo de la vorticidad relativa en la ecuación (2.1) es evaluada con una aproximación de segundo orden centrada en el tiempo, el resto de los términos de la ecuación se evalúan en el tiempo central; i.e.

$$\frac{(\nabla^2 \psi)^{n+1} - (\nabla^2 \psi)^{n-1}}{2\Delta t} = - \left\{ \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} + J(\psi, \nabla^2 \psi) \right\}^n,$$

donde los superíndices indican el tiempo donde está evaluado el término (ej. $f^n = f(t = t_0 + n\Delta t)$). En cada paso de tiempo se resuelve la ecuación de Poisson para ψ al tiempo $(n+1)$ con el forzamiento dado por los términos en los tiempos n y $n-1$ (ya conocidos), esto es $(\nabla^2 \psi)^{n+1} = F$, donde

$$F = (\nabla^2 \psi)^{n-1} - 2\Delta t \left\{ \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} + J(\psi, \nabla^2 \psi) \right\}^n. \quad (5.1)$$

La ecuación de Poisson es resuelta numéricamente en una malla equiespaciada, i.e. $\Delta x = \Delta y = \Delta s$ usando el "Fast Poisson Solver" descrito por Swarztrauber y Sweet (1975), el cual utiliza la transformada rápida de Fourier (FFT) en la dirección x seguida de una triangulación y sustitución hacia atrás, resolviendo la ecuación diferencial ordinaria que resulta en la dirección y . En el forzamiento F , el Jacobiano es calculado usando el método de Arakawa que asegura conservación de energía (Arakawa y Lamb, 1976).

V.2. Resultados

Al igual que el planteamiento analítico lineal, el problema lineal numérico se consigue omitiendo la advección de la vorticidad relativa, i.e. $J(\psi, \nabla^2 \psi) = 0$ en la ecuación (2.1). El problema alineal se consigue considerando la advección de la vorticidad relativa.

Hay que hacer notar que en ambos planteamientos se tiene un problema de valor inicial con condiciones a la frontera, y que para ambos la condición inicial no es solución exacta del problema numérico, debido, en el caso lineal, a la discretización que presenta el modelo, además que para el caso alineal la condición inicial la forma la solución lineal analítica; es por esta razón que esperamos se presente un ajuste de la solución numérica conforme transcurre el tiempo de integración.

En esta sección se presentan los contornos de la solución al problema numérico lineal y alineal. Los parámetros de la cuenca son iguales a los referidos en la sección IV. El campo de la función corriente lineal (ψ_{lin}) presenta, al igual que la solución analítica a orden líder, la deriva de los centros de alta y baja presión dirigiéndose hacia occidente, representando giros anticiclónicos y ciclónicos respectivamente. El periodo de oscilación del modo de Rossby, que es igual al periodo de cualquiera de las cuatro OR que lo conforman, difiere en menos del 9% del que se ha calculado analíticamente. Esto es notorio al dibujar los contornos de la función corriente en un periodo analítico T , mostrando un ligero desfase (Fig. 6). El retraso que se observa (comparar Fig. 6a con Fig. 6e) lo podemos atribuir a que la relación de dispersión de las OR que se obtiene de

forma analítica y de forma numérica difieren, y por tanto también su rapidez de fase (en este caso la frecuencia numérica es menor que la analítica).

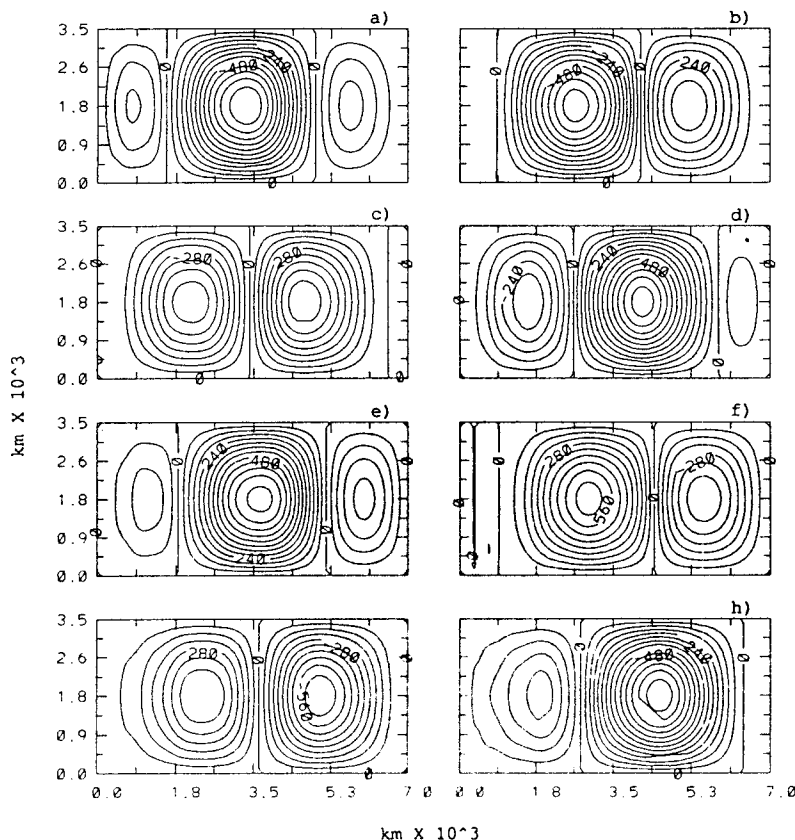


Fig. 6. Contornos instantáneos de ψ_{lin} (obtenidos numéricamente) separados por un octavo de periodo analítico T a partir del décimo periodo analítico: a) $\psi_{lin}(t = 10T)$; b) $\psi_{lin}(t = (10 + 1/8)T)$; c) $\psi_{lin}(t = 10 + 2/8)T$; d) $\psi_{lin}(t = (10 + 3/8)T)$; etc, etc. Parámetros como en Figura 3.

Wajsowicz (1985) estudia el efecto de discretizar las ondas planetarias en las mallas Arakawa tipo B y C, encontrando que para la malla B la frecuencia y la rapidez de fase es menor comparada con la que se obtiene de forma analítica. Esta diferencia básicamente depende del tipo de malla, de la resolución de la misma y de la longitud de onda que se quiere modelar: para mallas con "buena" resolución y para ondas muy largas la diferencia entre ambas relaciones de dispersión es imperceptible.

El campo de la función corriente alineal (ψ_{alin}) (Fig. 7), muestra la deriva hacia occidente de los giros ciclónicos y anticiclónicos, presentando más claramente el efecto de los términos alineales, haciéndose manifiestos al verse deformados de forma más acentuada los giros en comparación a la solución analítica hasta primer orden. En el caso lineal y alineal numérico, los giros que arriban a la frontera occidental presentan una ligera deformación, producto de la posible generación de ondas cortas de Rossby. Wajsowicz (1985) sugiere que la frontera occidental en su modelo numérico es fuente de ondas planetarias cortas, pero pobremente resueltas, cuya velocidad de grupo se dirige hacia oriente.

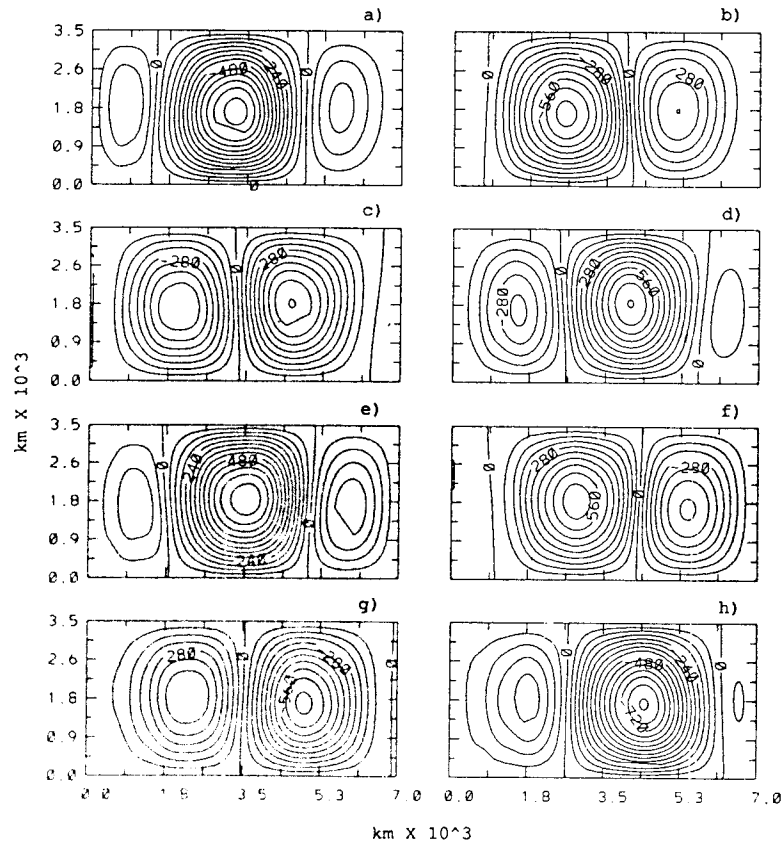


Fig. 7. Contornos instantáneos de ψ_{ali} (obtenidos numéricamente) separados por un octavo de periodo analítico T a partir del décimo periodo analítico: a) $\psi_{ali}(t = 10T)$; b) $\psi_{ali}(t = (10 + 1/8)T)$; c) $\psi_{ali}(t = (10 + 2/8)T)$; d) $\psi_{ali}(t = (10 + 3/8)T)$; etc, etc. Parámetros como en Figura 3.

Al promediar la función corriente de la cuenca en un periodo T (analítico) en el modelo numérico para el caso alineal, lo que se pretende recuperar es la señal estacionaria. Sabemos de la solución analítica a primer orden que la parte estacionaria para el caso alineal con intervalos de $T/4$ a partir del décimo periodo T . Para los tiempos de $10T$ y $11T$ (Figs. 8a y 8e respectivamente) se puede distinguir en la cuenca la presencia de dos giros: uno en la parte superior con circulación anticiclónica y otro en la parte inferior con circulación ciclónica, mostrando gran semejanza a los giros que muestra la solución particular estacionaria (Fig. 1). Tal vez la comparación sería mejor si se usara el periodo numérico para promediar ψ_{alin} , ya que la parte oscilatoria sería eliminada en forma más precisa.

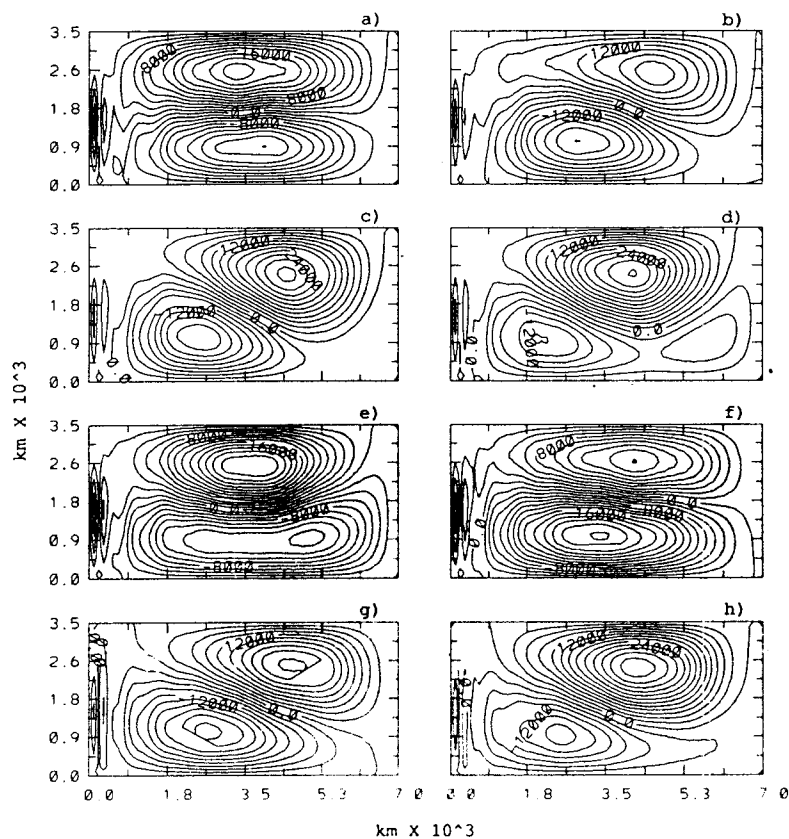


Fig. 8. Promedio instantáneo de ψ_{ali} (obtenidos numéricamente) a partir del décimo periodo T , separados por un cuarto de periodo analítico: a) $\bar{\psi}_{ali}(t = 10T)$; b) $\bar{\psi}_{ali}(t = (10 + 1/4)T)$; c) $\bar{\psi}_{ali}(t = (10 + 2/4)T)$; d) $\bar{\psi}_{ali}(t = (10 + 3/4)T)$; etc, etc. Parámetros como en Figura 3.

V.9 Solución analítica vs. solución numérica

Uno de los objetivos de este trabajo es el comparar la solución perturbativa hasta primer orden de la EVPCG con la solución "completa" que se obtiene del modelo numérico. Para cumplir con este punto se calculó el cociente de la raíz cuadrática media (RCM) o norma entre los campos de la función corriente ($\psi_0 + \psi_1$) y el campo de la función corriente alineal que arroja el modelo numérico, para los tiempos $t = 0$ y $t = 4T$, respectivamente.

En la Figura 9 se muestra la gráfica del cociente de las RCM para diferentes valores del número β -Rossby, ϵ , el cual nos indica la importancia relativa entre los términos lineales y los términos advectivos de la EVPCG, para una cuenca de 1000 km por 500 km centrada en los 32° latitud norte. Este número se define como

$$\epsilon = \frac{|\vec{U}|_{\max}}{\beta L^2}$$

donde $L = \min(\frac{X_0}{\pi}, \frac{Y_0}{\pi})$. Para ϵ relativamente pequeños, entre 0.026 y 0.26 el cociente se mantiene cerca de uno, indicándonos que la solución analítica se aproxima a la solución numérica;

por el contrario, conforme se incrementa el valor de ϵ , la razón de las RCM se aleja de uno, indicando que la solución analítica pierde validez. Por otra parte, la variación que existe entre la razón de las RCM es menor al 10% para los números β -Rossby entre 0.026 y 0.426, mostrando que la solución perturbativa dentro de este rango resulta bastante buena. No hay que olvidar que al aumentar la amplitud, los términos alineales adquieren mayor importancia, perdiendo ψ_1 el carácter de solución perturbativa.

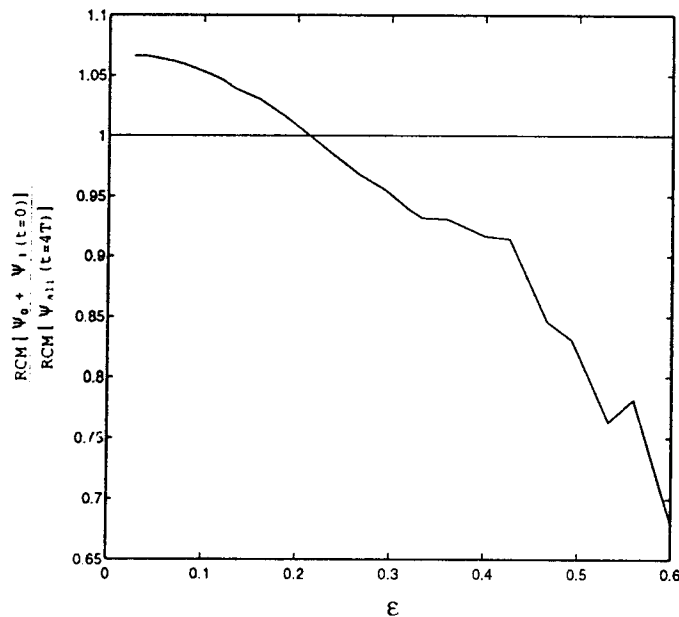


Fig. 9. Razón entre la RCM de $(\psi_0 + \psi_1)$ al tiempo $t = 0$ y la RCM de (ψ_{ali}) al tiempo $4T$ en función de ϵ , parámetros como en Figura 2a, con $n = 1$.

Los resultados del modelo numérico no son quizá lo suficientemente buenos (9% de error en la frecuencia del problema lineal) para poder usarse como una prueba de validez de la solución analítica. Sin embargo, es correcto decir que la solución numérica es una mejor aproximación a la solución "real" (desconocida) que la solución analítica para amplitudes o ϵ 's grandes.

Otro criterio para seleccionar L en el número β -Rossby pudo ser $L = \frac{\pi}{2\{\max(|\vec{K}_1|, |\vec{K}_2|)\}}$ que es la mínima longitud de onda de las ondas que forman el modo dividida entre cuatro. Con esta L y para el caso de la Figura 9, ϵ es menor por un factor de alrededor de tres respecto al primer criterio; no obstante, ambas selecciones de L mantienen a ϵ dentro del mismo orden.

En la Figura 10 se muestran los contornos de la función corriente para el caso alineal analítico y numérico (Figs. 10a y 10b respectivamente), para una cuenca de 1000 por 500 km centrada en los 32° latitud norte y con amplitud A de $12000 \text{ m}^2/\text{s}$, que corresponde a una velocidad máxima geostrofica de 9 cm/s. Como se puede apreciar los términos alineales para cuencas relativamente pequeñas tienen un papel más sobresaliente que para cuencas grandes, siendo notorio al deformarse en una forma más acentuada los giros ciclónicos y anticiclónicos. Por otra parte, en el caso numérico claramente se distingue el efecto de la frontera occidental, la cual presumiblemente es fuente de ondas cortas de Rossby, para las cuales el modelo no cuenta con suficiente resolución.

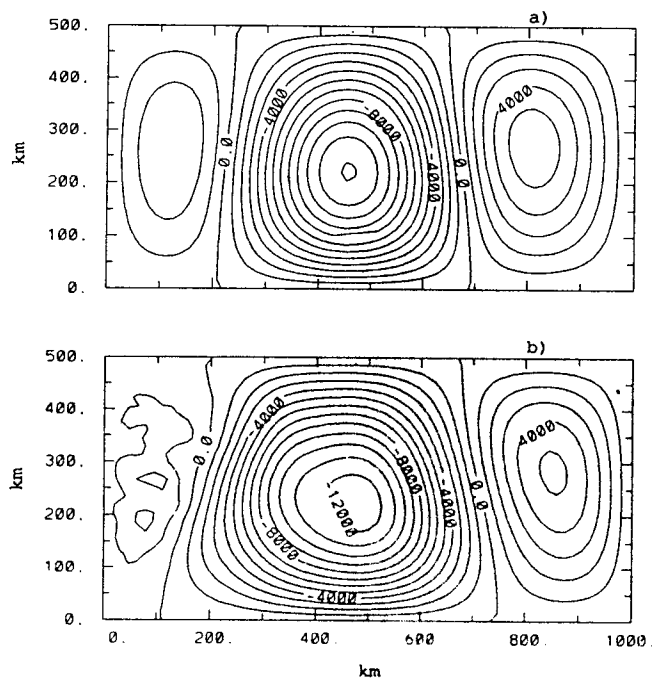


Fig. 10. a) Contornos de $(\psi_0 + \psi_1)$ en $t = 0$; b) contornos de (ψ_{ai}) en $t = 8T$, para una cuenca de $X_0 = 1000$ km y $Y_0 = 500$ km, con $A = 12000$ m²/s, centrada en los 32° de latitud.

VI. Conclusiones

Se estudia la autointeracción de los modos normales de Rossby por medio de un modelo numérico y uno analítico. La solución de la EVPCG lineal con condiciones $\psi_0 = 0$ en la frontera que obtiene Pedlosky (1987) es reproducida, consistiendo de una onda viajera que se propaga hacia occidente modulada por funciones seno que satisfacen las condiciones a la frontera. La función corriente ψ_0 presenta una serie de giros ciclónicos y anticiclónicos alternándose cada medio periodo. El modo normal cuasigeostrófico se puede escribir como la suma de cuatro OR. La frecuencia de oscilación del modo que es igual a la frecuencia de cualquiera de las cuatro ondas depende esencialmente de las dimensiones de la cuenca y de β .

La autointeracción alineal a primer orden de un modo normal de Rossby se estudia con base en la interacción que existe entre las cuatro OR que lo conforman. La interacción a primer orden produce un forzamiento transitorio con el doble de la frecuencia del modo y un forzamiento estacionario.

El forzamiento estacionario tiene como respuesta la presencia de dos giros: uno anticiclónico en la parte norte de la cuenca y el otro ciclónico en la parte sur. La respuesta directa al forzamiento transitorio presenta un desfase de 90° respecto al forzamiento, esta respuesta consiste de una serie de giros ciclónicos y anticiclónicos que no satisfacen las condiciones a la frontera en las paredes meridionales. La respuesta que tiene el fluido para satisfacer las condiciones de contorno es el de generar OR, de tal forma que la suma de la función corriente de estas ondas (solución homogénea) y la función corriente forzada resulte nula en las paredes. Anderson y Gill (1975) proponen como mecanismo de generación de OR libres el ajuste a flujos forzados (por ejemplo, por el viento) que no satisfacen las condiciones a la frontera. Las ondas producen un contra flujo, nulificando así la respuesta del forzamiento en las fronteras.

Es importante destacar que el forzamiento transitorio nunca puede ser resonante. Esto implica que en el régimen de interacciones débiles no se produce intercambio de energía entre el flujo transitorio y las OR que lo generaron.

De las tres posibles soluciones a la ecuación diferencial homogénea para ψ_1 , las dimensiones de la cuenca son las que determinan qué solución escoger. Por otra parte, entre las soluciones que conforman la solución perturbativa a primer orden, la que tiene mayor importancia es la solución particular estacionaria. Los términos advectivos juegan un papel decisivo en la circulación de la cuenca si ésta es relativamente pequeña, por ejemplo para la cuenca de 1000 km por 500 km; por el contrario para cuencas grandes, como la de 7000 km por 3500 km, los términos alineales pasan casi desapercibidos.

Se exploró la validez de la solución analítica a primer orden comparando una norma o RCM del primer término no incluido con una norma o RCM del último término incluido, todo como función de la amplitud del modo normal. El resultado es que la solución a primer orden es bastante buena, ya que para amplitudes realistas, la contribución de la solución a segundo orden sería del orden de 2% a 10%.

De los resultados que se obtienen por medio del modelo numérico se aprecia que los contornos de la función corriente lineal y alineal presentan la deriva hacia occidente de los giros ciclónicos y anticiclónicos, registrando en ambos casos un desfase respecto a la solución analítica que se debe (o puede deberse) a la discretización en el modelo numérico. La deformación que sufren los giros al aproximarse a la frontera occidental presumiblemente se deba a la generación de ondas cortas de Rossby cuya velocidad de grupo se dirige hacia oriente. La solución numérica alineal difiere apreciablemente de la solución analítica perturbativa conforme la amplitud de la condición inicial se incrementa, indicándonos que la solución analítica es válida para números de β -Rossby pequeños.

Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo financiero de CONACYT (México), Proyecto No. 11002-T9111 "Corrientes y Remolinos en el Golfo de México y Mar Caribe" y a José Luis Ochoa responsable de éste.

BIBLIOGRAFIA

- Anderson, D. L. T., y A. E. Gill, 1975. Spin-up of a stratified ocean with applications to upwelling. *Deep-Sea Res.*, **22**, 683-696.
- Arakawa, A., y V. R. Lamb, 1976. Computational design of the UCLA General Circulation. *Methods in Computational Physics*, Academic Press, New York.
- Graef, F., y L. Maggaard, 1994. Reflection of nonlinear baroclinic Rossby waves and the driving of secondary mean flow. *J. Phys. Oceanogr.*, **24**, 1867-1894.
- Graef-Ziehl, F., 1990. Reflection of nonlinear baroclinic Rossby waves at a non-zonal boundary and the driving of secondary mean flows. Tesis doctoral. Universidad de Hawaii, 283 pp.
- Holland, R. H., 1978. The role of mesoscale eddies in the general circulation of the ocean - Numerical experiments using a wind-driven quasi-geostrophic model. *J. Phys. Oceanogr.*, **8**, 363-392.
- Longuet-Higgins, M. S., 1964. Planetary waves on a rotating sphere. *Proc. Roy. Soc. A*, **279**, 446-473.

- Marshall, D., 1993. Resonance of Fofonoff's mode in a rotated basin. *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 970-978.
- Munk, W. H., 1950. On the wind-driven ocean circulation. *J. Meteor.*, **7**, 79-93.
- Pedlosky, J., 1965. A study of the time dependent ocean circulation. *J. Atmos. Sci.*, **22**, 267-272.
- Pedlosky, J., 1987. *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, 624 pp.
- Stommel, H., 1948. The westward intensification of wind-driven ocean currents. *Trans. Amer. Geophys. Union*, **29**, 202-206.
- Swartztrauber, P. M., y R. Sweet, 1975. Efficient FORTRAN subprograms of the solution of elliptic partial differential equations, Tech. Note TN/IA-109, National Center for Atmospheric Research, Boulder, CO.
- Wajsowicz, R. C., 1985. Free planetary waves in finite-difference numerical models. *J. Phys. Oceanogr.*, **16**, 773-789.