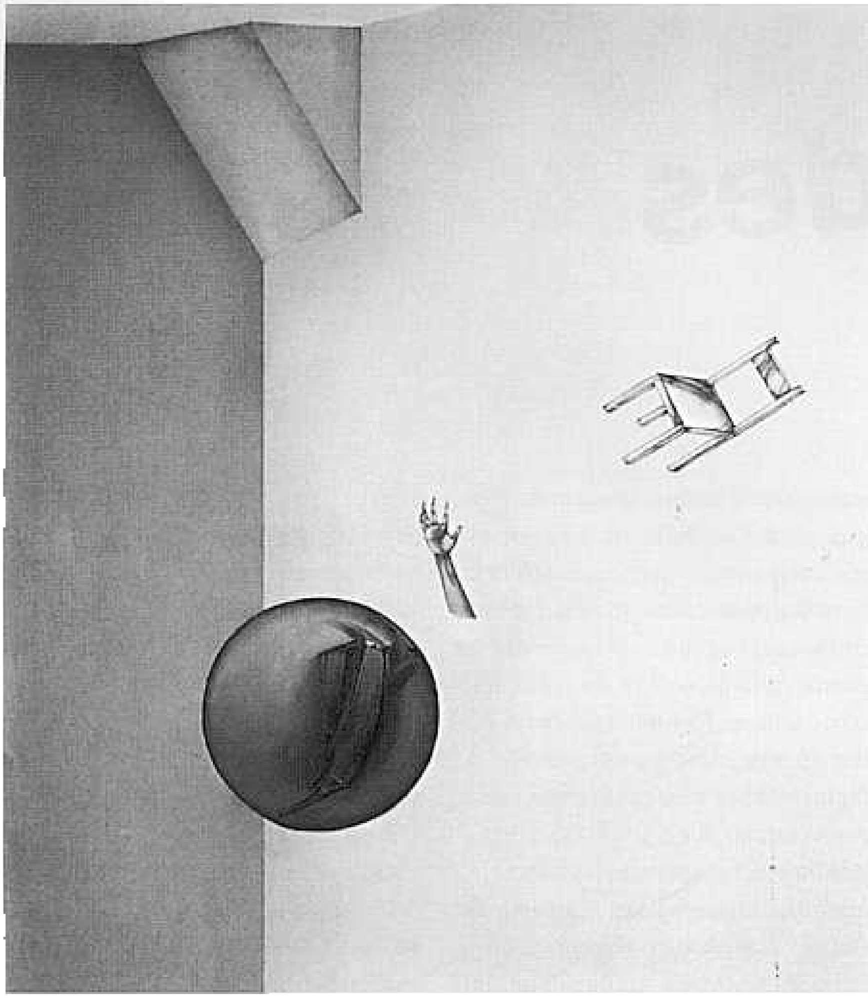
De grandes *y* pequeñas cosas

o la paradoja de Banach y Tarski

LAURA ELENA MORALES GUERRERO

Porque todas las cosas, muy grandes o muy pequeñas, pueden traerse dentro del dominio humano con la ayuda de las matemáticas y de la imaginación. Pues a diferencia de los científicos, quienes observan la naturaleza con los cinco sentidos, los matemáticos lo hacen con el sentido de la imaginación. Es su sexto sentido y están tan especializados en su uso como lo están los músicos con los sonidos, los gourmets con los sabores y aromas, o los fotógrafos y los cineastas con el sentido de la vista. A través de sus creaciones únicas los matemáticos nos informan de la realidad sin pretender siquiera demostrar que algo existe o no. Uno de los orígenes de las matemáticas está en la naturaleza juguetona del ser humano y es por eso que las matemáticas no son sólo una ciencia sino también un arte. Las matemáticas son una creación de la mente, una colección de cosas que existe sólo en la mente, indistinguibles unas de otras, y una colección de declaraciones acerca de estas cosas que se toman por ciertas. Tales declaraciones relacionan estas cosas inventadas o imaginadas, y a partir de ellas el matemático descubre otras llamadas teoremas, las cuales se aboca a demostrar. En suma, el matemático es un artista, su medio es la mente y sus creaciones las ideas.

Las matemáticas son erróneamente consideradas como la ciencia del sentido común. Pero éstas trascienden el sentido común y van más allá de la imaginación y de la intuición. Esto no quiere decir que las matemáticas no tengan relevancia en las creencias y actividades irracionales características de los seres humanos, no. Entender las matemáticas nos puede ayudar enormemente en nuestros intentos multidisciplinarios por entender la naturaleza humana. Escribiremos aquí sobre matemáticas sin usar fórmulas y aun así podremos expresar algo de su sentir, aunque será como expresar el sentimiento de un soneto sin la forma de soneto. No



obstante, algo del espíritu de las matemáticas se puede salvar. Tendría entonces que quedarse sin respuesta una pregunta como: ¿qué son las matemáticas? Cualquiera que sea su esencia, son tan libres como la mente y tan enganchadoras como la imaginación. Las matemáticas son el propio trabajo del ser humano sujeto solamente a las limitaciones impuestas por las leyes del pensamiento. La matemática es una actividad gobernada por las mismas reglas impuestas a las sinfonías de Beethoven, a las pinturas de Da Vinci y a la poesía de Homero. De la misma forma que las escalas musicales, las leyes de la perspectiva y las reglas de la métrica parecen no tener lustre, las reglas formales de las matemáticas pudieran parecer opacas. Pero las matemáticas alcanzan pináculos tan altos como los logrados por la imaginación en sus artistas más atrevidos. Esto encierra, quizás, la paradoja última de la ciencia: el mundo de la razón pura es más extraño que el mundo de la pura fantasía.

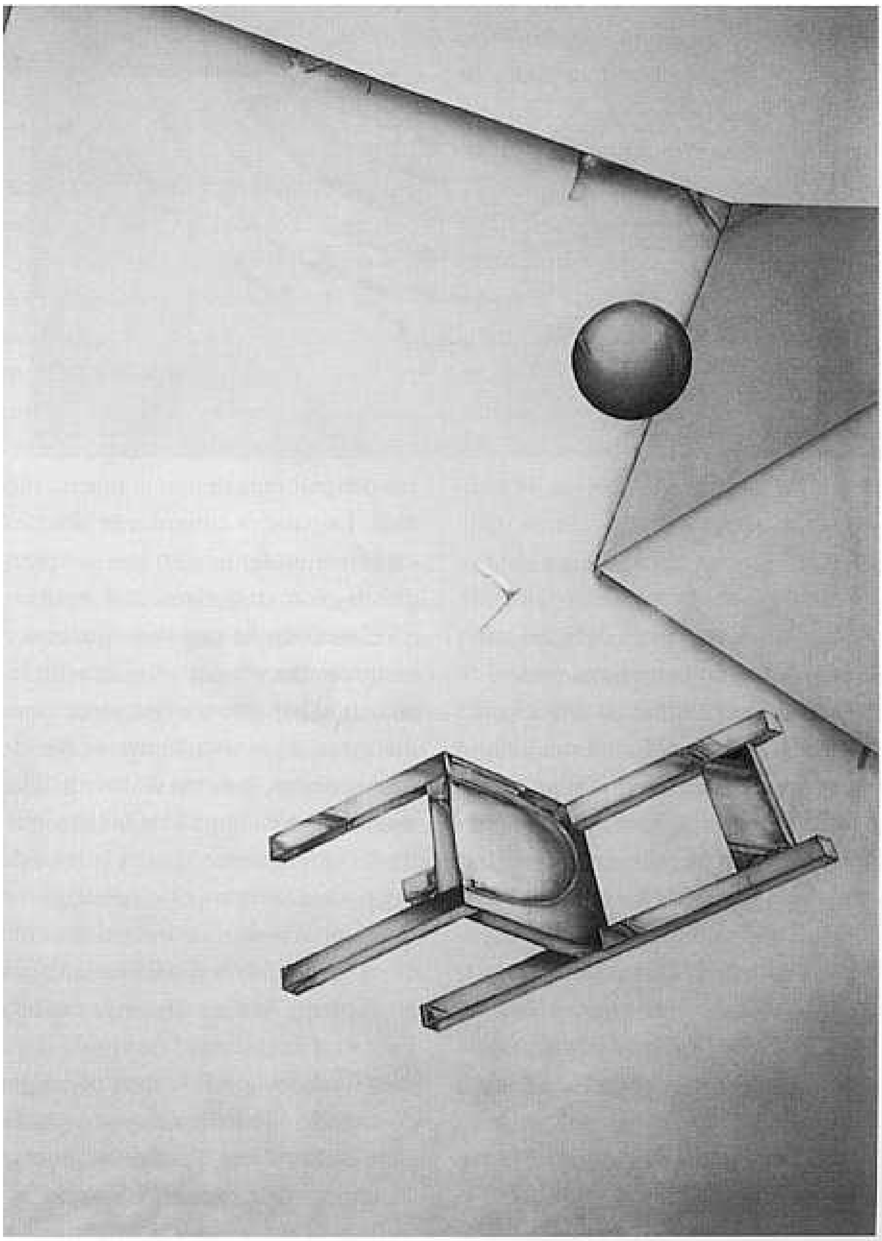
El espacio matemático

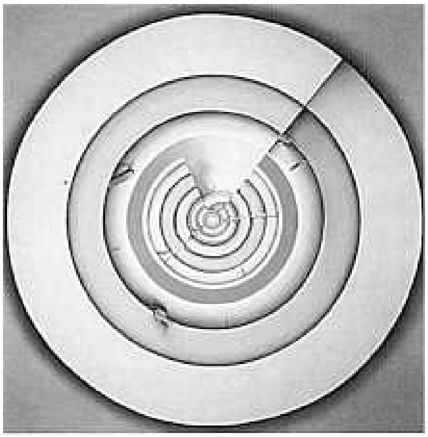
Todo lo que tenga que ver con lo infinitamente pequeño o lo infinitamente grande es paradójico. En aritmética aprendemos que el todo es mayor que sus partes. Pero al tratar con el infinito matemático lo primero que encontramos es una paradoja: el todo no es mayor que ninguna de sus partes. Qué no habría dicho Zenón de esto, él, tan escéptico que era acerca de lo obvio. Las matemáticas de lo infinitamente grande deben mucho a Georg Cantor. En cambio Karl Weierstrass estuvo muy ocupado disponiendo de lo infinitesimal. De la existencia de lo infinitamente pequeño podría reírse cualquiera pero, ¿quién se atrevería a hacerlo de lo infinitamente grande? Ciertamente, Cantor, no. El estudio del infinito en las matemáticas de los números puros es un reto a la intuición, a nuestras experiencias cotidianas y debe ser respetado como tal. Por otro lado, en la vida real, entre las convicciones más preciadas ninguna como nuestras creencias acerca del espacio y tiempo (¿es el espacio infinitamente grande?), pero ninguna más difícil de explicar. Más aún, una cosa es el espacio físico, el de la percepción sensorial, y otro el del espacio matemático. Para entender este último se deben dejar de lado todas las nociones preconcebidas y aprender de nuevo el alfabeto. Hablar del espacio matemático quiere decir hablar de geometría, de varias clases de geometría. Los matemáticos las crean, y no precisamente en relación con figuras. Estas geometrías no tratan con nada real; no describen el espacio accesible a nuestros sentidos, el que explicamos en términos de ver y tocar. Hablan acerca de puntos que no tienen dimensiones, de líneas que no tienen anchura y de planos sin espesor. Ninguna de las abstracciones e idealizaciones se parece a nada de lo que hemos encontrado o experimentado. Más aún, estos espacios no se restringen a las tres dimensiones en las que vivimos (o en las que creemos vivir), sino que pueden ser de 4, 5, ...*n* dimensiones. Y si estas nuevas geometrías son útiles para algo, eso no le concierne al matemático. Él es el sastre de la ciencia: hace los trajes, cualquiera que quepa en ellos puede usarlos. Para ponerlo de otra forma, el matemático hace las reglas del juego; el que quiera puede jugar en tanto observe esas reglas. No tiene sentido quejarse después de que el juego no sirvió para nada.

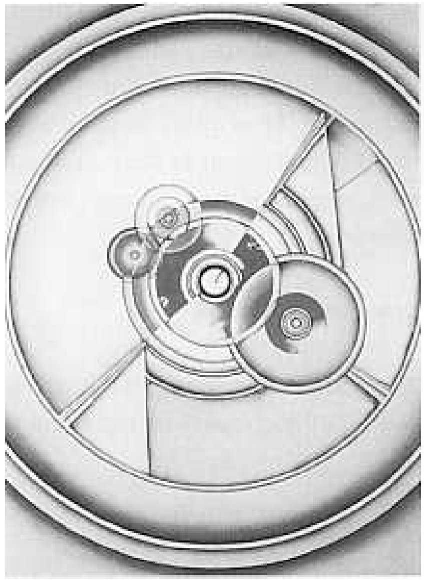
Por ejemplo, la noción de una cuarta dimensión, aun cuando es muy precisa, es muy abstracta; para la gran mayoría está más allá de la imaginación. El desarrollo de estas ideas obedece más a un deseo infantil de consistencia que a cualquier otra cosa. Con esas mismas motivaciones de consistencia y generalidad los matemáticos desarrollaron los números negativos, los números imaginarios y los trascendentales. No fue sino a través de una lucha que estas ideas, ahora comunes, se introdujeron en matemáticas, ya que nadie ha visto menos tres vacas o la raíz cuadrada de menos un árbol. Algo similar sucede con la cuarta dimensión. Comenzando, como es usual, con Aristóteles, se probó una y otra vez que una cuarta dimensión era impensable e imposible; pareció concluir por inducción que no hay transferencia en otra geometría y el admirable Tolomeo lo probó. No obstante, la geometría de cuatro y aun dimensiones mayores es una parte indispensable de las matemáticas. Pero eso no es todo. Por alguna razón misteriosa de las que siempre hay, felizmente, las aplicaciones de la geometría de cuatro dimensiones a la física, al mundo físico, trajeron al mundo el niño no deseado: ¡el tiempo!, que fue entonces reconocido y bautizado como la cuarta dimensión. Los físicos podrán considerar al tiempo como una cuarta dimensión pero el matemático no. Él se queja de su incapacidad para mostrar la cuarta dimensión como algo más concreto que el tiempo.

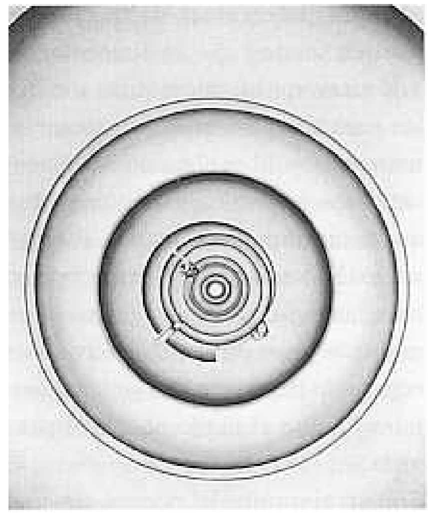
Una primera paradoja

Entre las innovaciones en matemáticas del último cuarto de siglo está el desarrollo de un par de teorías: la de conjuntos puntuales y la de funciones de variable real. Basándose enteramente en estos métodos de análisis matemático se logró un mayor rigor y generalidad en la geometría; mayor de lo que podría imaginarse en el caso de que la ciencia se hubiera desarrollado sólo por medios intuitivos. Se encontró que todas las ideas geométricas convencionales, incluyendo la idea de la "geometría de hule" (la



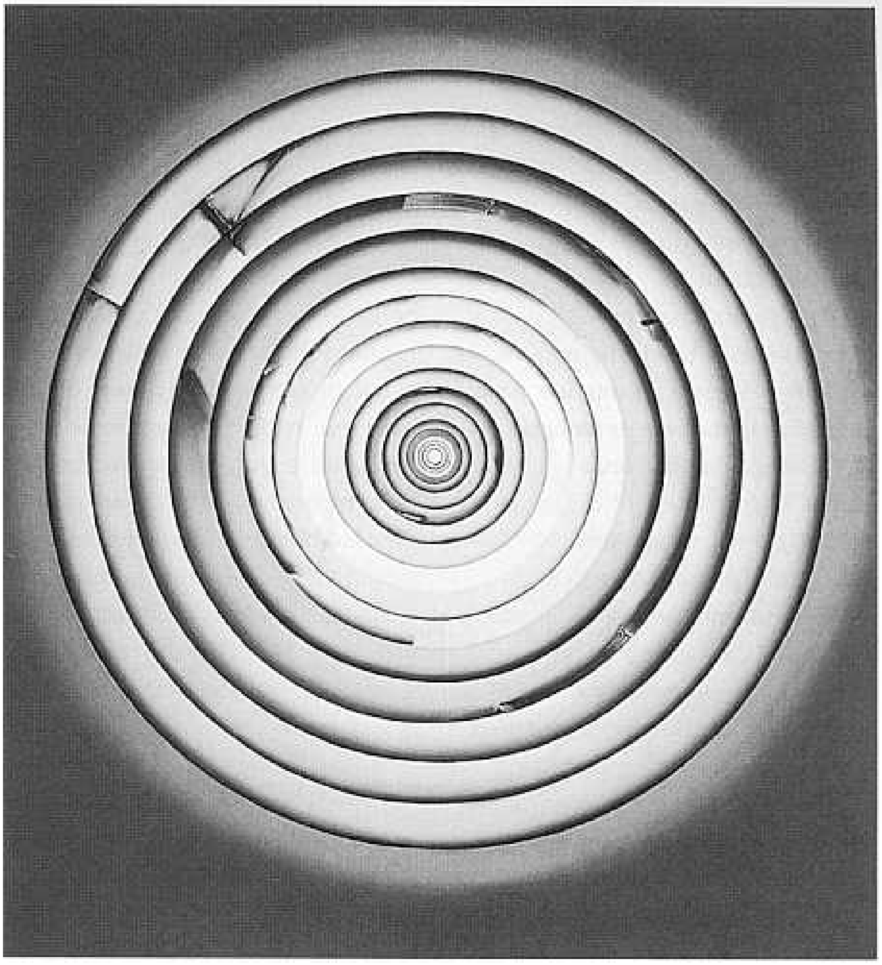






topología), se podrían redefinir con exactitud mayor apelando a la idea de agregados y a las nuevas herramientas de análisis. Sin embargo una paradoja notable que se mantuvo escondida es suficiente, en sí misma, para mostrar que nuestras ideas intuitivas acerca de dimensionalidad y área, no carentes de precisión, son a menudo, completamente confusas y que no bastan las nuevas herramientas para resolverlas. Esta paradoja es una construcción puramente teórica de conjuntos matemáticos. Las piezas involucradas en una partición así son tan diferentes, dentadas, recortadas en los bordes de un modo desigual y tan exóticas, que no tienen una noción de volumen bien definida o una medida asociada a ellas. Así, una pelota que tiene un volumen definido se puede dividir en muchas piezas que se pueden reensamblar, por rotaciones en el espacio real, para formar dos o aun un millón de pelotas ¡cada una idéntica a la original! La forma de las piezas desafía nuestra concepción de área y volumen. Lo que la paradoja muestra es que no importa qué tanto se esfuerce nadie en definir un volumen, lo cual parece muy intuitivo para nosotros, de manera que corresponda con nuestra definición usual para conjuntos "bonitos", siempre habrá conjuntos "malos" para los cuales sea imposible definir un volumen.

La paradoja surge al tratar de asegurar que se puede asignar un número, llamado medida, a cada figura en el plano para que se satisfagan las tres condiciones siguientes: 1) dos figuras congruentes tienen la misma medida. La palabra congruente se usará en el mismo sentido en que se aprendió en geometría elemental, es decir, en el sentido de que dos figuras son congruentes si ocupan el mismo lugar en el espacio aun en posiciones distintas; 2) si una figura se divide en dos partes, la suma de las medidas asignadas a cada una de las dos partes es exactamente igual a la medida asignada a la figura original; 3) como modelo para determinar el método de asignar una medida a cada figura en el plano, se acordó que la medida 1 debería asignarse al cuadrado cuyo lado tiene longitud 1. Este concepto de medida equivale al área de una figura en un plano. Pero debe tenerse en cuenta que este concepto se introdujo como un ejercicio general y teórico y no como la vasta y obviamente imposible tarea de realmente medir cada figura concebible. El problema se consideraba resuelto si se podía dar una prueba teórica de que a cada figura se le podría asignar una medida única; el enfoque debía ser analítico (por medio de conjuntos puntuales) y no geométrico. Aquí viene entonces la debacle. Se descubrió el hecho sorprendente de que el mismo problema, cuando se extendía a las superficies, no sólo no era soluble sino que llevaba a las paradojas más desconcertantes. En el caso de la superficie de la esfera, por ejemplo, los mismos métodos que resultaron fructíferos al investigar en el plano fueron inadecuados para determinar una medida única. Las condiciones para asignar una medida a una superficie son similares a las de las figuras en el plano dadas arriba, con la salvedad de que la condición 3 cambia a: si S denota la superficie total de una esfera de radio r, la medida asignada a S será $4\pi r^2$. El avance en la teoría de funciones y los nuevos métodos de análisis resolvieron algunos de estos problemas, pero introdujeron otros relacionados con el infinito, y la presencia de ese concepto, como todos los matemáticos lo han sabido desde siempre, de ningún modo es una bendición. Han podido avanzar a grandes saltos hacia delante, sí, pero no sin la sombra de la incertidumbre. Por supuesto que se puede uno quedar con la fórmula para el área de la esfera por la simple razón de que funciona. Pero si alguien se quiere mantener al paso del abierto e incansable espíritu matemático se topa con las inconfortables alternativas de abandonar la lógica para mantener los conceptos clásicos o aceptar los resultados paradójicos del nuevo análisis y mandar a volar lo sensato.



La paradoja de Hausdorff

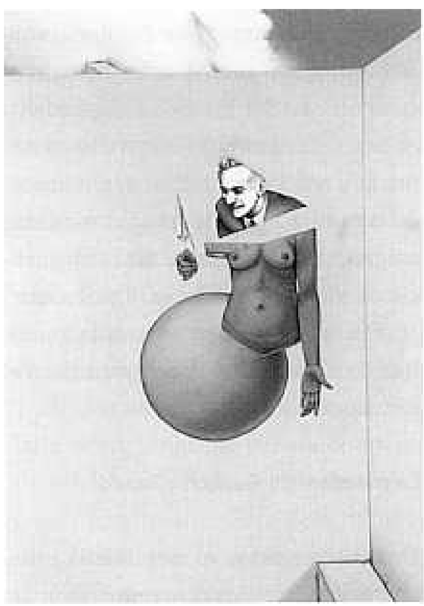
El matemático alemán Hausdorff construyó una paradoja en verdad notable y mostró que el problema de la esfera es insoluble, que no se puede asignar una medida única a la superficie de la esfera de forma que las condiciones mencionadas se satisfagan. Mostró que si la superficie de una esfera se divide en tres partes distintas separadas: A, B y C, de manera que A sea congruente con B, y B sea congruente con C, surge una paradoja extraña que nos recuerda fuertemente algunas de las paradojas de la aritmética transfinita, y de hecho está relacionada con ellas. Hausdorff probó que no sólo A es congruente con C, como se esperaría, sino que también A es congruente con $B+C$. ¿Cuáles son las implicaciones de este resultado desconcertante? Veamos; si se asigna una medida a A, la misma medida debe asignarse a B y a C, dado que A es congruente con B, B es congruente con C, y A es congruente con C. Pero, por otro lado, puesto que A es congruente con $B+C$, la medida asignada a A tendría que ser la misma que la suma de las medidas asignadas a B y a C. Obviamente tal relación podría valer sólo en el caso en que las medidas asignadas a A, B y C fueran cero. Pero eso es imposible por la condición 3. De acuerdo con ella, la suma de las medidas asignadas a las partes de la superficie de una esfera debe ser igual a $4\pi r^2$. ¿Cómo entonces se asigna la medida? Estamos ante una contradicción desesperanzada.

La paradoja de Banach y Tarski

Dos distinguidos matemáticos polacos, Banach y Tarski, extendieron las implicaciones del teorema paradójico de Hausdorff al espacio tridimensional con resultados tan increíbles y alarmantes que no encuentran igual en todas las matemáticas. Las conclusiones, aun cuando son rigurosas e impecables, son casi tan increíbles para el matemático como para el lego. Imaginemos dos cuerpos en el espacio tridimensional: uno muy pequeño, como un chícharo, y otro muy grande, como el Sol. Pensemos también en una naranja entera. Recordemos que nos referiremos no a las superficies de estas esferas sino a las esferas sólidas completas. La paradoja de Banach y Tarski sostiene que en teoría es posible cortar una naranja en cierto número de piezas que pueden reensamblarse para producir dos naranjas, cada una ¡del mismo tamaño y volumen que la original! La versión alterna dice que es posible cortar un chícharo en un número finito de partes y reensamblarlas para formar una pelota sólida ¡del tamaño del Sol!

Para tener una idea de cómo se hace esto en la teoría, llamemos S al Sol y dividámoslo en muchas partes pequeñas. Cada parte es independiente y distinta de las demás y la totalidad de las partes es un cierto número. Desígnense estas partes con s_1, s_2, s_3,... s_n, que juntas hacen la esfera total S. Similarmente el chícharo será S' y se dividirá en un número igual de partes mutuamente excluyentes, s'_1, s'_2, s'_3,... s'_n, las cuales juntas forman el chícharo. La proposición dice que si el Sol y el chícharo se han cortado de tal forma que la pequeña porción s_1 del Sol es congruente con la partecita s'_1 del chícharo y s_2 es congruente con s'_2, y s_3 lo es con s'_3 y así sucesivamente hasta que s_n sea congruente con s'_n, el proceso agotará no sólo todas las partes del chícharo sino también todas las partes del Sol. En otras palabras, el Sol y el chícharo se han dividido de manera que un cierto número de partes disyuntas de cada uno es congruente con una única parte del otro y después de que cada pequeña porción del chícharo se ha comparado con una pequeña porción del Sol no sobra ninguna parte del Sol. Esto es una simple correspondencia uno a uno entre los elementos del conjunto que corresponde al Sol y los elementos del otro conjunto que corresponde al chícharo. La paradoja está en el hecho de que cada elemento es comparado con otro con el que es completamente congruente o idéntico en forma y tamaño y que hay suficientes elementos en el conjunto que hace al chícharo para comparar con los elementos que hacen al Sol. Sí, suena terrible, descabellado. ¿Cómo es posible que haya una forma de dividir una esfera tan grande como el Sol en partes separadas donde ningún par de partes tenga ningún punto en común y aun así, sin comprimir o distorsionar ninguna parte, el Sol entero pueda ajustarse de manera que podamos sostenerlo en la palma de la mano? Más aún, las partes componentes del chícharo pueden reensamblarse, sin expandirse o distorsionarse y sin que ninguna tenga ningún punto en común con otra, de forma que llenen el universo entero sin dejar ningún espacio libre, sea en el interior del chícharo o en el Universo mismo. Solamente con herramientas matemáticas especializadas podemos explicar cómo una aseveración tan en contra de la intuición puede ser cierta.

Ningún cuento de hadas, ninguna fantasía de noches árabes ni sueño afiebrado alguno pueden compararse con este teorema de dura lógica matemática. Aun cuando los teoremas de Hausdorff, de Banach y Tarski, no pueden, hasta el momento, ser llevados a la práctica ni siquiera por aquellos que esperan poder empacar sus abultadas pertenencias en un pequeño maletín de fin de semana o por quienes esperan poder reproducir los huevos de oro, permanecen como un reto magnífico para la imaginación y como un tributo a la concepción matemática. Porque únicamente la imaginación pone un límite a las aplicaciones del teorema de Banach y Tarski.



Pero la paradoja no es ningún sin sentido. Debido al axioma de elección, existen conjuntos que no tienen un volumen medible. Es posible entonces descomponer los conjuntos y reensamblarlos con un volumen mayor. Esto no funciona si no se cree en el axioma de elección. El cual es precisamente eso: un axioma. Es decir que se ha probado que el axioma de elección no puede ser probado o desaprobado y es motivo de discusiones técnicas y filosóficas su uso en el teorema de Banach y Tarski porque en la prueba de este teorema se usó el axioma de elección. Y es posible mostrar que es imposible hacerlo sin el axioma de elección. Seguramente Banach y Tarski se sintieron como Einstein cuando quiso deshacerse del principio de incertidumbre en física. Al parecer Banach y Tarski esperaban que su resultado animara a los matemáticos a descartar el axioma de elección. Se sintieron infelices cuando la respuesta general fue: ¡Hey, el axioma de elección es fabuloso!, ¿de qué otra forma podríamos obtener resultados "contra-intuitivos" tan bonitos? Se ha argumentado que el resultado es tan "contra-intuitivo", tan patentemente falso en el mundo real, que una de las suposiciones fundamentales debe ser incorrecta, y generalmente se escoge al axioma de elección como el culpable. Sin embargo, resultados extraños que no dependen del axioma de elección abundan en matemáticas. Por otro lado, el axioma de elección es consistente con los otros axiomas de la teoría de conjuntos. De ahí que la paradoja de Banach y Tarski sea, al menos, consistente.

Las falacias matemáticas

Hay otros juegos mentales que no son propiamente paradojas y se conocen como falacias matemáticas. Surgen tanto en aritmética como en geometría y se encuentran, aun cuando no muy a menudo, en las ramas altas de las matemáticas como, por ejemplo, en cálculo o en las series infinitas. Además de su aspecto divertido, muestran cómo una cadena de razonamientos puede viciarse por completo debido a un paso mal dado, aunque la mayoría de ellas son demasiado triviales para merecer atención.

Un ejemplo famoso trata del infinito. El infinito, en matemáticas, es siempre ingrato, a menos que sea tratado propiamente. Una serie que preocupó a Leibnitz es la terriblemente simple suma de unos: 1-1 + 1-1 + 1-1 + 1...*ad infinitum.* Apareando los términos de maneras distintas, se obtiene una variedad de resultados; por ejemplo, $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots=0$. Pero también, $1-(1-1)-(1-1)\ldots=$ ¡1!

Al igual que en los cuentos y leyendas populares, las paradojas lógicas tienen sus antecedentes en los tiempos antiguos. Habiéndose ocupado de la filosofía y de las bases de la lógica, los griegos formularon algunos acertijos y problemas capciosos que en tiempos recientes han vuelto a contaminar a los matemáticos y a los filósofos. Muchos de ellos, no resueltos con el uso de la lógica, son causados por lo que se conoce como la falacia del círculo vicioso, la cual se origina al "ignorar el principio fundamental de que lo que involucra el todo de un total dado, no puede, en sí mismo, ser un miembro de la totalidad". Ejemplos simples de esto son esas frases pontificias que parecen tener un gran significado pero que en realidad no tienen ninguno. Tales como: "Nunca digas nunca". "Todas las reglas tienen excepciones". "Todas las generalidades son falsas".

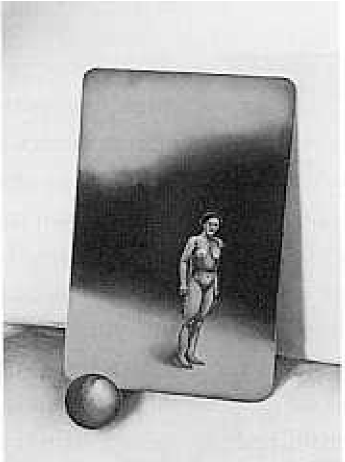
Entre algunas de las más avanzadas está la siguiente: "El barbero del pueblo rasura a todos los que no se rasuran a sí mismos". Este principio pronto lo envuelve en una contradicción dialéctica: ¿debe el barbero rasurarse a sí mismo? Si lo hace entonces está rasurando a alguien que se rasura a sí mismo y rompe la propia regla. Si no lo hace, además de quedarse barbudo, también rompe su regla al no rasurar a una persona del pueblo que no se rasura a sí misma...

El uso de la palabra todos es peligroso en matemáticas.

En otra situación, considérese el hecho de que cada número entero puede expresarse en palabras, sin usar símbolos. Así se tiene que 1 400 se puede escribir mil cuatrocientos o 1 769 823 como un millón setecientos sesenta y nueve mil ochocientos veintitrés. Es evidente que ciertos números requieren más palabras que otros; en general, mientras más grande sea el número, se necesitarán más palabras para expresarlo. El primer caso requiere dos palabras, el segundo nueve. Ahora bien, puede establecerse, ¿por qué no?, que ciertos números requerirán más de doce palabras y otras menos de doce. Más aún, no es difícil mostrar que entre los números que requieren exactamente doce palabras hay uno que es el más pequeño de ellos. Entonces, es fácil ver que "el número más pequeño no expresable en menos de doce palabras" es una frase que describe al número específico 101 131 131 (ciento un millones ciento treinta y un mil ciento treinta y uno) en ¡11 palabras! Por tanto tenemos una contradicción: el número menor expresable en doce palabras, se puede expresar también en las once palabras de la frase entre comillas.

Los matemáticos y las paradojas

Y así como estos casos contradictorios, hay otros en matemáticas. Tal vez la paradoja más grande sea que haya paradojas en matemáticas. Las paradojas lógicas aquí presentadas no son trucos vanos o tontos, no fueron presentados para hacer reír al lector a menos que su risa sea causada por las limitaciones de la lógica. Parafraseando a Hamlet "lo que una vez fue paradoja no lo es más pero podría volver a serlo". La matemática moderna, en un intento por prevenir las paradojas, se enfrentó abiertamente con la alternativa de adoptar un escepticismo aniquilador con respecto a todo el razonamiento matemático o reconstruir tanto los fundamentos de las matemáticas como los de la lógica. Mucho han trabajado los matemáticos y los filósofos en este sentido sin haber podido llegar a una solución. Lo que se mantiene es el hecho de que las paradojas lógicas han dividido a los matemáticos en facciones opuestas e irreconciliables y tienen que ser eliminadas. Se ha enfatizado el hecho de que el matemático busca siempre trabajar sus teoremas en la forma más general posible (inclusive cuando no puede resolver un problema, ¡lo generaliza!), en un reclamo de mucha altura. Ese pasar del uno al todo también es peligroso; peligroso en la misma forma en que el concepto de infinito lo es. En la transición de lo particular a lo general el matemático ha hecho sus más grandes progresos, pero también ha sufrido sus más grandes reveses. De entre ellos las paradojas lógicas constituyen la parte más importante.



Laura Elena Morales Guerrero
Instituto de Matemáticas,
Universidad Nacional Autónoma de México.

IMÁGENES
Enrique Guzmán, p. 46: *Objetos 2*, 1976; p. 48: *Caída*, 1976; p. 49: *Siempre*, 1976; p. 50: *Un instante*, 1976; *Trascurso del tiempo*, 1976; *El propio encuentro*, 1976; p. 51: *Círculos*, 1976; p. 52: *Transmutaciones*, 1976; p. 53: *Hombre flotando*, 1976; p. 54: *Postal con canica*, 1977.